Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2017/18

Differentialgleichungen I

4. Übungsblatt

Abgabe, bis zum 17. November, in den Tutorien

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum und $f : \mathbb{R} \times X \to X$ stetig.
Zeige:

(i) Sei f im zweiten Argument *linear beschränkt*, es gebe also Funktionen $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_0^+) \cap L^1(\mathbb{R})$, so dass für beliebige $(t, v) \in \mathbb{R} \times X$ gilt

$$\|f(t, v)\| \leq \alpha(t) + \beta(t)\|v\|.$$

Dann ist jede Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0 \in X, & t_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

beschränkt.

(ii) Genügt f zusätzlich einer lokalen Lipschitz-Bedingung auf X, so ist das Anfangswertproblem (1) eindeutig lösbar.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Ist X ein unendlichdimensionaler Banach-Raum, $u_0 \in X$ und $r > 0$, so ist die Kugel

$$\overline{B}(u_0, r) = \{v \in X \mid \|v - u_0\| \leq r\}$$

nach dem Rieszschen Kompaktheitssatz nicht kompakt. Daher muss das Bild einer auf $\overline{B}(u_0, r)$ definierten stetigen Funktion nicht beschränkt sein.
Als Beispiel hierzu betrachten wir den Raum $X = l^2$ der quadratisch summierbaren Folgen $u = (u_1, u_2, \ldots)$ mit

$$\|u\|_{l^2} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

und die auf der Einheitskugel $\overline{B}(0, 1) \subset l^2$ durch

$$f(u) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1 + 3^{-k} - u_k}, 0, 0, \ldots \right)$$

definierte Abbildung f.
Zeige, dass f wohldefiniert ist, nach l^2 abbildet und stetig ist und dass das Bild von f unbeschränkt ist.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Es sei f wie in Aufgabe 2 definiert. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u_1(0) = 2,\ u_2(0) = \frac{19}{9},\ u_k(0) = 3^{-k} \text{ für } k \geq 3 \end{cases}$$

auf einem geeigneten Zeitintervall I. Liegt diese Lösung in $\mathcal{C}^1(I; l^2)$?

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Bestimme die Funktionenfolge $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ der Picard-Iterierten für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = 2t - 2\sqrt{u(t)}, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Zeige, dass keine Teilfolge von $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ gegen eine Lösung des AWPs konvergiert.