EXKURS FUNKTIONALANALYSIS

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der linearen Funktionalanalysis

- Das Paar $(X, \|\cdot\|_X)$ bezeichne einen reellen normierten Raum. Ist dieser bezüglich der Norm vollständig, bezeichnet man ihn als Banach-Raum. Wenn klar ist, auf welche Norm man sich bezieht, schreibt man meistens nur X.

  $X^* := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist linear und stetig}\}$ ist der (topologische) Dualraum von X. $f \in X^*$ genau dann, wenn f linear und beschränkt ist, d.h. es gibt ein $K > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $|f(x)| \leq K\|x\|_X$. Häufig wird statt $f(x)$ auch die Schreibweise der *dualen Paarung* verwendet:

  $$f(x) = \langle f, x\rangle_{X^*,X} = \langle f, x\rangle.$$

- $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ ist versehen mit der Norm

  $$\|f\|_{X^*} := \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle|$$

  stets ein Banach-Raum. Diese Norm leitet sich von der so genannten *Operatornorm* ab. Sei $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen den beiden normierten Räumen X und Y, so definieren wir die Operatornorm von A wie folgt:

  $$\|A\| := \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|_X\leq 1}} \|Ax\|_Y.$$

  Dies definiert eine Norm auf $L(X, Y)$, dem Vektorraum der stetigen, linearen Abbildungen von X nach Y. Ist Y vollständig, so ist $L(X, Y)$ ein Banach-Raum. Das Supremum wird genau dann angenommen, wenn X reflexiv ist (Satz von James[1]).

- Es gilt $\|f\|_{X^*} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|\langle f,x\rangle|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle f, x\rangle|$ aufgrund der Linearität von f.

- Ist $\dim X = \infty$, so gibt es stets ein lineares unbeschränktes Funktional. Ist X endlichdimensional, so ist jedes lineare Funktional stetig.

  Beachte den Unterschied zwischen *topologischem* und *algebraischem* Dualraum:
  Der algebraische Dualraum umfasst **alle** linearen Funktionale $f : X \to \mathbb{R}$ und ist somit für unendlichdimensionale Räume X wesentlich größer als der topologische.

[1] Robert Clarke James, häufig zitiert als Robert C. James oder R. C. James, (* 1918 in Bloomington, Indiana).

1.1 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Theorem 1.1. Der Satz von BANACH[2]-STEINHAUS[3]
Seien X ein BANACH-Raum, Y ein normierter Raum, I eine (womöglich überabzählbare) Indexmenge und $T_i : X \to Y$ für jedes $i \in I$ ein stetiger, linearer Operator. Gilt

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\|_Y < \infty$$

für alle $x \in X$, so folgt

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty.$$

Anders ausgedrückt ist die Menge $\{T_i \mid i \in I\}$ beschränkt in $L(X,Y)$.

Die Voraussetzung der Linearität ist dabei notwendig. Betrachten wir zum Beispiel

$$F_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F_n(x) = \begin{cases} |x|^2 x, & |x| < n, \\ n^2 x, & |x| \geq n. \end{cases}$$

Dann ist unabhängig von der Wahl von $n \in \mathbb{N}$

$$|F_n(x)| \leq |x|^3 < \infty$$

für jedes feste $x \in \mathbb{R}^2$. Allerdings ist

$$\sup_n \|F_n\|_{L(X,Y)} = \sup_n \sup_x \frac{|F_n(x)|}{|x|} = \sup_n n^2 = \infty.$$

Zur Übung empfiehlt es sich, die Notwendigkeit der Stetigkeit zu überprüfen.

[2]Stefan Banach (* 30. März 1892 in Krakau; † 31. August 1945 in Lemberg).
[3]Hugo Dionizy Steinhaus (* 4. Januar 1887 in Jasło; † 25. Februar 1972 in Breslau) .

1.2 Der Satz von Hahn-Banach

Theorem 1.2. Der Satz von Hahn[4]-Banach (1926/29)
Sei Y ein linearer Teilraum des normierten linearen Raumes X und sei $f : Y \to \mathbb{R}$ ein lineares, stetiges Funktional. Dann gibt es eine lineare, stetige Fortsetzung $F : X \to \mathbb{R}$ von f mit

- $\langle F, y\rangle = \langle f, y\rangle$ *für alle* $y \in Y$,
- $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$.

Folgerungen:

- Für alle $x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$ existiert ein $f \in X^*$ mit $\langle f, x_1\rangle \neq \langle f, x_1\rangle$, mit anderen Worten:

  f trennt die Punkte x_1 und x_2.

- Für alle $x \in X,\ x \neq 0$ existiert ein $f_x \in X^*$ mit $\langle f_x, x\rangle = \|x\|_X$ und $\|f_x\|_{X^*} = 1$.
- Für alle $x \in X$ gilt $\|x\|_X = \sup\limits_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|_{X^*}\leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \max\limits_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|_{X^*}\leq 1}} |\langle f, x\rangle|$.
- Ist M ein Unterraum von X mit $\overline{M} \neq X$, so gibt es ein $f \in X^* \setminus \{0\}$, so dass für alle $m \in M$ gilt, dass $\langle f, m\rangle = 0$.

Beweis. Für die erste Aussage wähle $f = f_{x_1 - x_2}$ wie in der zweiten.

Zur zweiten Aussage: Sei $x \in X$ fest gewählt und $Y = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $x \in X$ fest und $g_x : Y \to \mathbb{R}$ mit $\langle g_x, \lambda x\rangle = \lambda \cdot \|x\|$.

Dann ist g_x ein lineares, beschränktes Funktional auf Y. Sei f_x die laut dem Satz von Hahn-Banach existierende Fortsetzung von g_x auf X mit

$$\langle f_x, x\rangle = \langle g_x, x\rangle = \|x\|_X$$

und

$$\|f_x\|_{X^*} = \|g_x\|_{Y^*} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{|\langle g_x, \lambda x\rangle|}{\|\lambda x\|_X} = 1.$$

Zur dritten Aussage: Für alle $f \in X^*$ mit $\|f\|_{X^*} \leq 1$ gilt

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{X^*}\|x\|_X.$$

Das Supremum wird für $f = f_x$, wobei f_x wie in der zweiten Aussage definiert ist, angenommen, es ist demnach ein Maximum.

Der Beweis der vierten Aussage sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. $\square$

[4] Hans Hahn (* 27. September 1879 in Wien; † 24. Juli 1934 in Wien).

1.3 Bidualraum und kanonische Abbildung

Den durch $X^{**} := (X^*)^*$ definierten Raum nennen wir den Bidualraum zu X. Ausgestattet mit der Norm

$$\|\phi\|_{X^{**}} := \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} |\langle \phi, f \rangle_{X^{**}, X^*}|$$

ist $(X^{**}, \|\cdot\|_{X^{**}})$ ein Banach-Raum.

Theorem 1.3. *Jedes $x \in X$ definiert durch $\langle j_x, f \rangle_{X^{**}, X^*} := \langle f, x \rangle$ für alle $f \in X^*$ ein Element j_x des Bidualraums X^{**}.*

Beweis. Die Linearität folgt aus der Definition und die Stetigkeit aus:

$$|\langle j_x, f \rangle| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X^*} \|x\|_X.$$

□

Es gilt

$$\|j_x\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} \langle j_x, f \rangle_{X^{**}, X^*} = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} \langle f, x \rangle_{X^*, X} = \|x\|_X$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} j : X &\to X^{**} \\ x &\mapsto j_x \end{aligned}$$

ist somit isometrisch, linear und injektiv, denn aus $x_1 \neq x_2$ folgt $j_{x_1} \neq j_{x_2}$, da es ein $f \in X^*$ gibt mit $\langle j_{x_1}, f \rangle = \langle f, x_1 \rangle \neq \langle f, x_2 \rangle = \langle j_{x_2}, f \rangle$.

X kann demnach mit dem Teilraum $j(X) \subseteq X^{**}$ identifiziert werden. Wir bezeichnen j als die *kanonische Einbettung* von X in X^{**}.

2 Reflexive Räume

Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt reflexiv, wenn die kanonische Einbettung surjektiv ist, das heißt $j(X) = X^{**}$.

Bemerkungen:

- Da X^{**} als Dualraum von X^* vollständig ist, ist jeder reflexive Raum ebenfalls vollständig.
- Ist X reflexiv, so kann X mit X^{**} identifiziert werden. Die Umkehrung gilt nicht!
- Der Dualraum eines reflexiven Raumes ist ebenfalls reflexiv.

Beispiele für reflexive und nichtreflexive Räume:

- Endlichdimensionale Räume und Hilbert[5]-Räume sind reflexiv.
- Ebenso die Räume $L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$, wobei gilt, dass $(L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega)$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- Die Räume $L^1(\Omega), L^\infty(\Omega), \ell^1, c_0, \ell^\infty, \mathcal{C}[a,b]$ sind nicht reflexiv. Es gilt:
$$(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega), c_0^* = \ell^1 \text{ und } (\ell^1)^* = \ell^\infty.$$
- Es gilt: Ist X reflexiv, so ist X separabel, genau dann, wenn X^* separabel ist.

2.1 Konvergenzbegriffe

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum und (x_n) eine Folge in X.

- (x_n) konvergiert stark gegen $x \in X$, falls $\|x_n - x\|_X \to 0$ für $n \to \infty$. Wir schreiben in diesem Fall:
$$x_n \to x.$$
- (x_n) konvergiert schwache gegen $x \in X$, falls für alle $f \in X^*$ gilt, dass
$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$$
für $n \to \infty$. Wir schreiben:
$$x_n \rightharpoonup x.$$

[5]David Hilbert (* 23. Januar 1862 in Königsberg; † 14. Februar 1943 in Göttingen).

Bemerkungen: Im folgenden seien (x_n) eine Folge in X und $x, y \in X$. Dann gilt:

- Falls $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n \rightharpoonup y$, dann $x = y$, d.h. der schwache Grenzwert ist eindeutig.
- Falls $x_n \to x$, so folgt $x_n \rightharpoonup x$.
- Falls $x_n \rightharpoonup x$, so folgt $(\|x_n\|)$ ist beschränkt und $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$, denn es gilt

$$\langle f, x_n \rangle \leq \|f\|_* \|x_n\|$$

und somit

$$\langle f, x \rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \|f\|_*$$

und schließlich

$$\|x\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \frac{\langle f, x \rangle}{\|f\|_*} \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

- Ist X ein Hilbert-Raum, so folgt aus $x_n \rightharpoonup x$ in X und $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$, dass $x_n \to x$.
- Sei M eine Teilmenge von X^*, dann konvergiert (x_n) genau dann schwach gegen x, wenn
  (i) $(\|x_n\|)$ beschränkt ist,
  (ii) die lineare Hülle von M dicht in X^* liegt,
  (iii) und $\langle f, x_n \rangle$ für alle $f \in M$ gegen $\langle f, x \rangle$ konvergiert.
- In endlichdimensionalen Räumen sind schwache und starke Konvergenz äquivalent, ebenso im Raum ℓ^1.
- Aus $x_n \rightharpoonup x$ in X und $f_n \to f$ in X^* folgt $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.
- Sei M eine abgeschlossene und konvexe Menge in X und (x_n) eine Folge in M mit $x_n \rightharpoonup x$ in X. Dann gilt $x \in M$ (Satz von Mazur[6]).

[6]Stanisław Mazur (* 1. Januar 1905 in Lemberg; † 5. November 1981 in Warschau).

- Schwache Konvergenz auf dem Dualraum X^* wird durch den Bidualraum X^{**} ausgedrückt. Es gilt $f_n \rightharpoonup f$ in X^*, falls $\langle g, f_n \rangle \to \langle g, f \rangle$ für alle $g \in X^{**}$.

Beispiel
Es sei $X = \ell^2$ mit der Norm $\|v\| = \|v\|_{\ell^2} = \big(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2\big)^{\frac{1}{2}}$ für $v = (v_1, v_2, ...)$.
Betrachte $e^{(n)} = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{n\text{-te Stelle}}, 0, ...)$.

Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\|e^{(n)}\| = 1 \text{ und } \|e^{(n)} - e^{(m)}\| = \sqrt{2}, \text{ falls } n \neq m.$$

$(e^{(n)})$ ist also keine CAUCHY[7]-Folge und damit insbesondere nicht stark konvergent. Die Folge konvergiert allerdings schwach, denn $(\ell^2)^* \equiv \ell^2$ und $(e^{(n)}, v) = v_n \to 0$ für alle $v \in \ell^2$.
Beachte dabei, dass $\sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2$ nur endlich sein kann, wenn v eine Nullfolge ist. Es sei bemerkt, dass ℓ^2 reflexiv ist und $(e^{(n)})$ beschränkt.

Definition 2.1. *Auf dem Dualraum X^* definieren wir die* schwach*-Konvergenz *einer Folge (f_n) durch den Primalraum X. Eine Folge (f_n) in X^* konvergiert schwach* gegen $f \in X^*$, wenn*

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$$

für alle $x \in X$. Wir schreiben

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f.$$

Bemerkung: Für reflexive Räume X stimmen schwache und schwach*-Konvergenz in X^* überein.

Aus der Analysis ist bekannt, dass jede beschränkte reelle Folge eine konvergente Teilfolge besitzt (Satz von BOLZANO[8]-WEIERSTRASS[9]). Dies lässt sich auf endlichdimensionale normierte Räume erweitern. Nach dem Kompaktheitssatz von RIESZ[10] gilt dies allerdings nicht für unendlichdimensionale Räume. Einen Ausweg bietet der folgende Satz.

[7] Augustin Louis Cauchy (* 21. August 1789 in Paris; † 23. Mai 1857 in Sceaux).
[8] Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (* 5. Oktober 1781 in Prag; † 18. Dezember 1848 in Prag).
[9] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (* 31. Oktober 1815 in Ostenfelde bei Ennigerloh/Münsterland; † 19. Februar 1897 in Berlin).
[10] Frigyes Riesz (Vorname auch dt. Friedrich oder frz. Frédéric, * 22. Januar 1880 in Győr; † 28. Februar 1956 in Budapest).

Theorem 2.1. *Satz von* EBERLEIN[11]-ŠMULIAN[12]
Seien $(X, \|\cdot\|)$ *ein reflexiver* BANACH*-Raum und* (x_n) *eine in* X *beschränkte Folge. Dann besitzt* (x_n) *eine schwach konvergente Teilfolge.*

Dies ist eine Folgerung aus dem folgenden Satz.

Theorem 2.2. *Satz von* BANACH-ALAOGLU[13]-BOURBAKI[14]
Seien X *ein normierter, separabler Raum und* $(f_n) \subset X^*$ *eine beschränkte Folge. Dann besitzt* (f_n) *eine schwach* konvergente Teilfolge.*

Sehr nützlich ist auch das folgende Teilfolgenkriterium.

Theorem 2.3. *Besitzen alle schwach konvergenten Teilfolgen einer beschränkten Folge aus einem reflexiven* BANACH*-Raum denselben Grenzwert, so konvergiert die Folge selbst schwach gegen diesen Grenzwert.*

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Forderung der Reflexivität notwendig ist. Sei

$$u_n(x) := \begin{cases} n(1-nx), & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Nun gilt für alle n

$$\|u_n\|_{L^1(0,1)} = \int_0^{\frac{1}{n}} n(1-nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

und

$$\int_0^1 u_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to 0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$. Wenn u_n schwach konvergent wäre, dann müsste $u(x) \equiv 0$ der Grenzwert sein, aber die Tatsache, dass $v \equiv 1 \in L^\infty(0,1) = L^1(0,1)^*$ und

$$\int_0^1 u_n(x)v(x)dx = \int_0^1 u_n(x)dx = \frac{1}{2},$$

[11]William Frederick Eberlein (* 1917; † 1986) war ein US-amerikanischer Mathematiker.
[12]Witold Lwowitsch Šmulian (in anderer Transliteration auch Schmulian; * 29. August 1914; † 1944 in Praga (Warschau))
[13]Leonidas Alaoglu (* 19. März 1914 in Red Deer, Alberta; † August 1981).
[14]Nicolas Bourbaki ist das Pseudonym eines französischen Autorenkollektivs.

beweisen, dass (u_n) und auch keine ihrer Teilfolgen schwach konvergiert – und das, obwohl (u_n) beschränkt ist.

Es seien im weiteren $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ BANACH-Räume und X sei stetig eingebettet in Y (Schreibweise $X \hookrightarrow Y$). Das heißt, dass es eine stetige, lineare und injektive Abbildung $i : X \to Y$ gibt. In diesem Sinne wird X als Teilmenge von Y aufgefasst und $i(x)$ als x geschrieben.
Jedes $f \in Y^*$ liegt damit als Einschränkung auf X auch in X^*, denn insbesondere gilt mit $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$ die Abschätzung

$$\| f|_X \|_{X^*} = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\langle f, x\rangle}{\|x\|_X} \leq c \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\langle f, x\rangle}{\|x\|_Y} \leq c \sup_{y \in Y\setminus\{0\}} \frac{\langle f, y\rangle}{\|y\|_Y} = c\|f\|_{Y^*}$$

und somit, dass $f|_X \in X^*$. Wir stellen fest:

Theorem 2.4. *Ist X stetig und dicht eingebettet in Y, d.h. $i(X)$ ist eine dichte Teilmenge von Y, so ist Y^* stetig eingebettet in X^*. Ist X reflexiv, so ist Y^* sogar dicht eingebettet.*

Beweis. Ist X dicht in Y eingebettet, dann ist die Abbildung $i^* : Y^* \to X^*$, die durch $f \mapsto f|_X$ definiert ist, linear und injektiv, denn es gilt

$$f|_X = g|_X \Rightarrow \langle f, x\rangle = \langle g, x\rangle$$

für alle $x \in X$. Und weil X stetig und dicht in Y eingebettet ist, folgt aus

$$\langle f, x\rangle = \langle g, x\rangle$$

für alle $x \in X$, dass

$$\langle f, x\rangle = \langle g, x\rangle$$

für alle $x \in Y$ und somit $f = g$. Gilt für ein $x \in X$, dass $\langle f, x\rangle = 0$ für alle $f \in Y^*$, so ist

$$\|x\|_Y = \sup_{f \in Y^*\setminus\{0\}} \frac{\langle f, x\rangle}{\|f\|_{Y^*}} = 0,$$

also $x = 0$ in Y.
Wegen der Reflexivität von X bedeutet das, dass ein auf Y^* verschwindendes Funktional $j_x \in X^{**}$ das Nullfunktional ist. Nach dem Satz von HAHN-BANACH 1.2 ist das nur möglich, wenn $\overline{Y^*} = X^*$. □

Bemerkung:
Falls $X \hookrightarrow Y$, aber $\bar{X} \neq Y$, dann ist die Abbildung nicht injektiv. Betrachte z. B. $H_0^1(a,b) \hookrightarrow H^1(a,b)$. Nach der Ungleichung von Poincaré[15]-Friedrichs[16] gilt für alle $v \in H_0^1(a,b)$, dass

$$\|v\|_{1,2} = |v|_{1,2} + \|v\|_{0,2} \leq |v|_{1,2} + c|v|_{1,2}.$$

Nun liegen die Dirac[17]-Distributionen δ_a und δ_b in $H^{-1}(a,b) = H_0^1(a,b)^*$, denn $|\langle \delta_a, \varphi \rangle| = |\varphi(a)| \leq \|\varphi\|_\infty \leq C \cdot \|\varphi\|_{1,2}$ für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([a,b])$. Jedoch ist

$$\delta_a|_{H_0^1(a,b)} = \delta_b|_{H_0^1(a,b)} = 0,$$

obwohl $\delta_a \neq \delta_b$, da $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = 0$ und ebenso $\langle \delta_b, \varphi \rangle = \varphi(b) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([a,b])$ und somit auch alle $\varphi \in H_0^1(a,b)$.

2.2 Der Darstellungssatz von Riesz

Theorem 2.5. *Der Darstellungssatz von* Riesz
Seien $(H, (\cdot,\cdot), |\cdot|)$ *ein* Hilbert*-Raum und* $(H^*, |\cdot|_*)$ *sein Dualraum. Dann gilt:*

(i) Zu jedem $f \in H^*$ *gibt es genau ein* $u_f \in H$ *mit* $\langle f, v \rangle = (u_f, v)$ *für alle* $v \in H$.

(ii) Es gilt $|f|_* = |u_f|$.

(iii) Die Zuordnung $j : H^* \to H$, $j(f) = u_f$ *ist linear und bijektiv, also ein isometrischer Isomorphismus.*

*Beweis.*zu (i): Für $f = 0$ setzen wir $u_f = 0$. Dann kann es auch kein weiteres $\tilde{u}_f$ geben, denn gilt

$$0 = \langle f, v \rangle = (\tilde{u}_f, v)$$

für alle $v \in H$, so folgt

$$|\tilde{u}_f|^2 = (\tilde{u}_f, \tilde{u}_f) = 0.$$

[15] Jules Henri Poincaré (* 29. April 1854 in Nancy; † 17. Juli 1912 in Paris).
[16] Kurt Otto Friedrichs (* 28. September 1901 in Kiel; † 31. Dezember 1982 in New Rochelle, New York).
[17] Paul Adrien Maurice Dirac (* 8. August 1902 in Bristol; † 20. Oktober 1984 in Tallahassee).

Analog weisen wir die Eindeutigkeit für $f \neq 0$ nach. Seien wieder u_f und $\tilde{u}_f$ wie oben, dann folgt

$$(u_f - \tilde{u}_f, u_f - \tilde{u}_f) = \langle f, u_f - \tilde{u}_f \rangle - \langle f, u_f - \tilde{u}_f \rangle = 0$$

und somit $|u_f - \tilde{u}_f|^2 = 0$.
Es fehlt demnach noch die Existenz eines u_f für $f \neq 0$. Unter dieser Voraussetzung ist der Kern von f ein echter abgeschlossener Unterraum von H. Es gibt demnach ein $w_0 \in H$ mit $|w_0| = 1$ und $\langle f, w_0 \rangle \neq 0$, sowie $(w_0, v) = 0$ für alle v aus dem Kern von f. Eine Eigenschaft von HILBERT-Räumen ist es, dass sich nun jedes $v \in H$ als $v = v_1 + \lambda w_0$ mit einem v_1 aus dem Kern von f darstellen lässt. Sei nun $u_f := \langle f, w_0 \rangle w_0$, dann gilt gerade

$$\begin{aligned}(u_f, v) &= \langle f, w_0 \rangle (w_0, v) = \langle f, w_0 \rangle (w_0, v_1 + \lambda w_0) = \langle f, w_0 \rangle \big((w_0, v_1) + \lambda |w_0|^2 \big) \\ &= \langle f, w_0 \rangle \cdot \lambda = \langle f, \lambda w_0 \rangle = \langle f, v - v_1 \rangle = \langle f, v \rangle - \langle f, v_1 \rangle = \langle f, v \rangle.\end{aligned}$$

zu (ii): Aus der Defnition der Normen folgt

$$|u_f| = \frac{(u_f, u_f)}{|u_f|} \leq \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{(u_f, v)}{|v|} = |f|_*$$

und

$$|f|_* = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{(u_f, v)}{|v|} \leq \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|u_f||v|)}{|v|} = |u_f|.$$

zu (iii): Die Linearität von j ist einfach einzusehen. Angenommen, j wäre nicht surjektiv. Dann gibt es ein $u \in H$, so dass $\langle f, v \rangle \neq (u, v)$ für alle $f \in H^*, v \in H$. Nun ist aber f_u mit $f_u(v) := (u, v)$ selbst ein lineares, stetiges Funktional auf H, also $\langle f_u, v \rangle = (u, v)$ für alle $v \in H$ - ein Widerspruch!

Angenommen, j wäre nicht injektiv. Dann gibt es $f, g \in H^*$ mit $f \neq g$ und $j(f) = j(g)$. Es gilt aber $\langle f - g, v \rangle = \langle f, v \rangle - \langle g, v \rangle = (j(f), v) - (j(g), v) = 0$, also $f = g$ - ein Widerspruch!

□

2.3 GELFAND-Dreier

Es seien $(V, \|\cdot\|)$ ein reflexiver BANACH-Raum und $(H, |\cdot|, (\cdot, \cdot))$ ein HILBERT-Raum. Nach dem RIESZschen Darstellungssatz können wir H mit seinem Dualraum H^* identifizieren. Ist nun V dicht in H eingebettet, folgt daraus wie gesehen, dass H

dicht in V^* eingebettet ist. Schreiben wir für eine dichte Einbettung kurz $\overset{d}{\hookrightarrow}$ so gilt:

$$V \overset{d}{\hookrightarrow} H \equiv H^* \overset{d}{\hookrightarrow} V^*.$$

Ein Tripel (V, H, V^*), das diese Eigenschaften erfüllt nennen wir einen Gelfand[18]-*Dreier* oder auch *Evolutionstripel.*

Beispiele für Gelfand-Dreier sind

- $H_0^1(\Omega) \overset{d}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \overset{d}{\hookrightarrow} H^{-1}(\Omega)$, wobei hier die Einbettungen sogar kompakt sind.
- $W_0^{1,p}(\Omega) \overset{d}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \overset{d}{\hookrightarrow} W^{1,p^*}(\Omega)$, falls $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

[18]Israel Moissejewitsch Gelfand (* 20. August (jul.)/ 2. September 1913 (greg.) in Krasni Okny im Bezirk Odessa, Russisches Kaiserreich, heute Ukraine; † 5. Oktober 2009 in New Brunswick, New Jersey).