

# Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichungen I

## 15. Tutorium

### Aufgabe 1

Bestimme, wenn möglich, eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -u''(x) - 4u(x) = -4x, & x \in (-\pi, \pi), \\ u(-\pi) = u(\pi), \\ u'(-\pi) = u'(\pi). \end{cases}$$

### Aufgabe 2 Beweise für die Green'sche Funktion

$$G(x, \xi) = \frac{1}{RW(\xi)} \begin{cases} A(\xi)B(x), & a \leq \xi \leq x \leq b, \\ A(x)B(\xi), & a \leq x \leq \xi \leq b, \end{cases}$$

mit

$$A(x) := \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{vmatrix}, \quad B(x) := \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix}, \quad R := \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix},$$

und  $W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$  die Beziehung

$$\frac{d}{dx} \int_a^b G(x, \xi) d\xi = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi) d\xi.$$

### Aufgabe 3

Die folgenden Differentialgleichungen schreibe man in Gestalt eines STURM-LIOUVILLE-Problems und untersuche sie für homogene DIRICHLET-Randbedingungen sodann auf einem geeigneten Intervall auf Lösbarkeit. Dabei ist  $\lambda$  ein gewisser Parameter.

(i) Hermitesche Gleichung

$$u''(x) - 2xu'(x) + 2\lambda u(x) = 0$$

(ii) Besselsche Gleichung

$$x^2 u''(x) + xu'(x) + (x^2 - \lambda^2)u(x) = 0$$