TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2018/19

Differentialgleichungen I

12. Übungsblatt

Abgabe bis zum 30. Januar, 12:10 Uhr, vor der großen Übung.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Sei $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ ein HILBERT-Raum und $A \in \mathcal{L}(H)$ ein akkretiver Operator, d. h., $-A$ sei dissipativ. Zeige, dass der Operator $R_\lambda := (I+\lambda A)^{-1}$ (wobei $I : H \to H$ die identische Abbildung ist) für jedes $\lambda \geq 0$ als linearer und beschränkter Operator in H existiert und *nichtexpansiv* ist, d. h., für alle $u, v \in H$ gilt

$$\|R_\lambda u - R_\lambda v\| \leq \|u - v\|.$$

Hinweis: Für $\lambda \neq 0$ betrachte zur Lösung von $(I+\lambda A)u = f$ die Rekursionsvorschrift

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (I + \lambda A)u^n = f$$

für ein beliebiges $u^0 \in H$ und $\tau > 0$ geeignet gewählt.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Für eine äquidistante Zerlegung des Zeitintervalls $[0, T]$ in N Teilintervalle der Länge $\triangle t = T/N$ betrachte man das folgende Schema:

$$u^{n+1} = u^n + \triangle t f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

mit u^0 gegeben, $t_{n+\frac{1}{2}} := \frac{t_n + t_{n+1}}{2}$ und $u^{n+\frac{1}{2}} := \frac{u^n + u^{n+1}}{2}$, zur Approximation der Lösung $u(t_n) \approx u^n$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in (0, T), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Die Funktion $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ genüge einer LIPSCHITZ-Bedingung

$$\exists L > 0 : ||f(s, v) - f(t, w)|| \leq L(|s - t| + ||v - w||) \quad \forall s, t \in [0, T], \forall v, w \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

Zeige, dass das Verfahren wohldefiniert ist für $\Delta t < \frac{2}{L}$, $\{u^n\}$ sowie $\left\{\frac{u^{n+1} - u^n}{\triangle t}\right\}$ A-priori-Abschätzungen erfüllen und sich der Fehler wie $(\triangle t)^2$ verhält, falls u''' existiert und geeignet integrierbar ist.

Hinweis: Für die Lösung ist u.a. zu zeigen, dass

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{\triangle t} = \rho^n := \frac{1}{2\triangle t}\left(\int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (t - t_n)^2 u'''(t)dt + \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^2 u'''(t)dt\right)$$
$$+ f(t_{n+\frac{1}{2}}, u(t_{n+\frac{1}{2}})) - f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}})$$

gilt.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Wir betrachten das explizite EULER-Verfahren und wollen dessen gleichmäßige Konvergenz gegen die eindeutige Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems (1) in $\mathbb{R}^d$ zeigen. Betrachte die Familie von äquidistanten Zerlegungen $\{t_n^N\}$ des Zeitintervalls $[0,T]$ mit den Schrittweiten $\Delta t^N := T/N$, wobei

$$t_n^N := n\Delta t^N, \quad \forall n \in \{0,\dots,N\}, \quad N \in \mathbb{N}\,.$$

Die Funktion $f : [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ genüge der LIPSCHITZ-Bedingung (2). Die Stützstellen des expliziten EULER-Verfahrens werden folgendermaßen berechnet:

$$u_{n+1}^N := u_n^N + \Delta t^N f(t_n^N, u_n^N), \quad \forall n \in \{0,\dots,N-1\}, N \in \mathbb{N}\,.$$

mit $u_0^N := u_0$.

(i) Betrachte die lineare Prolongation der Stützstellen $\{u_n^N\}$ für $N \in \mathbb{N}$:

$$u_N(t) = \begin{cases} u_n^N + \frac{t-t_n^N}{\Delta t^N}(u_{n+1}^N - u_n^N), & t \in (t_n^N, t_{n+1}^N],\ \forall n \in \{0,\dots,N-1\}, \\ u_0, & t = 0\,. \end{cases}$$

Zeige, dass eine Teilfolge von u_N existiert, die gleichmäßig gegen einen Grenzwert $v \in \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$ konvergiert.

(ii) Gegeben sei die folgende Familie von zeitlich stückweise konstanten Funktionen $f_N : [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $N \in \mathbb{N}$ mit

$$f_N(t,v) := \begin{cases} f(t_n^N, v), & t \in (t_n^N, t_{n+1}^N],\ \forall n \in \{0,\dots,N-1\}, \\ f(0,v), & t = 0\,. \end{cases}$$

Wähle nun eine zweite, stückweise konstante Prolongation $\tilde{u}_N : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ der Stützstellen $\{u_n^N\}$ so, dass die Gleichung

$$u_N(t) = u_0 + \int_0^t f_N(s, \tilde{u}_N(s))ds$$

für alle $t \in [0,T]$ erfüllt ist. Zeige

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} ||u_N(t) - \tilde{u}_N(t)|| = 0\,.$$

(iii) Zeige mit (i) und (ii), dass v die eindeutige Lösung der zum Problem (1) assoziierten Integralgleichung ist. Konvergiert die gesamte Folge von Funktionen $\{u_N\}$ gegen v?