Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichung I
1. Tutorium

Aufgabe 1
Löse das Problem, wo möglich, mit der Charakteristikenmethode

$$\begin{cases} u_t(x,t) + 2u_x(x,t) = u(x,t) + t, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 2
Löse die Wärmeleitungsgleichung mit periodischen Randwertbedingungen (z.B. Wärmeverteilung in einem Ring):

$$\begin{cases} u_t - \mu u_{xx} = 0, & x \in (-l,l),\ t > 0 \\ u(l,t) = u(-l,t), & t > 0 \\ u_x(l,t) = u_x(-l,t), & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (-l,l). \end{cases}$$

Aufgabe 3
Wir betrachten das Cauchyproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = H(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei H die Heavisidefunktion ist, mit

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

1. Zeige, dass
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds$$
für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ die Differentialgleichung löst.

2. Zeige, dass $u(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ für alle $t > 0$ ist (Glättungseigenschaft).

3. Zeige, dass $u(0,t) = \frac{1}{2}$ für alle $t > 0$ gilt.

4. Sei $x \neq 0$ fest. Zeige $\lim_{t \searrow 0} u(x,t) = H(x)$.

Hinweis: Es darf $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$ benutzt werden.

Aufgabe 4
Zeige (durch einsetzen), dass für stetige Koeffizienten a und b eine Lösung der Differentialgleichung

$$u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$$

durch

$$u(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau\right) b(s)ds$$

mit beliebigem t_0 gegeben ist.