Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2017/2018

Differentialgleichungen I

10. Übungsblatt

Abgabe bis zum 12. Januar in den Tutorien.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (0, T), \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Die Funktion $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Carathéodory-Bedingung sowie eine Majorantenbedingung (es gebe also eine auf dem Intervall $[0, T]$ (L-)integrierbare Funktion $m = m(t)$ mit $|f(t, u)| \leq m(t)$ auf $[0, T] \times \mathbb{R}$).
Sei nun $l : (0, T) \to [0, \infty)$ eine nichtnegative, integrierbare Funktion und $\omega : (0, T) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\int_0^\delta 1/\omega(r)dr = \infty$ für jedes $\delta > 0$.
Zeige: Gilt nun für hinreichend kleine t und $|v - w|$

$$|f(t, v) - f(t, w)| \leq l(t)\omega(|v - w|),$$

so ist (in einer Umgebung von 0) die Lösung von (1) eindeutig bestimmt.

Bemerkung: In der Theorie der Differentialgleichungen nach Carathéodory ersetzen die Carathéodory- und eine Majorantenbedingung die Forderung der Stetigkeit der rechten Seite im Satz von Peano. Weiterhin wird im Satz von Picard-Lindelöf in der Lipschitz-Bedingung die Lipschitz-Konstante L durch eine integrierbare Funktion $l = l(t)$ ersetzt. Die Aussage in der Aufgabe ist also eine natürliche Verallgemeinerung des Satzes von Osgood.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Untersuche, ob die folgenden Anfangswertprobleme rechtsseitig (d.h. auf $[0, \infty)$) eine globale Lösung besitzen:

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), \\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

mit

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(u) := -u^2 \cos(u)^2$ und $u_0 = 3$;

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(u_1, u_2) := \sqrt{\left(1 + \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)} \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ 3u_2 - u_1 \end{pmatrix}$$

und $u_0 = (1, 0)$.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Die Funktion $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ genüge der Carathéodory-Bedingung und es gebe ein $l \in L^1(0, T)$, so dass für alle $t \in [0, T]$, $v, w \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\|f(t, 0)\| \leq l(t),$$
$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq l(t)\|v - w\|.$$

Dann gibt es für alle $(t_0, u_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ genau eine globale Lösung u auf $[0, T]$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

im Sinne von Carathéodory.