1. Aufgabe(Reduktionsverfahren)

Wir betrachten die lineare, homogene Differentialgleichung

$$u'(t) + A(t)u(t) = 0$$

im Raum $X = \mathbb{R}^n$.
Dies ist ein n-dimensionales System. Ist nun eine Lösung bekannt, so können wir diese nutzen, um das System auf ein System (n-1)-ter Ordnung zurückzuführen.

Sei also u eine Lösung der Differentialgleichung. Wir machen nun den Ansatz

$$v(t) = \phi(t)u(t) + z(t),$$

wobei ϕ eine skalare Funktion ist und $z(t) = (0, z_2(t), \ldots, z_n(t))^T$. Wir erhalten dann

$$v' = \phi' u + \phi u' + z'$$

und eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt dies

$$z' = -Az - \phi' u.$$

Für die erste Komponente bedeutet dies

$$-\sum_{j=2}^{n} a_{1j} z_j = \phi' u_1$$

und für die weiteren Komponenten

$$z_i' = -\sum_{j=2}^{n} a_{ij} z_j - \phi' u_i,$$

$i = 2, \ldots, n$. Zusammen ergeben sich die n-1 Differentialgleichungen

$$z_i' = \sum_{j=2}^{n} \left(-a_{ij} + a_{1j} u_i / u_1\right) z_j,$$

$i = 2, \ldots, n$ (Wir haben angenommen, daß $u_1 \neq 0$ ist, gilt dies nicht, so nimmt man einfach eine andere Komponente.) Sind nun $z_2, \ldots, z_n$ Lösungen dieses Systems, so berechnen wir ϕ durch Integration aus

$$\phi' = -1/u_1 \sum_{j=2}^{n} a_{1j} z_j$$

und damit erhalten wir aus den (n-1) Lösungen $z_2, \ldots, z_n$ mit unserem Ansatz (n-1) (linear unabhängige) Lösungen $v_1, \ldots, v_{n-1}$ unseres ursprünglichen Systems.

Finde mit dieser Methode die allgemeine Lösung des Systems

$$u'(t) + \begin{pmatrix} -t^2 & 3t^2 \\ -t^2/3 & t^2 \end{pmatrix} u(t) = 0.$$

Eine Lösung ist natürlich $u(t) = (3, 1)^T$.