Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
E. Emmrich, C. Kreusler Wintersemester 2007/08

Differentialgleichungen I

8.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 17.12. bis zum 21.12.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Löse das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeige, daß A genau dann schiefsymmetrisch ist, wenn für jede Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der DGL $u'(t) + Au(t) = 0$ die euklidische Norm $|u(t)|$ konstant ist für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Stelle für den Fall, daß A eine reelle, normalisierbare $n \times n$-Matrix ist, die Lösung des AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

mit Hilfe der Eigenwerte von A dar.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei X der Raum aller stetigen Funktionen $u \in C(\mathbb{R})$ mit $\lim_{t \to \pm\infty} u(t) = 0$, versehen mit der Supremumsnorm (vgl 4. Übungsblatt).

(i) Sei $g \in C(\mathbb{R})$ eine beschränkte, stetige Funktion. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$S(t) : X \to X, \quad u \mapsto S(t)u := e^{tg}u$$

($S(t)$ ist also der Multiplikationsoperator mit der Funktion e^{tg}). Zeige, daß $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine gleichmäßig stetige Gruppe von beschränkten Operatoren ist.

(ii) Wir betrachten nun die Operatoren

$$S(t) : X \to X, \quad u \mapsto S(t)u := u(\cdot - t)$$

($S(t)$ ist also der Rechtsshift um den Wert t). Zeige, daß $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine Gruppe von beschränkten Operatoren ist, jedoch nicht gleichmäßig stetig.

Aufgabe 5: **5 Punkte**

(i) Schreibe ein Programm, daß Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

lösen kann.
Eingabeparameter seien $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a, b, t_0 \in \mathbb{R}$, $f \in C([a, b]), u_0 \in \mathbb{R}^2$.
Als Ausgabe sollen beide Komponenten sowie die euklidische Norm der Lösung über dem Intervall $[a, b]$ geplottet werden.
Als Programmierumgebung empfiehlt sich z.B. Matlab oder alternativ Scilab/Octave etc. Es ist ausdrücklich erlaubt, eingebaute Funktionen zu benutzen.

(ii) Berechne nun die Lösung des Problems aus der 4. Aufgabe des vorigen Blattes mit dem Programm und vergleiche sie mit der dort berechneten.

(iii) Vergleiche für $[a, b] = [-10, 10]$ und $t_0 = 0$ die analytische Lösung folgender homogener Probleme mit der berechneten.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vergleiche die Lösung im letzten Fall mit der Aussage aus Aufgabe 2.