Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H.C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2018/2019

Differentialgleichungen I

7. Übungsblatt

Abgabe bis zum 12. Dezember, 12:10 Uhr, vor der großen Übung.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Untersuche die folgenden Funktionenmengen auf gleichgradige Stetigkeit sowie relative Kompaktheit im Raum der stetigen Funktionen:

(i) $F := \{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$, $x \in [0,1]$;

(ii) $F := \{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \exp\left(-\frac{x}{n}\right)$, $x \in [0,\infty)$;

(iii) $F := \{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n\exp\left(-\frac{x}{n}\right)$, $x \in [0,1]$.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Sei H ein unendlichdimensionaler, separabler Hilbert-Raum. Wir wollen zeigen, dass es eine stetige Abbildung der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B}(0,1) \subset H$ in sich gibt, welche keinen Fixpunkt besitzt, dass also der Brouwer'sche Fixpunktsatz im Unendlichdimensionalen nicht gilt. Kakutani hat 1943 eine solche Abbildung konstruiert:

Sei hierzu $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H. Jedes Element $u \in H$ lässt sich dann darstellen als eine verallgemeinerte Fourier-Reihe[1]

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n, \quad \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren eine Abbildung $S \colon H \to H$ durch

$$S(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_{n+1}.$$

(i) Zeige, dass S linear und beschränkt (also stetig) ist.

(ii) Wir definieren nun die Abbildung $T \colon H \to H$

$$T(u) := \frac{1}{2}(1 - \|u\|)e_0 + S(u), \quad u \in \overline{B}(0,1).$$

Zeige, dass T stetig ist und $\overline{B}(0,1)$ in sich abbildet und weiter, dass T keinen Fixpunkt besitzt.

[1] Es gilt dann die Parseval*'sche Gleichung:* $\|u\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2$.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Sei $k \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$. Zeige, dass dann T_k mit

$$(T_k u)(t) = \int_0^1 k(t,s)u(s)ds, \quad u \in \mathcal{C}([0,1]),$$

eine kompakte Abbildung von $\mathcal{C}([0,1])$ in sich ist.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Beweise den verallgemeinerten Satz von Arzelà–Ascoli:
Sei Z ein Banach-Raum und $A \subset Z$ kompakt. Sei X ein weiterer Banach-Raum. Dann ist eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}(A; X)$ genau dann relativ kompakt in $\mathcal{C}(A; X)$, wenn sie gleichgradig stetig ist und für jedes $t \in A$ die Menge

$$\mathcal{M}(t) = \{v(t) \in X \,:\, v \in \mathcal{M}\}$$

relativ kompakt in X ist.
Hinweis: Relative Kompaktheit und totale Beschränktheit sind in vollständigen metrischen Räumen äquivalent. Zeige zuerst, dass es eine abzählbare dichte Teilmenge in A gibt.