Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. H. C. Kreusler, A. Bacho

Wintersemester 2018/2019

# Differentialgleichungen I

## 9. Übungsblatt

Abgabe bis zum 9. Januar, 12:10 Uhr, vor der großen Übung.

**Aufgabe 1:** **2 Punkte**

Zeige, dass eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ genau dann absolut stetig ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede endliche Menge von paarweise disjunkten Intervallen $(a_i, b_i) \subset [a, b]$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ folgt

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(b_i) - f(a_i) \right| < \varepsilon.$$

**Aufgabe 2:** **2 Punkte**

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig. Man definiere die Totalvariationsfunktion von $f$ durch

$$F(x) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \quad x \in [a, b]$$

wobei

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = x,$$

und das Supremum über alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Wahlen von $\{t_i\}$ erstreckt wird. Zeige, dass die Funktionen $F, F + f, F - f$ absolut stetig sind auf $[a, b]$.

**Aufgabe 3:** **3 Punkte**

Beweise die folgenden Aussagen über absolut stetige Funktionen:

(i) Jede absolut stetige Funktion ist auch gleichmäßig stetig.

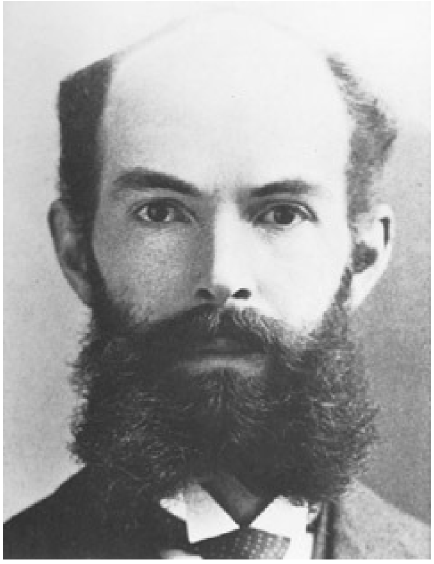
(ii) Jede Lipschitz-stetige Funktion ist auch absolut stetig.

(iii) Es sei $f\colon [a, b] \to [\alpha, \beta]$ eine absolut stetige Funktion. Sei $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Dann ist die Funktion $g \circ f$ wieder absolut stetig.

(iv) Sei $f$ eine absolut stetige Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert und streng monoton wachsend ist. Ist dann $g$ auf $[f(a), f(b)]$ absolut stetig, so ist auch $g \circ f$ auf $[a, b]$ absolut stetig.

**Aufgabe 4:** **4 Punkte**

In der Vorlesung wurde der **Einzigkeitssatz** von OSGOOD angegeben. Dieser hat seinen Ursprung in der beigefügten Arbeit von OSGOOD aus dem Jahre 1898[1]. Formuliere den **Einzigkeitssatz** aus dieser Arbeit und skizziere den Beweis in unserer Sprache. (Wenn Begriffe benutzt werden, die nicht in der Vorlesung definiert wurden, so müssen diese erklärt werden.)



WILLIAM FOGG OSGOOD
1864 - 1943

[1]W.F. OSGOOD. *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *ohne Hinzunahme der* CAUCHY-LIPSCHITZ*'schen Bedingung.* Monatsh. f. Math. 9, 331 - 345, 1898