

## Differentialgleichungen I

### 4. Übungsblatt

Abgabe bis zum 21. November, 12:10 Uhr, vor der großen Übung.

#### Aufgabe 1:

**3 Punkte**

Ist  $X$  ein unendlichdimensionaler BANACH-Raum,  $u_0 \in X$  und  $r > 0$ , so ist die Kugel

$$\bar{B}(u_0, r) = \{v \in X \mid \|v - u_0\| \leq r\}$$

nach dem RIESZschen Kompaktheitssatz nicht kompakt. Daher muss das Bild einer auf  $\bar{B}(u_0, r)$  definierten stetigen Funktion nicht beschränkt sein.

Als Beispiel hierzu betrachten wir den Raum  $X = l^2$  der quadratisch summierbaren Folgen  $u = (u_1, u_2, \dots)$  mit

$$\|u\|_{l^2} := \left( \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

und die auf einer Teilmenge  $M \subset l^2$  durch

$$f(u) := \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1 + 3^{-k} - u_k}, 0, 0, \dots \right)$$

wohldefinierte Abbildung  $f : M \rightarrow l^2$ , es sei also  $M := \{u \in l^2 : f(u) \in l^2\}$

Zeige, dass  $f$  eingeschränkt auf die Einheitskugel  $\bar{B}(0, 1)$  wohldefiniert, d.h.  $\bar{B}(0, 1) \subset M$  gilt, und stetig ist sowie das Bild von  $\bar{B}(0, 1)$  unter  $f$  unbeschränkt in  $l^2$  ist.

#### Aufgabe 2:

**2 Punkte**

Es sei  $f$  wie in Aufgabe 1 definiert. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u_1(0) = 2, u_2(0) = \frac{19}{9}, u_k(0) = 3^{-k} \text{ für } k \geq 3 \end{cases}$$

auf einem geeigneten Zeitintervall  $I$ . Liegt diese Lösung in  $C^1(I; l^2)$ ?

#### Aufgabe 3:

**1 Punkt**

Bestimme die Funktionenfolge  $(u_n)_n \in \mathbb{N}$  der PICARD-Iterierten für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = 2t - 2\sqrt{u(t)}, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Zeige, dass keine Teilfolge von  $(u_n)_n \in \mathbb{N}$  gegen eine Lösung des AWP konvergiert.

**Aufgabe 4:****3 Punkte**

Das *MSC (2000)* (Mathematics Subject Classification) ist ein System zur Klassifizierung der mathematischen Fachgebiete, wobei jedem Gebiet eine Kombination aus fünf Ziffern und Buchstaben zugeordnet wird. Anhand dieses Codes kann recht leicht herausgefunden werden, in welche Gebiete ein Artikel oder ein Buch einzuordnen ist. Bei einem Artikel ist die MSC-Angabe meist am Anfang, nach der Zusammenfassung, im Buch auf einer der ersten Seiten.

Welchen *MSC (2000)*-Code haben die folgenden mathematischen Themenbereiche?

- (i) Theorie der Wellengleichung
- (ii) Nichtlineare Randwertprobleme
- (iii) Theorie der BANACH-Räume stetiger Funktionen
- (iv) gewöhnliche Differentialgleichungen in BANACH-Räumen