# Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichungen I
# 12. Tutorium

**Aufgabe 1**
Für $\lambda < 0$ betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) = \lambda(u(t) - 2) \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

a) Zeige, dass die Funktion $f$ dissipativ ist.

b) Berechne die exakte Lösung des Anfangswertproblems.

c) Seien $\Delta t = \frac{T}{N}$ und $t_n = n\Delta t$. Zeige, dass das explizite Eulerverfahren

$$u^0 = u_0, \quad u^n = u^{n-1} + \Delta t f(t_{n-1}, u^{n-1})$$

für $N \to \infty$ gegen die Lösung des Anfangswertproblems strebt.

d) Zeige, dass auch das implizite Eulerverfahren

$$u^0 = u_0, \quad u^n = u^{n-1} + \Delta t f(t_n, u^n)$$

für $N \to \infty$ gegen die Lösung des Anfangswertproblems strebt.

**Aufgabe 2**
Es sei $f : [0, T] \times X \to X$ stetig und genüge der folgenden Lipschitz Bedingung: Es existiert ein $L > 0$, sodass für alle $s, t \in [0, T]$ und $v, w \in X$

$$\|f(s, v) - f(t, w)\| \leq L(|s - t| + \|v - w\|)$$

gilt. Dann existiert genau eine Lösung $(u^n)_{n=1}^N$ des impliziten Eulerverfahrens

$$u^0 = u_0, \quad u^n = u^{n-1} + \Delta t f(t_n, u^n), n = 1, \dots, N$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $\Delta t = \frac{T}{N}$ falls $\Delta t < \frac{1}{L}$ gilt.

**Aufgabe 3**
Sei $f : [0, T] \times X \to X$ wie in Aufgabe 2 und $\Delta t < \frac{1}{L}$. Dann gelten für die Lösung $(u^n)_{n=1}^N$ des impliziten Eulerverfahrens die folgenden A-priori-Abschätzungen

$$\|u^n\| \leq \|u_0\| + \frac{1}{L}(\omega_1^n - 1)(1 + \|f(0, u_0)\|), \quad n = 0, \dots, N$$

und

$$\left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right\| \leq \omega_1^n(1 + \|f(0, u^0)\|) - 1, \quad n = 1, \dots, N$$

für $\omega_1 = \frac{1}{1 - L\Delta t}$.