Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Wintersemester 2007/08

Differentialgleichungen I

3.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 12.11. bis zum 16.11.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Bestimme eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

mit

(i) $u_0(x) = \min(x, 1-x)$,

(ii) $u_0(x) = x(1-x)$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Löse die Wärmeleitgleichung für homogene Neumann-Randbedingungen, d.h.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Zeige, daß der Mittelwert der Lösung für $t > 0$ konstant bleibt und daß für jedes $x \in (0,1)$ die Lösung $u(x,t)$ gegen den Mittelwert konvergiert für $t \to \infty$.
Wie paßt dies zur physikalischen Interpretation?

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei X ein Banach-Raum und $[a,b]$ ein Intervall.
Zeige, daß der Raum $\mathcal{C}^1([a,b];X)$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a,b]$ mit Werten in X, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1([a,b];X)} := \max_{t\in[a,b]} \big(\|u(t)\| + \|u'(t)\|\big),$$

ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Für $u \in \mathcal{C}([a,b];X)$ sei (u_n) die in der Vorlesung definierte Folge von Treppenfunktionen, also für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} u_n(t) &:= u\big(t_{k-1}^{(n)}\big) \qquad \text{für } t \in \big[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\big),\ k = 1,2,\ldots,n, \\ u_n(b) &:= u\big(t_{n-1}^{(n)}\big), \end{aligned}$$

wobei $t_k^{(n)} = a + \frac{b-a}{n}k$ ist.
Zeige, daß (u_n) punktweise gegen u konvergiert.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Gib mindestens drei Literaturquellen an, in denen der folgende Satz von Mazur bewiesen wird und formuliere einen Beweis in eigenen Worten. Der Satz von mazur lautet:

> *Sei X ein* Banach-*Raum und $A \subset X$ eine relativ kompakte Menge. Dann ist auch die konvexe Hülle co(A) von A relativ kompakt.*