Tutorien in der Woche 2.1. - 6.1.06

Wir betrachten die skalare Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t))).$$

Anschaulich bedeutet $u' = f(t, u)$ ein sogenanntes *Richtungsfeld*, d.h. die Differentialgleichung ordnet jedem Punkt (t, u) eine Steigung $f(t, u)$ zu. Man zeichnet dies meist, indem man am Punkt (t, u) ein kleines Geradenstück mit Steigung $f(t, u)$ einzeichnet. Unter den *Isoklinen* versteht man die Kurven durch die Punkte gleicher Steigung, die also durch $f(t, u) = const.$ gegeben sind. Lösungskurven sind schließlich Kurven, die in jedem Punkt (t, u) die Steigung $f(t, u)$ haben, somit also Lösungen der Differentialgleichung beschreiben. Ist das zur o.a. DGl gehörende AWP für jedes t_0 und u_0 eindeutig lösbar, so geht durch jeden Punkt (t, u) genau eine Lösungskurve.

Aufgabe 1:
Skizziere das Richtungsfeld, die Isoklinen und die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$u'(t) = u(t).$$

Vergleiche die Skizzen mit den exakten Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten.

Aufgabe 2:
Skizziere das Richtungsfeld, die Isoklinen und die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$u'(t) = u(t)^2 - t.$$

Bestimme dazu Gebiete, in denen die Lösung wächst/fällt bzw. konkav/konvex ist.
Zeige, daß diese Differentialgleichung zu jedem Anfangswert genau eine Lösung besitzt. Im Fall $u(0) = 0$ ist die Lösung für positive t negativ, verläuft jedoch oberhalb der Parabel $t = u^2$.

Aufgabe 3:
Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung

$$u'(t) = e^{u(t)} \sin t.$$

und skizziere die Lösungskurven. Für welche Anfangswerte ist das entsprechende AWP lösbar?

Aufgabe 4:
Skizziere das Richtungsfeld, die Isoklinen und die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$u'(t) = t^2 + u(t)^2.$$

Zeige, daß es zu jedem Anfangswert $u(t_0) = u_0$ genau eine Lösung gibt. Ist eine solche global, d.h. auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ? Welche Aussagen kann man über das Monotonie- und das Krümmungsverhalten der Lösung u machen, die der Anfangsbedingung $u(0) = 0$ genügt? Wie verhält sich diese Lösung am Rand ihres maximalen Existenzintervalls?

Aufgabe 5:
Bestimme den Propagator der DGL $u'(t) + Au(t) = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

d.h. berechne $S(t) = e^{-At}$. Löse nun das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

mit

$$f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$