

Differentialgleichungen I

15. Übungsblatt

Abgabe 18.2 - 20.2. (Montag bis Mittwoch) bei mir (MA 363).
Dort können die korrigierten Lösungen dann auch abgeholt werden.

Aufgabe 1:

4 Zusatzpunkte

Beweise die sogenannte LAGRANGE-Identität: Sei

$$(Lu)(x) := -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x), \quad x \in (a, b),$$

$p \in \mathcal{C}^1[a, b]$, $p(x) > 0$ für $x \in (a, b)$, $q \in \mathcal{C}[a, b]$, der das STURM-LIOUVILLE-Problem beschreibende Differentialausdruck. Dann gilt für zwei Funktionen $u, v \in \mathcal{C}^2[a, b]$

$$uLv - vLu = (p(u'v - uv'))' .$$

Gilt außerdem $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$, so folgt

$$(Lu, v)_2 = (u, Lv)_2 ,$$

wobei $(\cdot, \cdot)_2$ das übliche $L^2(a, b)$ -Skalarprodukt bezeichne.

Aufgabe 2:

6 Zusatzpunkte

Untersuche das semilineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = -e^{u(x)}, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

auf Lösbarkeit.

Hinweis: Zeige zunächst, daß stets $u(x) \leq 0$ gilt. Reduziere dann das Randwertproblem auf ein Fixpunktproblem auf der Menge

$$\mathcal{M} := \{v \in \mathcal{C}[0, 1] : v(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in [0, 1]\}.$$