

Differentialgleichungen I

3. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 10. November, in den Tutorien.

Aufgabe 1:

2 Punkte

Der zweidimensionale LAPLACE-Operator mit homogenen DIRICHLET-Randbedingungen besitzt nur negative Eigenwerte. Dies soll hier mit Hilfe des Separationsansatzes nachvollzogen werden. Die Eigenwertgleichung für den LAPLACE-Operator mit homogenen DIRICHLET-Randbedingungen lautet im Zweidimensionalen

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = \lambda u, \\ u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad x \in [0, a], y \in [0, b].$$

Bestimme mit dem Separationsansatz Funktionen u der Gestalt $u(x, y) = X(x)Y(y)$, die dieses Problem lösen. Für welche Werte von λ ergeben sich nicht nur triviale Lösungen $u \equiv 0$?

Aufgabe 2:

2 Punkte

Sei X ein BANACH-Raum. Zeige, dass der Raum $\mathcal{C}^1([a, b]; X)$ der auf $[a, b]$ stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in X , versehen mit der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1([a, b]; X)} := \max_{t \in [a, b]} (\|u(t)\| + \|u'(t)\|),$$

ein BANACH-Raum ist.

Aufgabe 3:

2 Punkte

Für $u \in \mathcal{C}([a, b]; X)$ sei (u_n) die in der Vorlesung definierte Folge von Treppenfunktionen, also für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$u_n(t) := u(t_{k-1}^{(n)}) \quad \text{für } t \in [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}), \quad k = 1, 2, \dots, 2^n, \\ u_n(b) := u(t_{2^n-1}^{(n)}),$$

wobei $t_k^{(n)} = a + k \frac{b-a}{2^n}$ ist.

Zeige, dass (u_n) gleichmäßig gegen u konvergiert.

Aufgabe 4:**3 Punkte**

Für $u \in \mathcal{C}([a, b]; X)$ wird mit Hilfe der Folge (u_n) aus Aufgabe 3 das Integral über u definiert durch

$$\int_a^b u(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} u(t_{k-1}^{(n)}) (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}).$$

Zeige, dass diese Definition unabhängig ist von der gewählten Zerlegungsfolge, dass also jede andere Zerlegungsfolge als jene aus Aufgabe 3 zum selben Integral führt.

Hinweis: Der Bereich des Indexes k hängt von der gewählten Zerlegung ab.

Aufgabe 5:**3 Punkte**

Gib mindestens drei Literaturquellen an, in denen der folgende Satz von MAZUR bewiesen wird und formuliere einen Beweis in eigenen Worten. Der Satz von MAZUR lautet:

Sei X ein BANACH-Raum und $A \subset X$ eine relativ kompakte Menge. Dann ist auch die konvexe Hülle $\text{co}(A)$ von A relativ kompakt.