Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2018/2019

Differentialgleichungen I

13. Übungsblatt

Abgabe ist am 6. Februar, 12:10 Uhr, vor der großen Übung.

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Gegeben sei eine skalare autonome Differentialgleichung

$$u'(t) = \gamma u(t)^n, \quad t \geq 0,$$

mit $\gamma \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Untersuche, ob die Nulllösung stabil (asymptotisch / exponentiell) bzw. attraktiv ist.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Sei X ein Banach-Raum und genüge $f : X \to X$ einer globalen Lipschitz-Bedingung. Zeige, dass für das zugehörige System $u' = f(u)$ aus der exponentiellen die asymptotische Stabilität folgt.
Zeige außerdem, für $X = \mathbb{R}$ folgt schon aus der Attraktivität die Stabilität.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Bestimme alle Gleichgewichtspunkte der folgenden Systeme und untersuche deren Stabilität mit Hilfe des Satzes zur linearisierten Stabilität.

(i)

$$\begin{aligned} u'(t) &= 5u(t) - u(t)^2 - u(t)w(t) \\ w'(t) &= -2w(t) + u(t)w(t) \end{aligned}$$

(ii) Aus der Vorlesung ist das SIR-Modell zur Beschreibung von Krankheitsausbreitungen bekannt.

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\alpha S(t)I(t) \\ I'(t) &= \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ R'(t) &= \beta I(t) \end{aligned}$$

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Betrachte die folgende Funktion für $\alpha \neq 0$

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_\alpha(x, y) := \begin{pmatrix} xy \\ \alpha(x-1)^3(y-1)^3 \end{pmatrix}$$

und die dazugehörige Differentialgleichung $u' = f_\alpha(u)$.
Untersuche die stationären Punkte auf Stabilität in Abhängigkeit von α.

Hinweis: Zeige hierfür, dass

$$V_\alpha(x,y) := \alpha \int_1^x \frac{(\tau-1)^3}{\tau} d\tau + \int_0^y \frac{\tau}{(1-\tau)^3} d\tau\,.$$

die zugehörige Ljapunov-Funktion ist.