Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H.C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2018/2019

Differentialgleichungen I

8. Übungsblatt

Abgabe bis zum 19. Dezember, 12:10 Uhr, vor der großen Übung.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Es sei $X \subset \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 0,$$

versehen mit der Supremumnorm. Seien $k \in L^1(\mathbb{R})$, $u \in X$ und

$$(Ku)(x) := \int_{\mathbb{R}} k(x-y)u(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeige, dass alle Funktionen $u \in X$ gleichmäßig stetig und beschränkt sind.

(ii) Zeige, dass K eine Abbildung von X in sich, linear und beschränkt ist.

(iii) Es gelte $\int_{\mathbb{R}} |k(s)|ds < 1$. Zeige, dass es dann zu jedem $f \in X$ genau ein $u \in X$ gibt, so dass

$$u - Ku = f$$

gilt.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Wir wollen den folgenden Satz von Leray und Schauder beweisen[1].

Satz. *Es sei X ein* Banach*-Raum und $A\colon X \to X$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Gleichung*

$$u = Au, \quad u \in X, \tag{1}$$

eine Lösung, falls folgende A-priori-Abschätzung *gilt:*
Es gibt ein $r > 0$ derart, dass

$$\|u\| \le r$$

für jede Lösung u der Gleichung

$$u = tAu, \quad u \in X, \quad 0 \le t < 1,$$

gilt[2].

[1] Dies ist ein Beispiel des wichtigen Prinzips: *A-priori-Abschätzung gibt Existenz.*
[2] Bemerkung: Die Lösbarkeit der Gleichung $u = tAu$ wird nicht behauptet!

Hierzu definieren wir die Menge $M := \{u \in X \mid \|u\| \leq 2r\}$ und die Abbildung

$$Bu := \begin{cases} Au, & \text{für } \|Au\| \leq 2r, \\ \frac{2rAu}{\|Au\|}, & \text{für } \|Au\| > 2r. \end{cases}$$

Zeige, dass B eine kompakte Abbildung der Menge M in sich ist. Folgere, dass es einen Fixpunkt für B geben muss und schließlich, dass dann auch eine Lösung von (1) existiert.
Benutze den Satz, um die Lösbarkeit des Problems

$$u(x) = \alpha \int_a^b \sin u(y) dy + f(x)$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a, b])$ zu zeigen.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Wir betrachten für $J = [0, \infty)$, $D = (0, \infty)$, das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & \text{für } t \in J, \\ u(0) = 2, \end{cases}$$

mit $f : J \times D \to \mathbb{R}$, $f(t, v) := -\frac{t}{v} \exp(t^2)$.
Bestimme eine maximal fortgesetzte Lösung dieses Anfangswertproblems. Ist diese eindeutig bestimmt?