

## Differentialgleichungen I

### 14. Übungsblatt

Abgabe bis zum 9. Februar in den Tutorien.

#### Aufgabe 1:

3 Punkte

- (i) Löse das Randwertproblem für die Differentialgleichung

$$-u''(x) + 2u'(x) + 8u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

jeweils mit

- (i) homogenen DIRICHLET-Randbedingungen,
- (ii)  $u(0) = 0, u(1) = 1,$

für die rechten Seiten

- (a)  $f(x) \equiv 0,$
- (b)  $f(x) = 6(1 - 4x^2)e^{4x},$

und skizziere die Lösungen.

- (ii) Unter welchen Bedingungen ist die Aufgabe

$$-u''(x) = 0$$

mit ROBIN'schen Randbedingungen lösbar?

#### Aufgabe 2:

2 Punkte

Löse das folgende Randwertproblem:

$$\begin{cases} t^2 u''(t) - t(t+2)u'(t) + (2+t)u(t) = t^3, & t \in (1, 2) \\ u(1) = -1 \\ u(2) = -4 + 2e \end{cases}$$

**Hinweis:** Eine Lösung der homogenen Gleichung kann mit dem Ansatz  $u(t) = t^\alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$  gefunden werden.

**Aufgabe 3:****2 Punkte**

Beweise die sogenannte LAGRANGE-Identität: Sei

$$(Lu)(x) := -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x), \quad x \in (a, b),$$

$p \in \mathcal{C}^1[a, b]$ ,  $p(x) > 0$  für  $x \in (a, b)$ ,  $q \in \mathcal{C}[a, b]$ , der das STURM-LIOUVILLE-Problem beschreibende Differentialausdruck. Dann gilt für zwei Funktionen  $u, v \in \mathcal{C}^2[a, b]$

$$uLv - vLu = (p(u'v - uv'))' .$$

Gilt außerdem  $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$ , so folgt

$$(Lu, v)_2 = (u, Lv)_2 ,$$

wobei  $(\cdot, \cdot)_2$  das übliche  $L^2(a, b)$ -Skalarprodukt bezeichne.**Aufgabe 4:****3 Punkte**Bestimme die GREEN'sche  $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi$  eine Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, & u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}$$

ist. Gib die Lösung für  $f(x) = x$  an.