

Differentialgleichungen I

9. Übungsblatt

Abgabe bis zum 22. Dezember in den Tutorien.

Aufgabe 1:

2 Punkte

Zeige, dass eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann absolut stetig ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede endliche Menge von paarweise disjunkten Intervallen $(a_i, b_i) \subset [a, b]$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ folgt

$$\left| \sum_{i=1}^n f(b_i) - f(a_i) \right| < \varepsilon.$$

Aufgabe 2:

2 Punkte

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absolut stetig. Man definiere die Totalvariationsfunktion von f durch

$$F(x) = \sup \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \quad x \in [a, b]$$

wobei

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = x,$$

und das Supremum über alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Wahlen von $\{t_i\}$ erstreckt wird. Zeige, dass die Funktionen F , $F + f$, $F - f$ absolut stetig sind auf $[a, b]$.

Aufgabe 3:

2 Punkte

Beweise die folgenden Aussagen über absolut stetige Funktionen:

- (i) Es sei $f : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ eine absolut stetige Funktion. Sei $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ eine LIPSCHITZ-stetige Funktion. Dann ist die Funktion $g \circ f$ wieder absolut stetig.
- (ii) Sei f eine absolut stetige Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert und streng monoton wachsend ist. Ist dann g auf $[f(a), f(b)]$ absolut stetig, so ist auch $g \circ f$ auf $[a, b]$ absolut stetig.

Aufgabe 4:

4 Punkte

In der Vorlesung wurde der **Einzigkeitssatz** von OSGOOD angegeben. Dieser hat seinen Ursprung in der beigefügten Arbeit von OSGOOD aus dem Jahre 1898¹. Formuliere den **Einzigkeitssatz** aus dieser Arbeit und skizziere den Beweis in unserer Sprache. (Wenn Begriffe benutzt werden, die nicht in der Vorlesung definiert wurden, so müssen diese erklärt werden.)



WILLIAM FOGG OSGOOD
1864 - 1943

¹W.F. OSGOOD. *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ohne Hinzunahme der CAUCHY-LIPSCHITZ'schen Bedingung.* Monatsh. f. Math. 9, 331 - 345, 1898