TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2018/19

Differentialgleichungen I

11. Übungsblatt

Abgabe bis zum 23. Januar, 12:10 Uhr, vor der großen Übung.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

In der Vorlesung wurde das Lemma von GRONWALL in der folgenden Form bewiesen:

> Sei $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, $t_0 \in [0,T)$, $a, b \in L^\infty(t_0,T)$ und $\lambda \in L^1(t_0,T)$, $\lambda(t) \geq 0$ für fast alle $t \in (t_0,T)$. Dann folgt aus
>
> $$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(s)a(s)ds \qquad \text{f. ü. in } (t_0,T)$$
>
> für fast alle $t \in (t_0,T)$
>
> $$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)ds\,,$$
>
> wobei $\Lambda(t) := \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau$.

(i) Konstruiere ein Gegenbeispiel zu der Aussage des GRONWALL'schen Lemmas für den Fall, dass λ negativ ist.

(ii) Zeige eine entsprechende Aussage für den Fall, dass $t < t_0$ ist.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Betrachte die folgende Version des Satzes von PICARD-LINDELÖF aus der Vorlesung:

> Sei X ein BANACH-Raum. Die Funktion $f : [0,T] \times X \to X$ sei stetig und im zweiten Argument LIPSCHITZ-stetig, so dass es ein $L > 0$ gibt, so dass für alle $t \in [0,T]$ und alle $v, w \in X$
>
> $$\|f(t,v) - f(t,w)\| \leq L\|v - w\|$$
>
> gilt. Dann besitzt das Anfangswertproblem
>
> $$u'(t) = f(t,u(t)), \quad t \in [0,T], u(t_0) = u_0 \tag{1}$$
>
> für $(t_0,u_0) \in [0,T] \times X$ auf dem gesamten Zeitintervall genau eine Lösung $u \in \mathcal{C}^1([0,T];X)$.

In dieser Aufgabe soll es um die Stabilitätseigenschaften eines solchen Problems gehen. Zeige die folgenden Behauptungen.

(i) Unter den Voraussetzungen des zitierten Satzes sei u die globale Lösung von (1) zum Anfangswert $u_0 \in X$. Dann gibt es auch eine globale Lösung v zum beliebigen Anfangswert $v_0 \in X$ und es gilt für alle $t \in [0, T]$

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|t-t_0|}\|u_0 - v_0\| \leq e^{LT}\|u_0 - v_0\|.$$

(ii) Seien für die rechten Seiten $f, g : [0, T] \times X \to X$ die Voraussetzungen des zitierten Satzes mit den Konstanten L_f und L_g erfüllt. Dann gibt es globale Lösungen u, v von (1) zu der selben Anfangsbedingung $u_0 \in X$ und es gilt für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}\|u(t) - v(t)\| &\leq |t - t_0|e^{\min\{L_f, L_g\}|t-t_0|} \sup_{t\in[0,T], w\in X} \|f(t, w) - g(t, w)\| \\ &\leq Te^{\min\{L_f, L_g\}T} \sup_{t\in[0,T], w\in X} \|f(t, w) - g(t, w)\|.\end{aligned}$$

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Betrachte $\ell^\infty = \left\{v = (v_n)_{n=1}^\infty \middle| \|v\|_{\ell^\infty} := \sup_n |v_n| < \infty\right\}$. Sei weiter $p \in (0, 1)$ und die Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ rekursiv definiert durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := pa_n + 1$. Betrachte die Abbildung $F : \ell^\infty \to \ell^\infty$, gegeben durch

$$(F(v))_1 = 0\,, \quad (F(v))_{n+1} := a_n|v_n|^p\,.$$

(i) Zeige, dass F stetig ist.

(ii) Zeige, dass für $u_0 \in \ell^\infty$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = F(u(t)), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

eindeutig ist.

(iii) Berechne die Lösung des Anfangswertproblems (2) zu dem Anfangswert $u_0 \in \ell^\infty$ mit $(u_0)_1 = \alpha$ und $(u_0)_n = 0$ für alle $n > 1$.

(iv) Zeige, dass Lösungen der Anfangswertprobleme (2) nicht stetig von den Anfangswerten abhängen.