Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Wintersemester 2007/08

Differentialgleichungen I

6.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 3.12. bis zum 7.12.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Gegeben sei das AWP

$$\begin{cases} u_1'(t) = -u_1(t) + u_2(t)/t + t, \\ u_2'(t) = (1-t)u_1(t) + u_2(t) - t^2, \qquad \text{für } t > 0, \\ u_1(1) = 1,\ u_2(1) = 2. \end{cases}$$

Schreibe das AWP in der Form einer inhomogenen, linearen Differentialgleichung vom Typ $u'(t) + A(t)\,u(t) = f(t)$ und zeige, daß

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ 1 + t\ln(t) \end{pmatrix}$$

Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung sind.
Löse das inhomogene AWP.

Aufgabe 2: **8 Punkte**

Es seien $X = \mathbb{R}^n$ und $A, B : X \to X$ lineare Abbildungen (unabhängig von t). Zeige die folgenden Aussagen.

(i) Kommutieren A und B, so gilt $e^A\,e^B = e^{A+B} = e^B\,e^A$ und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. Ist zusätzlich B invertierbar, so gilt auch $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$.

(ii) Es gilt[1]

$$\lim_{n\to\infty}(I + \frac{1}{n}B)^n = e^B = \lim_{n\to\infty}(I - \frac{1}{n}B)^{-n}.$$

(iii) Es gilt

$$Bv = \lim_{t\searrow 0}\frac{e^{tB}v - v}{t}$$

für beliebige $v \in X$.

(iv) Angenommen, A lasse den Unterraum E invariant, für alle $v \in E$ sei also auch $Av \in E$. Ist dann u eine Lösung des AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0 \in E, \end{cases} \tag{1}$$

für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so ist $u(t) \in E$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

[1] Hinweis: Binomische Formel und Bernoullische Ungleichung.

(v) Sei A nilpotent. Was kann man dann über die Lösungen des AWP (1) sagen?

(vi) Es habe A einen Eigenwert mit positivem Realteil. Dann gibt es mindestens eine Lösung u der Differentialgleichung $u'(t) + Au(t) = 0$, für die

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$$

gilt.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Es sei $X = \mathbb{R}^n$, I ein Intervall, $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(X))$. Wir betrachten ein Fundamentalsystem $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(X))$ der Differentialgleichung

$$u'(t) + A(t)u(t) = 0. \tag{2}$$

Zeige, daß eine Abbildung $\mathcal{V} \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(X))$ genau dann ein Fundamentalsystem von (2) ist, wenn es eine reguläre Abbildung $C \in \mathcal{L}(X)$ gibt mit

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{U}(t)C, \qquad t \in I.$$

Ist $C \in \mathcal{L}(X)$ regulär und kommutiert C mit allen $A(t)$, $t \in I$, so ist auch $C\mathcal{U}$ ein Fundamentalsystem von (2).

Aufgabe 4: **6 Punkte**

In der Übung haben wir homogene Systeme mit periodischen Koeffizienten betrachtet, also Systeme

$$u'(t) + A(t)u(t) = 0, \tag{3}$$

wobei $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{d \times d})$ ω-periodisch sei, $\omega > 0$.

Ist $\mathcal{U}$ ein Fundamentalsystem von (3), so ist auch $\mathcal{U}(\cdot + \omega)$ ein Fundamentalsystem und aus Aufgabe 3 erhalten wir, daß es eine reguläre Matrix C gibt, so daß

$$\mathcal{U}(t + \omega) = \mathcal{U}(t)\, C$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Matrix C hängt im allgemeinen von der Wahl des Fundamentalsystems $\mathcal{U}$ ab. Dies gilt nicht für die Eigenwerte von C; diese heißen auch *charakteristische Multiplikatoren* von (3).

Zeige:

(i) Die Eigenwerte von C sind von der Wahl des Fundamentalsystems $\mathcal{U}$ unabhängig.

(ii) Es gibt genau dann eine nichttriviale Lösung $u(t)$ der Differentialgleichung (3) mit

$$u(t + \omega) = \lambda u(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

wenn λ ein charakteristischer Multiplikator von (3) ist. (Dies erklärt den Namen.)

(iii) Die charakteristischen Multiplikatoren kann man im allgemeinen nicht bestimmen, ohne bereits ein Fundamentalsystem zu kennen.
Wie kann man aber das Produkt aller charakteristischen Multiplikatoren bereits aus der Kenntnis von A berechnen?

Bemerkung: Die charakteristischen Multiplikatoren sind von Interesse, da sie das asymptotische Verhalten einer Lösung von (3) für $t \to \pm\infty$ bestimmen.