Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2017/2018

Differentialgleichungen I

6 . Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 1. Dezember, in den Tutorien.

Aufgabe 1: **1 Punkt**

Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{L}(X)$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad t > 0,$$

wobei f eine stetige Funktion ist, die nicht schneller als exponentiell wächst, d.h. es gibt Konstanten $M > 0$, $t_0 > 0$ und $a > 0$, so dass

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Dann wächst keine Lösung dieser Differentialgleichung schneller als exponentiell, es gibt also für jede Lösung u Konstanten $K > 0$ und $b > 0$, so daß

$$|u(t)| \leq Ke^{bt} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

in $X = \mathcal{C}([a, b])$ mit $(Av)(x) := \int_0^1 (\xi - x)v(\xi)d\xi$ für $v \in X$.
Zeige, dass der zugehörige Lösungsoperator durch

$$S(t) = \exp(-tA) = id - \sqrt{12}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A + 12\left(1 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)\right)A^2$$

gegeben ist, id bezeichnet die Identität in X.

Hinweis: Man kann A^3 berechnen.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Betrachte zu gegebenem $(t_0, u_0) \in [0,T] \times X$ die lineare Aufgabe

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in [0,T], \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

mit $X = \ell^1$ und einer unendlichen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,\infty}$. Die Abbildung $v \mapsto Av$ ist nichts anderes als die übliche Matrix-mal-Vektor-Multiplikation.

(i) Welche Bedingung muss an A gestellt werden, damit A wieder in ℓ^1 abbildet und mithin die Aufgabe lösbar ist? Gib ein Beispiel für ein entsprechendes A an.

(ii) Es gelte $\sup_{i=1,\dots,\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$. Untersuche das Anfangswertproblem auf Lösbarkeit im Raum

$$X = \ell^\infty := \{v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty} \mid \sup_{i=1,\dots,\infty} |v_i| < \infty\}.$$

(iii) Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Räumen ℓ^1 und ℓ^∞? Sei A eine lineare beschränkte Abbildung von ℓ^1 nach ℓ^∞. Gibt es zu jedem $u_0 \in \ell^1$ eine Lösung mit Werten in ℓ^∞?

Hinweis: Falls so eine Abbildung A existiert, für die die letzte Frage verneint werden muss, darf sie weder die Bedingung aus (i) noch die aus (ii) erfüllen.