Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2017/2018

Differentialgleichungen I

15. Übungsblatt

Abgabe bis zum 16. Februar in den Tutorien.

Zusatzaufgabe 1: **4 Punkte**

(i) Zeige, dass für alle $f \in \mathcal{C}([0,1])$ die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t), \quad t \in (0,1), \\ u'(0) = u(1) = 0\,, \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

(ii) Zeige, dass für alle Lösungen der obigen Randwertaufgabe die Abschätzungen

$$|u'(t)| \leq t\|f\|_\infty \quad \text{und} \quad |u(t)| \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

erfüllt sind. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die übliche Supremumsnorm.

(iii) Gegeben sei eine stetige Funktion $F \in \mathcal{C}([0,1] \times \mathbb{R})$, die einer globalen Lipschitz-Bedingung bezüglich ihres zweiten Eingangs genügt

$$|F(t,u) - F(t,v)| \leq L|u-v|\,, \quad \text{für alle } t \in [0,1]\,, \quad u,v \in \mathbb{R}\,,$$

wobei $0 < L < 2$. Zeige, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(t) = F(t,u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u'(0) = u(1) = 0\,, \end{cases}$$

ein eindeutige Lösung hat.

Zusatzaufgabe 2: **3 Punkte**

Untersuche das semilineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = -e^{u(x)}, \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

auf Lösbarkeit.

Hinweis: Zeige zunächst, daß stets $u(x) \leq 0$ gilt. Reduziere dann das Randwertproblem auf ein Fixpunktproblem auf der Menge

$$\mathcal{M} := \{v \in \mathcal{C}[0,1] \, : \, v(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in [0,1]\}.$$