Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2018/2019

Differentialgleichungen I

3. Übungsblatt

Abgabe bis 14. November, 12:10 Uhr, vor der großen Übung.

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Der zweidimensionale Laplace-Operator mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen besitzt nur negative Eigenwerte. Dies soll hier mit Hilfe des Separationsansatzes nachvollzogen werden. Die Eigenwertgleichung für den Laplace-Operator mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen lautet im Zweidimensionalen

$$\begin{aligned} \Delta u &:= u_{xx} + u_{yy} = \lambda u\,, \\ u(x,0) &= u(x,b) = u(0,y) = u(a,y) = 0, \quad x \in [0,a],\ y \in [0,b]. \end{aligned}$$

Bestimme mit dem Separationsansatz Funktionen u der Gestalt $u(x,y) = X(x)Y(y)$, die dieses Problem lösen. Für welche Werte von λ ergeben sich nicht nur triviale Lösungen $u \equiv 0$?

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Sei X ein Banach-Raum. Zeige, dass der Raum $\mathcal{C}^1([a,b];X)$ der auf $[a,b]$ stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in X, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1([a,b];X)} := \max_{t\in[a,b]} (\|u(t)\| + \|u'(t)\|),$$

ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Für $u \in \mathcal{C}([a,b];X)$ sei (u_n) die in der Vorlesung definierte Folge von Treppenfunktionen, also für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} u_n(t) &:= u(t_{k-1}^{(n)}) \quad \text{für } t \in [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}),\ k = 1, 2, \ldots, 2^n, \\ u_n(b) &:= u(t_{2^n-1}^{(n)}), \end{aligned}$$

wobei $t_k^{(n)} = a + k\frac{b-a}{2^n}$ ist.
Zeige, dass (u_n) gleichmäßig gegen u konvergiert.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Für $u \in \mathcal{C}([a,b];X)$ wird mit Hilfe der Folge (u_n) aus Aufgabe 3 das Integral über u definiert durch

$$\int_a^b u(t)dt := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} u(t_{k-1}^{(n)})(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}).$$

Zeige, dass diese Definition unabhängig ist von der gewählten Zerlegungsfolge, dass also jede andere Zerlegungsfolge als jene aus Aufgabe 3 zum selben Integral führt.
Hinweis: Der Bereich des Indexes k hängt von der gewählten Zerlegung ab.

Aufgabe 5: **3 Punkte**

Gib mindestens drei Literaturquellen an, in denen der folgende Satz von Mazur bewiesen wird und formuliere einen Beweis in eigenen Worten. Der Satz von Mazur lautet:

> *Sei X ein* Banach*-Raum und $A \subset X$ eine relativ kompakte Menge. Dann ist auch die konvexe Hülle* $\mathrm{co}(A)$ *von A relativ kompakt.*