Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Wintersemester 2007/08

Differentialgleichungen I

5.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 26.11. bis zum 30.11.

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $f : \mathbb{R} \times X \to X$ stetig.
Zeige:

(i) Ist f im zweiten Argument *linear beschränkt*, gibt es also Funktionen $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_0^+) \cap L^1(\mathbb{R})$, so daß für beliebige $(t, v) \in \mathbb{R} \times X$

$$\|f(t, v)\| \leq \alpha(t) + \beta(t)\|v\|$$

gilt, so ist jede Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0 \in X, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

beschränkt.

(ii) Genügt f zusätzlich einer lokalen Lipschitzbedingung auf X, so ist das Anfangswertproblem (1) eindeutig lösbar.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Bestimme mit Hilfe der Methode der Reduktion der Ordnung die allgemeine Lösung des Systems

$$u'(t) + Au(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1/t & 1 \\ -1/t^2 & -2/t \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung ist $u_1(t) = (t^2, -t)^T$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Zeige, daß das AWP für die Integrodifferentialgleichung

$$\begin{cases} u'(t) = (Ku)(t), \quad t > 0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

mit $(Ku)(t) := \int_0^t k(t-s)u(s)ds,\ k \in L^1(\mathbb{R})$, eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ wissen wir, daß das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = |t|^\alpha |u(t)|^\beta, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

lokal eindeutig lösbar ist?

Aufgabe 5: **3 Punkte**

Sei X ein Banachraum und $f : \mathbb{R} \times X \to X$ stetig und genüge einer lokalen Lipschitzbedingung bezüglich X. Es gelte weiterhin

$$f(-t, u) = -f(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, u \in X.$$

Zeige: Ist u eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases}$$

auf einem Intervall $[-r, r]$, $r > 0$, so ist u gerade.

Zum Abschluß noch ein Zitat des großen Funktionalanalytikers (seines Zeichens also ein echter „Theoretiker“) Paul Halmos aus dem Jahre 1985:

> Mathematics is not a deductive science - that's a cliché. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial-and-error, experimentation, and guesswork.