Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Hans-Christian Kreusler

13. Februar 2018

Inhaltsverzeichnis und Prüfungsthemen zur Vorlesung

Differentialgleichungen I

im Wintersemester 2017/2018

Inhaltsverzeichnis

4. Klassische Lösbarkeit von Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

    4.1. Grundbegriffe und elementare Aussagen
    4.2. Randwertprobleme für homogene, lineare Differentialgleichungen
    4.3. Greensche Funktion und semilineare Probleme I
    4.4. Greensche Funktion und inhomogene, lineare Probleme
    4.5. Maximumprinzip und Stabilität
    4.6. Greensche Funktion und semilineare Probleme II

Prüfungsthemen

0. Einführung: Anwendungsbeispiele und Typen von Differentialgleichungen

   Anwendungsgebiete; verschiedene Typen von Differentialgleichungsproblemen; linear, nichtlinear (semilinear, quasilinear); verschiedene Typen von Anfangs- und Randbedingungen; die großen Fragen in der Theorie der Differentialgleichungen

1. Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

   Superpositionsprinzip, Fundamentalsystem, Wronski-Determinante, Variation der Konstanten, Trennung der Veränderlichen, Ansatz vom Typ der rechten Seite und andere Lösungsmethoden für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen; elliptische, hyperbolische, parabolische Gleichungen; Separations- bzw. Produktansatz; Charakteristikenverfahren

2. Existenz und Einzigkeit bei Anfangswertproblemen für gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen

   Integral für stetige Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum, insbesondere Konstruktion und Eigenschaften; Nemyzki-Operator und dessen Eigenschaften; Rieszscher Kompaktheitssatz (ohne Beweis); Banachscher Fixpunktsatz (mit Beweis);
   lokale und globale Lösbarkeit nach Picard-Lindelöf (im beliebigen Banach-Raum, mit Beweis); lineare Systeme mit (zeitabhängigem) beschränktem Operator, insbesondere Konstruktion und Eigenschaften des Propagators (Evolutionsoperators) und im autonomen Fall der einparametrigen Gruppe, Prinzip von Duhamel, endlichdimensionale Systeme (mit Beweisen);
   (lineare und nichtlineare) kompakte Operatoren; Brouwerscher Fixpunktsatz (ohne Beweis); Approximationssatz (mit Beweis); Schauderscher Fixpunktsatz (mit Beweis); Satz von Arzelà-Ascoli und dessen Verallgemeinerung (ohne Beweis); lokale Lösbarkeit nach Peano (in $\mathbb{R}^d$ und Verallgemeinerung auf beliebigen Banach-Raum bei kompakter rechter Seite, mit Beweis);
   Einzigkeitsaussagen, insbesondere lokale und einseitige Lipschitz-Bedingung (mit Beweis) sowie Nagumo- und Osgood-Bedingung (mit Beweisideen);
   maximal fortgesetzte Lösungen und Verlauf der Lösungen im Großen bzw. Randverhalten (mit Beweisideen);
   Lösbarkeit im Sinne von Carathéodory (mit Beweis)

3. Abhängigkeit der Lösungen von den Daten, Stabilität, Zeitdiskretisierung

   Lemma von Gronwall (mit Beweis); A-priori-Abschätzungen und stetige Abhängigkeit von der Anfangsbedingung und der rechten Seite (mit Beweis); Aussagen für dissipative Systeme (mit Beweis);
   einfache Zeitdiskretisierung, insbesondere Abschätzungen für diskrete Lösung und Fehler des expliziten und impliziten Euler-Verfahrens (im beliebigen Banach-Raum, mit Beweis) sowie Aussage über dissipative Systeme (mit Beweis);
   Gleichgewichtspunkte, stabil, attraktiv, asymptotisch stabil, exponentiell stabil; Stabilität linearer Systeme, Satz von Ljapunov und Satz über linearisierte Stabilität, Ljapunov-Funktionen (jeweils nur Beweisidee)

4. Klassische Lösbarkeit von Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

   Lösbarkeit der linearen homogenen Aufgabe (mit Beweis), einschließlich Transformation in symmetrisches Problem; Lösbarkeit der linearen inhomogenen Aufgabe;
   Lösbarkeit der semilinearen Aufgabe (rechte Seite sowohl $f(\cdot, u)$ als auch $f(\cdot, u, u')$, mit Beweis über Greensche Funktion und Banachschem Fixpunktsatz); Satz von Scorza Dragoni (mit Beweis über Schauderschen Fixpunktsatz);
   Maximumprinzip (mit Beweis) und stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten (mit Beweis);
   Fredholmsche Alternative