Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2018/2019

Differentialgleichungen I

5. Übungsblatt

Abgabe bis zum 28. November, 12:10 Uhr, vor der großen Übung.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum und $f : \mathbb{R} \times X \to X$ stetig.
Zeige:

(i) Sei f im zweiten Argument *linear beschränkt*, es gebe also Funktionen $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_0^+) \cap L^1(\mathbb{R})$, so dass für beliebige $(t, v) \in \mathbb{R} \times X$gilt

$$\|f(t, v)\| \leq \alpha(t) + \beta(t)\|v\|.$$

Dann ist jede Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0 \in X, & t_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

beschränkt.

(ii) Genügt f zusätzlich einer lokalen Lipschitz-Bedingung auf X, so ist das Anfangswertproblem (1) eindeutig lösbar.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es seien $X = \mathbb{R}^d$ und $A, B : X \to X$ lineare Abbildungen (unabhängig von t). Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Kommutieren A und B, so gilt $e^A \, e^B = e^{A+B} = e^B \, e^A$ und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. Ist zusätzlich B invertierbar, so gilt auch $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$.

(ii) Es gilt[1]

$$\lim_{n\to\infty} (I + \frac{1}{n}B)^n = e^B = \lim_{n\to\infty} (I - \frac{1}{n}B)^{-n}.$$

(iii) Es gilt

$$Bv = \lim_{t \searrow 0} \frac{e^{tB}v - v}{t}$$

für beliebige $v \in X$.

[1] Hinweis: Binomische Formel und Bernoulli'sche Ungleichung.

(iv) Sei A invariant auf dem Unterraum $E \subset \mathbb{R}^d$, das heißt für alle $v \in E$ ist auch $Av \in E$. Sei weiter u eine Lösung des AWPs

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0 \in E, \end{cases} \tag{2}$$

für beliebige $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $u(t) \in E$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(v) Sei A nilpotent. Was kann dann über die Lösungen des AWP (2) ausgesagt werden?

(vi) Es habe A einen Eigenwert mit positivem Realteil. Dann gibt es mindestens eine nichttriviale Lösung u der Differentialgleichung $u'(t) + Au(t) = 0$, für die

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$$

gilt.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Es sei X der Raum aller stetigen Funktionen $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ mit

$$\lim_{t \to \pm\infty} u(t) = 0,$$

versehen mit der Supremumnorm

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)|.$$

(i) Sei $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ eine beschränkte, stetige Funktion. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$S(t)\colon X \to X, \quad u \mapsto S(t)u := \exp(tg)u, \text{ d. h. } (S(t)u)(x) = e^{tg(x)}u(x)$$

($S(t)$ ist also der Multiplikationsoperator mit der Funktion $\exp(tg)$). Zeige, dass $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine gleichmäßig stetige Gruppe von beschränkten Operatoren ist.

(ii) Wir betrachten nun die Operatoren

$$S(t)\colon X \to X, \quad u \mapsto S(t)u := u(\cdot - t)$$

($S(t)$ ist also der Rechtsshift um den Wert t). Zeige, dass $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine Gruppe von beschränkten Operatoren, jedoch nicht gleichmäßig stetig ist.

Bemerkung: Eine Gruppe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\|S(t) - id\|_{L(X)} \to 0 \quad \text{für } t \to 0.$$