Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Wintersemester 2007/08

Differentialgleichungen I

14.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 11.2. bis zum 15.2.

Die korrigierten Lösungen könnt Ihr bei mir, MA 363, ab Beginn der vorlesungsfreien Zeit abholen. Wenn Ihr Eure email-Adresse auf die Abgabe schreibt, bekommt Ihr Eure Punktezahl gemailt.

Aufgabe 1: **6 Punkte**

1. Löse das Randwertproblem für die Differentialgleichung

$$-u''(x) + 2u'(x) + 8u(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

mit

(i) homogenen Dirichlet-Randbedingungen,

(ii) $u(0) = 0,\ u(1) = 1$,

für die rechten Seiten

(a) $f(x) \equiv 0$,

(b) $f(x) = 6(1-4x^2)e^{4x}$,

und skizziere die Lösungen.

2. Unter welchen Bedingungen ist die Aufgabe

$$-u''(x) = 0$$

mit Robinschen Randbedingungen lösbar?

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Wir betrachten das RWP

$$\begin{cases} -u'' - \lambda u = 0 & \text{auf } (0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Für welche λ besitzt das Problem nicht-triviale Lösungen? Ein solches λ wird *Eigenwert des RWP* genannt, eine zugehörige nicht-triviale Lösung nennt man *Eigenlösung*. Das obige RWP bezeichnet man auch als *Eigenwertproblem*. Diskutiere diese Namensgebung.

Wir betrachten nun das Eigenwertproblem zum Sturm-Liouville-Problem

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) - \lambda u(x) = 0, & x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

mit $p \in \mathcal{C}^1[a,b]$, $p(x) > 0$ auf $[a,b]$ und $q \in \mathcal{C}[a,b]$ reell.

(i) Zeige, daß hier alle Eigenwerte reell sind.

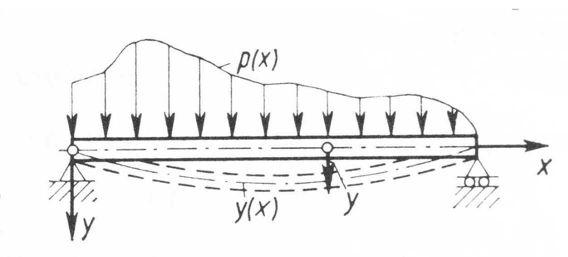
(ii) Es gelte $q(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Zeige, daß nun alle Eigenwerte nichtnegativ sind.

Hinweis: L^2-Skalarprodukt.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Die Durchbiegung $y(x)$ eines Trägers mit konstanter Biegesteifigkeit $\alpha = 1$ unter einer Belastung mit Belastungsdichte $p(x)$ genügt der Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y^{(4)}(x) = p(x).$$



Ist der Träger an den Punkten $x = 0$ und $x = l$ momentenfrei gelagert, so erhält man die Randbedingungen

$$y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0.$$

Zeige, daß die Greensche Funktion für diese Problem die Form

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{6\alpha l}\xi(x-l)(x^2+\xi^2-2lx), & \text{für } \xi \leq x \\ \frac{1}{6\alpha l}x(\xi-l)(x^2+\xi^2-2l\xi), & \text{für } x \leq \xi \end{cases}$$

hat und daß die Lösung des Problems durch

$$y(x) = \int_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi$$

gegeben ist.
Bemerkung: Wirkt an Stelle der Belastung mit Dichte p nur eine Einzellast der Größe 1 an der Stelle ξ_0, so folgt

$$y(x) = G(x,\xi_0).$$

Die Greensche Funktion gibt dann also als „Einflußfunktion" die Durchbiegung an der Stelle x an, wenn an der Stelle ξ_0 eine Last der Größe 1 wirkt.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Beweise die folgende schärfere Version eines Satzes aus der Vorlesung:

> Es sei $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die einer Lipschitz-Bedingung genügt, es also ein $L > 0$ gibt, so daß für alle $x \in [a,b]$ und alle $s,t \in \mathbb{R}$
> $$|f(x,s) - f(x,t)| \leq L|s-t|$$
> gilt. Ferner gelte
> $$L < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}\,. \tag{1}$$
> Dann gibt es genau eine Lösung des semilinearen Problems
> $$\begin{cases} -u''(x) = f(x,u(x)), & x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Betrachte dazu die Menge

$$\left\{ v \in \mathcal{C}[a,b] \;:\; |||v||| := \sup_{x \in (a,b)} \frac{|v(x)|}{\sin \frac{\pi(x-a)}{b-a}} < \infty \right\}$$

und zeige, daß diese einen Banach-Raum bildet. Wende dann den Banachschen Fixpunktsatz an.

Bemerkung: Die Bedingung (1) ist scharf, die Aussage des Satzes kann also nicht mehr aufrechterhalten werden, falls $L \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$ ist.

Aufgabe 5: **5 Zusatzpunkte**

Wir erinnern uns an die vierte Aufgabe des ersten Aufgabenblattes.
Hier nehmen wir nun an, daß $0 < j < \frac{4}{9}$ sei. Zeige, daß dann für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ das semilineare Randwertproblem

$$\begin{cases} \phi''(x) = \frac{j}{\sqrt{\phi(x)+\varepsilon}}, & x \in (0,1), \\ \phi(0) = 0, \\ \phi(1) = 1, \end{cases}$$

genau eine Lösung besitzt.
Hinweis: Zeige zunächst, daß für jedes $\lambda \geq 0$ genau eine Lösung ϕ_λ der Differentialgleichung mit $\phi_\lambda(0) = 0$ und $\phi'_\lambda(0) = \lambda$ existiert. Zeige dann, daß für festes x $\lambda \mapsto \phi'_\lambda(x)$ streng monoton wachsend ist, daß auch $\lambda \mapsto \phi_\lambda(x)$ dies ist und schließlich, daß $\lambda \mapsto \phi''_\lambda(x)$ streng monoton fällt. Zeige nun die Lipschitzstetigkeit von $\lambda \mapsto \phi_\lambda(1)$ und benutzte schließlich den Zwischenwertsatz.