Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2018/2019

# Differentialgleichungen I

## 6 . Übungsblatt

Abgabe bis zum 5. Dezember, 12:10 Uhr, vor der großen Übung.

**Aufgabe 1:** **1 Punkt**

Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2:** **2 Punkte**

Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{L}(X)$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad t > 0,$$

wobei $f$ eine stetige Funktion ist, die nicht schneller als exponentiell wächst, d.h. es gibt Konstanten $M > 0$, $t_0 > 0$ und $a > 0$, so dass

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Dann wächst keine Lösung dieser Differentialgleichung schneller als exponentiell, es gibt also für jede Lösung $u$ Konstanten $K > 0$ und $b > 0$, so daß

$$|u(t)| \leq Ke^{bt} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

**Aufgabe 3:** **3 Punkte**

Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in [0,1], \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

in $X = \mathcal{C}([a,b])$ mit $(Av)(x) := \int_0^1 (\xi - x)v(\xi)d\xi$ für $v \in X$.
Zeige, dass der zugehörige Lösungsoperator durch

$$S(t) = \exp(-tA) = id - \sqrt{12}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)A + 12\left(1 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{12}}\right)\right)A^2$$

gegeben ist. ($id$ bezeichnet die Identität in $X$.)
(**Hinweis**: Man kann $A^3$ berechnen.)

**Aufgabe 4:** **3 Punkte**

Betrachte zu gegebenem $(t_0, u_0) \in [0,T] \times X$ die lineare Aufgabe

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in [0,T], \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

mit $X = l^1$ und einer unendlichen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,\infty}$. Die Abbildung $v \mapsto Av$ ist nichts anderes als die übliche Matrix-mal-Vektor-Multiplikation.

(i) Welche Bedingung muss an $A$ gestellt werden, damit $A$ wieder in $l^1$ abbildet und mithin die Aufgabe lösbar ist? Gib ein Beispiel für ein entsprechendes $A$ an.

(ii) Es gelte $\sup_{i=1,\ldots,\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$. Untersuche das Anfangswertproblem auf Lösbarkeit im Raum

$$X = l^\infty := \{v = \{v_i\}_{i=1}^\infty \mid \sup_{i=1,\ldots,\infty} |v_i| < \infty\}.$$

(iii) Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Räumen $l^1$ und $l^\infty$? Sei $A$ eine lineare beschränkte Abbildung von $l^1$ nach $l^\infty$. Gibt es zu jedem $u_0 \in l^1$ eine Lösung mit Werten in $l^\infty$?
(**Hinweis:** Falls so eine Abbildung $A$ existiert, für die die letzte Frage verneint werden muss, darf sie weder die Bedingung aus (i) noch die aus (ii) erfüllen.)