TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
E. Emmrich, C. Kreusler

Wintersemester 2007/08

Differentialgleichungen I

9.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 7.1. bis zum 11.1.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Wir wollen die (nichtlineare Fredholm-) Integralgleichung

$$u(x) = \lambda \int_a^b f(x, y, u(y))dy, \qquad x \in [a, b], \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

lösen. Es sei mit einem festen $r > 0$

$$f : \left\{(x, y, v) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x, y \in [a, b], \, |v| \leq r\right\} =: Q \to \mathbb{R}$$

stetig und

$$M := \max_Q |f(x, y, v)|.$$

Zeige: Falls $|\lambda| \leq r/(M(b-a))$ ist, so hat die Gleichung (1) mindestens eine Lösung $u \in \mathcal{C}([a, b])$ mit $\|u\|_\infty \leq r$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Beweise die folgende Form des Satzes von Arzelà- Ascoli.
Sei Z ein Banachraum und $A \subset Z$ kompakt. Sei X ein weiterer Banachraum. Zeige:
Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}(A; X)$ ist genau dann relativ kompakt in $\mathcal{C}(A; X)$, wenn sie gleichgradig stetig ist und für jedes $t \in A$ die Menge

$$\mathcal{M}(t) = \{v(t) \in X \ : \ v \in \mathcal{M}\}$$

relativ kompakt in X ist.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei H ein unendlich-dimensionaler, separabler Hilbertraum. Wir wollen zeigen, daß es eine stetige Abbildung der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B}(0, 1)$ in sich gibt, welche keinen Fixpunkt besitzt. Kakutani hat 1943 eine solche konstruiert:

Sei hierzu $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H. Jedes Element $u \in H$ läßt sich dann darstellen als eine verallgemeinerte Fourierreihe[1]

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e_n, \quad \alpha_n \in \mathbb{R}, .$$

Wir definieren eine Abbildung $S : H \to H$ durch

$$S(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e_{n+1}.$$

[1] Es gilt dann die *Parsevalsche Gleichung*: $\|u\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$.

(i) Zeige, daß S linear und beschränkt (also stetig) ist.

(ii) Wir definieren nun die Abbildung

$$T(u) := \frac{1}{2}(1 - \|u\|)e_0 + S(u), \quad u \in \overline{B}(0,1).$$

Zeige, daß T stetig ist und $\overline{B}(0,1)$ in sich abbildet und weiter, daß T keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

In der Vorlesung wurde der **Einzigkeitssatz** von Osgood angegeben. Dieser hat seinen Ursprung in der beigefügten Arbeit von Osgood aus dem Jahre 1898[2]. Formuliere den **Einzigkeitssatz** aus dieser Arbeit und skizziere den Beweis in unserer Sprache. (Wenn Begriffe benutzt werden, die nicht in der Vorlesung definiert wurden, so müssen diese erklärt werden.)

Der Artikel umfaßt 15 Seiten. Bei Bedarf kann der Artikel hier ausgedruckt werden.

William Fogg Osgood

1864-1943

Frohe Weihnachten!

[2] W. F. Osgood. *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung* $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ *ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung.* Monatsh. f. Math. 9, 331 - 345, 1898