Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler

Wintersemester 2007/08

Differentialgleichungen I

7.Übungsblatt

Dies ist das letzte Übungsblatt der ersten Semesterhälfte.
Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 10.12. bis zum 14.12.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Wir betrachten in $X = \mathcal{C}([0,1])$ das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in [0,1], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

mit $(Av)(x) := \int_0^1 (\xi - x)v(\xi)d\xi$ für $v \in X$.
Zeige, daß der zugehörige Lösungsoperator durch

$$S(t) = e^{-tA} = I - \sqrt{12}\sin(\frac{t}{\sqrt{12}})A + 12\big(1 - \cos(\frac{t}{\sqrt{12}})\big)A^2$$

gegeben ist. (I bezeichnet die Identität in X.)
Hnweis: Man kann A^3 berechnen.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{L}(X)$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad t > 0,$$

wobei f eine stetige Funktion ist, die nicht schneller als exponentiell wächst, d.h. es gibt Konstanten $M > 0$, $t_0 > 0$ und $a > 0$, so daß

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Dann wächst keine Lösung dieser Differentialgleichung schneller als exponentiell, es gibt also für jede Lösung u Konstanten $K > 0$ und $b > 0$, so daß

$$|u(t)| \leq Ke^{bt} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Vorgelegt sei das AWP für die partielle Integrodifferentialgleichung

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) + \displaystyle\int_a^b \exp(t^\alpha - (x-y)^2) u(y,t) dy + x t^\alpha u(x,t) = x^2 + t^\alpha, \ x \in (a,b), \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

wobei $0 \leq \alpha$ und u_0, v_0 gegeben sind. Gib eine geeignete Formulierung als AWP für eine lineare Operator-Differentialgleichung an und untersuche dieses auf Lösbarkeit. Gib eine explizite Formel für die Lösung an, wenn $\alpha = 0$ ist.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Bestimme den Propagator der DGL $u'(t) + Au(t) = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Löse nun das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

mit

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: **4 Zusatzpunkte**

Wir betrachten die DGL

$$u'(t) = (1+t)(u(t)+1).$$

Bestimme die Gebiete der (t,u)-Ebene, in denen die Lösung monoton wachsend bzw. fallend und konvex bzw. konkav ist, ohne die DGL zu lösen. Skizziere einige Lösungskurven.