Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2018/2019

Differentialgleichungen I

14. Übungsblatt

Abgabe ist am 13. Februar, 12:10 Uhr, vor der großen Übung.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

(i) Löse das Randwertproblem für die Differentialgleichung

$$-u''(x) + 2u'(x) + 8u(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

jeweils mit

(i) homogenen Dirichlet-Randbedingungen,
(ii) $u(0) = 0,\ u(1) = 1$,

für die rechten Seiten

(a) $f(x) \equiv 0$,
(b) $f(x) = 6(1 - 4x^2)e^{4x}$,

und skizziere die Lösungen.

(ii) Unter welchen Bedingungen ist die Aufgabe

$$-u''(x) = 0$$

mit Robin'schen Randbedingungen lösbar?

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Löse das folgende Randwertproblem:

$$\begin{cases} t^2u''(t) - t(t+2)u'(t) + (2+t)u(t) = t^3, \quad t \in (1,2) \\ u(1) = -1 \\ u(2) = -4 + 2e \end{cases}$$

Hinweis: Eine Lösung der homogenen Gleichung kann mit dem Ansatz $u(t) = t^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ gefunden werden.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Beweise die sogenannte LAGRANGE-Identität: Sei

$$(Lu)(x) := -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x), \quad x \in (a, b),$$

$p \in \mathcal{C}^1[a, b]$, $p(x) > 0$ für $x \in (a, b)$, $q \in \mathcal{C}[a, b]$, der das STURM-LIOUVILLE-Problem beschreibende Differentialausdruck. Dann gilt für zwei Funktionen $u, v \in \mathcal{C}^2[a, b]$

$$uLv - vLu = (p(u'v - uv'))' \ .$$

Gilt außerdem $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$, so folgt

$$(Lu, v)_2 = (u, Lv)_2 \ ,$$

wobei $(\cdot, \cdot)_2$ das übliche $L^2(a, b)$-Skalarprodukt bezeichne.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Bestimme die GREEN'sche Funktion $G : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$, sodass $u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi$ eine Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, & u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}$$

ist. Gib die Lösung für $f(x) = x$ an.