Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2017/18

Differentialgleichungen I

5. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 24. November, in den Tutorien.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Es seien $X = \mathbb{R}^d$ und $A, B : X \to X$ lineare Abbildungen (unabhängig von t). Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Kommutieren A und B, so gilt $e^A\, e^B = e^{A+B} = e^B\, e^A$ und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. Ist zusätzlich B invertierbar, so gilt auch $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$.

(ii) Es gilt[1]

$$\lim_{n\to\infty}(I + \frac{1}{n}B)^n = e^B = \lim_{n\to\infty}(I - \frac{1}{n}B)^{-n}.$$

(iii) Es gilt

$$Bv = \lim_{t\searrow 0} \frac{e^{tB}v - v}{t}$$

für beliebige $v \in X$.

(iv) Sei A invariant auf dem Unterraum $E \subset \mathbb{R}^d$, das heißt für alle $v \in E$ ist auch $Av \in E$. Sei weiter u eine Lösung des AWPs

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0 \in E, \end{cases} \tag{1}$$

für beliebige $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $u(t) \in E$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(v) Sei A nilpotent. Was kann dann über die Lösungen des AWP (1) ausgesagt werden?

(vi) Es habe A einen Eigenwert mit positivem Realteil. Dann gibt es mindestens eine nichttriviale Lösung u der Differentialgleichung $u'(t) + Au(t) = 0$, für die

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$$

gilt.

[1] Hinweis: Binomische Formel und Bernoulli'sche Ungleichung.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Es sei $X = C_0(\mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ mit

$$\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = 0,$$

versehen mit der Supremumnorm

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|.$$

(i) Sei $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ eine beschränkte, stetige Funktion. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$S(t)\colon X \to X, \quad u \mapsto S(t)u := \exp(tg)u, \text{ d. h. } (S(t)u)(x) = e^{tg(x)}u(x)$$

($S(t)$ ist also der Multiplikationsoperator mit der Funktion $\exp(tg)$). Zeige, dass $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine gleichmäßig stetige Gruppe von beschränkten Operatoren ist.

(ii) Wir betrachten nun die Operatoren

$$S(t)\colon X \to X, \quad u \mapsto S(t)u := u(\cdot - t)$$

($S(t)$ ist also der Rechtsshift um den Wert t). Zeige, dass $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine Gruppe von beschränkten Operatoren, jedoch nicht gleichmäßig stetig ist.

Bemerkung: Eine Gruppe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\|S(t) - id\|_{L(X)} \to 0 \quad \text{für } t \to 0.$$

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Das *MSC (2000)* (Mathematics Subject Classification) ist ein System zur Klassifizierung der mathematischen Fachgebiete, wobei jedem Gebiet eine Kombination aus fünf Ziffern und Buchstaben zugeordnet wird. Anhand dieses Codes kann recht leicht herausgefunden werden, in welche Gebiete ein Artikel oder ein Buch einzuordnen ist. Bei einem Artikel ist die MSC-Angabe meist am Anfang, nach der Zusammenfassung, im Buch auf einer der ersten Seiten.

Welchen *MSC (2000)*-Code haben die folgenden mathematischen Themenbereiche?

(i) Theorie der Wellengleichung

(ii) Nichtlineare Randwertprobleme

(iii) Theorie der Banach-Räume stetiger Funktionen

(iv) gewöhnliche Differentialgleichungen in Banach-Räumen