Zur Parametrisierung der verallgemeinerten Resolventen eines symmetrischen Operators

Diplomarbeit von

HANS-CHRISTIAN KREUSLER

April 2005

Berichter: DR. P. JONAS
Mitberichter: PROF. DR. K.-H. FÖRSTER

Technische Universität Berlin
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit sollen selbstadjungierte Erweiterungen symmetrischer Operatoren und Relationen in einem KREIN-Raum untersucht werden. Im Spezialfall eines HILBERT-Raumes können diese Erweiterungen mit Hilfe der KREIN-NAIMARK-Formel durch NEVANLINNA-Familien parametrisiert werden. Auf dieser Formel und dem Problem der Parametrisierung der Erweiterungen im allgemeinen Fall eines KREIN-Raums soll das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegen. Desweiteren wollen wir lokale Spektraleigenschaften der selbstadjungierten Erweiterungen einer Klasse symmetrischer Operatoren in KREIN-Räumen untersuchen. Die wesentlichen Hilfsmittel werden dabei die Theorie der Randtripel und Randrelationen, der NEVANLINNA-Funktionen und der lokal definisierbaren Relationen und Funktionen sein.
Im folgenden sollen kurz die Schwerpunkte dieser Arbeit und ihre Einordnung in die vorhandene Literatur dargelegt werden.

Es sei $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum, A eine abgeschlossene, symmetrische Relation in $\mathcal{H}$ und A^* die Adjungierte von A in $\mathcal{H}$. Die Spektraleigenschaften der kanonischen, d.h. in demselben Raum $\mathcal{H}$ verbleibenden, selbstadjungierten Erweiterungen $\widetilde{A}$ von A können durch sogenannte *Randtripel* (boundary value spaces) beschrieben werden (siehe z.B. [11], [12], [13], [14], [19]). Ein solches Tripel (H, Γ_0, Γ_1) besteht aus einem HILBERT-Raum H und Abbildungen Γ_0,$\Gamma_1 : A^* \to H$, so daß

(i) $\Gamma := \binom{\Gamma_0}{\Gamma_1} : A^* \to H^2$ surjektiv ist und

(ii) $$(f, g')_{\mathcal{H}} - (f', g)_{\mathcal{H}} \;=\; \left(\Gamma_0\binom{f}{f'}, \Gamma_1\binom{g}{g'}\right)_H - \left(\Gamma_1\binom{f}{f'}, \Gamma_0\binom{g}{g'}\right)_H$$
für alle $\binom{f}{f'}, \binom{g}{g'} \in A^*$ gilt.

Eine Relation $\widetilde{A} \subset A^*$ ist genau dann eine selbstadjungierte Erweiterung von A, wenn $\Gamma(\widetilde{A})$ eine selbstadjungierte Relation in H ist.
Zu einem Randtripel gehören zwei Funktionen, die WEYL-*Funktion* $M : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathcal{L}(H)$ und das γ-*Feld* $\gamma : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathcal{L}(H, \mathcal{H})$, sowie die kanonischen selbstadjungierten Erweiterungen $A_i := \ker \Gamma_i$, $i = 0, 1$, von A. Für die Resolvente einer kanonischen selbstadjungierten Erweiterung $\widetilde{A}$ von A gilt

$$(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} = (A_0 - \lambda) + \gamma(\lambda)\left(\Gamma(\widetilde{A}) - M(\lambda)\right)^{-1}\gamma(\overline{\lambda})^*, \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \quad (0.1)$$

Ist $\widetilde{A} \subset \mathcal{K}^2$ eine beliebige selbstadjungierte *Erweiterung* von A, d.h. eine selbstadjungierte Erweiterung in einem möglicherweise größeren HILBERT-Raum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$, und bezeichnen wir mit $P_{\mathcal{H}}$ die Orthogonalprojektion in $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{H}$, dann betrachten wir anstelle der Resolvente von $\widetilde{A}$ die Funktion

$$\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto P_{\mathcal{H}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathcal{H}},$$

die zu $\widetilde{A}$ gehörige *verallgemeinerte Resolvente* von A (vgl. z.B. [11], [12], [13]). Um diese in einer ähnlichen Form wie in (0.1) zu beschreiben, wird die Klasse der NEVANLINNA-Familien eingeführt ([29], [38]). Eine holomorphe Funktion τ auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, deren Werte Relationen in H sind (vgl. Abschnitt 1.5), heißt NEVANLINNA-Familie, falls für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

(i) $\tau(\lambda)^* = \tau(\overline{\lambda})$,

(ii) $(\mathrm{Im}\,\lambda)\mathrm{Im}\,(h', h)_H \geq 0$ für alle $\binom{h}{h'} \in \tau(\lambda)$ und

(iii) $-\lambda \in \rho(\tau(\lambda))$

gilt. Die KREIN-NAIMARK-Formel

$$P_{\mathcal{H}}(\widetilde{A} - \lambda) \restriction_{\mathcal{H}}^{-1} \;=\; (A_0 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)\,(M(\lambda) + \tau(\lambda))^{-1}\,\gamma(\overline{\lambda})^*, \tag{0.2}$$

$\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, liefert nun einen bijektiven Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Resolventen von A und den NEVANLINNA-Familien τ, deren Werte Relationen in H sind: Für jede Erweiterung $\widetilde{A}$ von A existiert eine NEVANLINNA-Familie τ und umgekehrt, so daß (0.2) gilt (siehe z.B. [33], [12]).

Diese Parametrisierung der Erweiterungen von A ist besonders günstig für Anwendungen auf STURM-LIOUVILLE-Probleme, weil τ in diesem Fall eine Funktion ist, die in den Randbedingungen auftritt.

V. DERKACH, S. HASSI, M. MALAMUD und H. DE SNOO beweisen diese Parametrisierung der Erweiterungen von A im Falle endlichen Defektes von A in [12] mit Hilfe einer sogenannten coupling-Methode. Mit dem Ziel, diese Methode auf den Fall beliebigen Defektes auszudehnen, führen sie in [10] Randrelationen als Verallgemeinerungen von Randtripeln ein. Auch einer Randrelation Γ wird kanonisch eine operatorwertige Funktion γ, das γ-Feld, und eine, nun relationenwertige, Funktion τ, die WEYL-Familie, zugeordnet. Wie bei Randtripeln ist auch hier die WEYL-Familie einer Randrelation stets eine NEVANLINNA-Familie; das Hauptresultat aus [10] besagt nun, daß umgekehrt jede NEVANLINNA-Familie als WEYL-Familie einer Randrelation aufgefaßt werden kann.

Bisher liegt zu der von den Autoren von [10] angestrebten Verallgemeinerung der coupling-Methode keine Veröffentlichung vor.

In der vorliegenden Arbeit ist ein Beweis der KREIN-NAIMARK-Formel mit Hilfe von Randrelationen und einer coupling-Methode enthalten (siehe Korollar 4.2). Wir betrachten aber allgemeiner symmetrische Relationen in KREIN-Räumen. Wir führen Randrelationen in KREIN-Räumen als natürliche Erweiterung des Konzeptes aus [10] ein. Derartige Randrelationen in KREIN-Räumen verlieren aufgrund der Indefinitheit des inneren Produktes einige grundlegende Eigenschaften von Randrelationen im HILBERT-Raum, so ist z.B. das γ-Feld nicht mehr zwangsläufig operatorwertig.

Eine wichtige Klasse von selbstadjungierten Relationen in KREIN-Räumen

sind die lokal definisierbaren Relationen (siehe z.B. [27], [17], [24]). Mit diesen verbunden ist die Klasse der lokal definisierbaren Funktionen, welche u.a. die Nevanlinna-Funktionen umfaßt. Als zentrales Resultat erhalten wir einen Darstellungssatz von lokal definisierbaren Funktionen als Weyl-Familien von Randrelationen und mit ganz ähnlichen Methoden einen neuen Beweis des oben erwähnten Hauptresultats aus [10].
Wir wenden diese Ergebnisse an, um eine verallgemeinerte Form der Krein-Naimark-Formel für symmetrische Relationen in Krein-Räumen zu erhalten, welche eine bijektive Beziehung zwischen selbstadjungierten Erweiterungen und Weyl-Familien von Randrelationen herstellt. Als Spezialfall führt dies zu einem neuen Beweis der oben angegebenen Krein-Naimark-Formel (0.2) unter anderem auch für den Fall, daß A unendliche Defektzahlen hat. Schließlich untersuchen wir die lokalen Spektraleigenschaften der Erweiterungen einer Klasse symmetrischer Relationen in dem Fall, daß im Fall einer Austrittserweiterung der Austrittsraum ein Hilbert-Raum ist und es eine kanonische Erweiterung gibt, die lokal ein diskretes Spektrum negativen Typs hat. Dann haben auch die Erweiterungen diese Spektraleigenschaft (Satz 4.3).

Wir beschreiben kurz den Aufbau dieser Arbeit und den Inhalt der einzelnen Kapitel.

Im ersten Abschnitt 1.1 geben wir zunächst eine kurze Einführung in die Theorie der Krein-Räume. Im Abschnitt 1.2 definieren wir lineare Relationen in Hilbert- und Krein-Räumen und deren Adjungierte. Wir geben grundlegende Eigenschaften an und definieren das Spektrum von abgeschlossenen Relationen. In Definition 1.7 führen wir Spektralpunkte positiven und negativen Typs ein, wie sie später bei der Behandlung der lokal definisierbaren Relationen und deren Spektraltheorie benötigt werden. In Abschnitt 1.3 geben wir Definitionen von isometrischen und unitären Relationen an. Für letztere stellen das Lemma 1.11 und das Korollar 1.12 alternative Charakterisierungen zur Verfügung. Für unsere Zwecke von zentraler Bedeutung ist der Begriff der $[\![\cdot,\cdot]\!]$-Isometrie bzw. der $[\![\cdot,\cdot]\!]$-Unitarität (Bezeichnung 1.13). Im nächsten Abschnitt 1.4 werden lokal definisierbare Relationen und deren Spektralfunktion eingeführt. Lemma 1.19 gibt eine Definition von Intervallen positiven und negativen Typs mit Hilfe der Spektralfunktion. In Abschnitt 1.5 definieren wir (verallgemeinerte) Nevanlinna-Funktionen und -Familien und einige ihrer Unterklassen. Als wichtiges Resultat geben wir Darstellungen von Nevanlinna-Funktionen mit Hilfe von Resolventen selbstadjungierter Relationen an ((1.21), (1.24)). Schließlich werden lokal definisierbare Funktionen definiert (Abschnitt 1.6) und in Satz 1.26 eine Darstellung durch die Resolvente einer lokal definisierbaren Relation gegeben.

Im zweiten Kapitel werden Randtripel in KREIN-Räumen behandelt. Grundlegende Objekte wie das γ-Feld und die WEYL-Funktion werden definiert. In den Sätzen in Abschnitt 2.3 werden Verbindungen zwischen NEVANLINNA-Funktionen und WEYL-Funktionen von Randtripeln im HILBERTRAUM und von lokal definisierbaren Funktionen und Randtripeln im KREIN-Raum angegeben.

Im zentralen dritten Kapitel werden Randrelationen in KREIN-Räumen eingeführt. Im Abschnitt 3.1 werden dazu benötigte Hilfsmittel bereitgestellt, namentlich die Transformation $\mathcal{J}$ und Lemma 3.2. In den Definitionen 3.6 von Randrelationen und 3.7 der dazugehörigen γ-Felder und WEYL-Funktionen im folgenden Abschnitt 3.2 werden die dieser Arbeit zugrundeliegenden Objekte erklärt. Wir geben grundlegende Eigenschaften von Randrelationen in KREIN-Räumen und Unterschiede zu denen in HILBERT-Räumen an und charakterisieren den Fall, daß die Relation A_0 wie bei Randtripeln selbstadjungiert ist (Satz 3.11). Randrelationen in HILBERT-Räumen werden in Abschnitt 3.3 untersucht. Der Darstellungssatz 3.21 von NEVANLINNA-Familien als WEYL-Familien ist das Hauptresultat aus [10]. Wir geben hierfür einen neuen Beweis, der auf der oben erwähnten Darstellung von NEVANLINNA-Funktionen durch die Resolvente einer selbstadjungierten Relation beruht. In ähnlicher Weise erhalten wir schließlich in Satz 3.27 in Abschnitt 3.4 eine Beziehung zwischen lokal definisierbaren Funktionen und WEYL-Familien von Randrelationen in KREIN-Räumen.

Im letzten Abschnitt untersuchen wir Erweiterungen symmetrischer Relationen in KREIN-Räumen. Unser Hauptresultat ist eine verallgemeinerte KREIN-NAIMARK-Formel (Satz 4.1), welche verallgemeinerte Resolventen mit WEYL-Familien von Randrelationen verknüpft. Der Beweis benutzt die Ergebnisse aus Abschnitt 3. Mit dem Darstellungssatz von NEVANLINNA-Familien als WEYL-Familien von Randrelationen erhalten wir die klassische KREIN-NAIMARK-Formel für symmetrische Relationen in HILBERT-Räumen als Spezialfall (Korollar 4.2). Schließlich erhalten wir das oben angegebene Resultat über die lokalen Spektraleigenschaften einer Klasse lokal definisierbarer Erweiterungen.

1 Grundlagen

1.1 Räume mit innerem Produkt

Die hier angegebenen Definitionen, Aussagen und Beweise, sowie weitergehende Resultate zu Räumen mit innerem Produkt findet man in den Büchern von Azizov und Iohvidov [4], Iohvidov, Krein und Langer [21] und Istrăţescu [22], sowie im Buch von Bognar [7], dessen Notation wir hier übernehmen.

Ein Paar $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot])$ heißt *Raum mit innerem Produkt*, falls $\mathcal{H}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist und $[\cdot,\cdot] : \mathcal{H}^2 \to \mathbb{C}$ ein inneres Produkt ist, also eine Funktion mit

$$[\alpha f + g, h] = \alpha[f,h] + [g,h], \text{ sowie}$$
$$[f,g] = \overline{[g,f]} \text{ für alle } f,g,h \in \mathcal{H},\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Ist $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot])$ ein Raum mit innerem Produkt und $f \in \mathcal{H}$, so sagen wir, f sei *neutral (positiv* bzw. *negativ)*, falls $[f,f] = 0$ $(> 0$ bzw. $< 0)$ ist. Die Menge aller neutralen Elemente von $\mathcal{H}$ definieren wir durch

$$\mathcal{P}^0 := \{f \in \mathcal{H} \mid [f,f] = 0\}.$$

Wir setzen

$$\mathcal{P}^{++} := \{f \in \mathcal{H} \mid [f,f] > 0\} \cup \{0\}$$

und definieren $\mathcal{P}^{--}$ analog. Weiterhin setzen wir $\mathcal{P}^+ := \mathcal{P}^0 \cup \mathcal{P}^{++}$ und $\mathcal{P}^- := \mathcal{P}^0 \cup \mathcal{P}^{--}$.
Ein inneres Produkt $[\cdot,\cdot]$ heißt *indefinit*, falls $\mathcal{H}$ sowohl positive, als auch negative Elemente enthält und *positiv* beziehungsweise *negativ semidefinit*, falls $\mathcal{P}^{--} = \{0\}$ beziehungsweise $\mathcal{P}^{++} = \{0\}$ ist. Es heißt *positiv (negativ) definit*, falls zusätzlich auch $\mathcal{P}^0 = \{0\}$ ist. In Räumen mit positiv semidefinitem innerem Produkt gilt die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung ([7]).
Es sei nun $\mathcal{L}$ ein Unterraum von $\mathcal{H}$. Wir definieren den Orthogonalraum von $\mathcal{L}$ bezüglich $[\cdot,\cdot]$ durch

$$\mathcal{L}^{[\perp]} := \{f \in \mathcal{H} \mid [f,g] = 0 \text{ für alle } g \in \mathcal{L}\}.$$

Der *isotrope* Teil von $\mathcal{L}$ wird definiert durch $\mathcal{L}^0 := \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}$ und wir nennen $\mathcal{L}$ *degeneriert*, falls $\mathcal{L}^0 \neq \{0\}$ ist.
Der Raum $\mathcal{H}$ heißt *zerlegbar*, falls es lineare Unterräume $\mathcal{H}^0$, $\mathcal{H}^+$ und $\mathcal{H}^-$ von $\mathcal{H}$ gibt mit $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{P}^0, \mathcal{H}^+ \subset \mathcal{P}^{++}, \mathcal{H}^- \subset \mathcal{P}^{--}$, so daß sich $\mathcal{H}$ in die direkte orthogonale Summe

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^0[\dot{+}]\mathcal{H}^-[\dot{+}]\mathcal{H}^+ \tag{1.1}$$

zerlegen läßt. Wir bezeichnen (1.1) als *Fundamentalzerlegung* von $\mathcal{H}$.
Wir können nun die für diese Arbeit relevanten Räume einführen.

Definition 1.1. *Ein Raum mit innerem Produkt* $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot])$ *heißt* KREIN-Raum*, falls es eine Fundamentalzerlegung der Form (1.1) gibt, für die* $\mathcal{H}^0 = \{0\}$ *ist und* $(\mathcal{H}^+, [\cdot,\cdot])$ *und* $(\mathcal{H}^-, -[\cdot,\cdot])$ HILBERT-*Räume sind.*

Einen KREIN-Raum $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot])$ werden wir im folgenden immer lediglich durch $\mathcal{H}$ bezeichnen. Das zugehörige innere Produkt wird dann durch Indizierung eindeutig gekennzeichnet. Ähnliches gilt für HILBERT-Räume.

Ist $\mathcal{H}$ ein KREIN-Raum mit zwei verschiedenen Fundamentalzerlegungen $\widetilde{\mathcal{H}}^+[\dot{+}]\widetilde{\mathcal{H}}^- = \mathcal{H} = \mathcal{H}^+[\dot{+}]\mathcal{H}^-$, so gilt für die algebraischen Dimensionen $\dim \mathcal{H}^\pm = \dim \widetilde{\mathcal{H}}^\pm$.

Definition 1.2. *Sei* $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot])$ *ein* KREIN-*Raum mit einer Fundamentalzerlegung* $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+[\dot{+}]\mathcal{H}^-$*. Ist* $\dim \mathcal{H}^- = \kappa < \infty$*, so heißt* $\mathcal{H}$ *ein* PONTRYAGIN-Raum *(π_κ-Raum).*

Wir bemerken, daß PONTRYAGIN-Räume mit $\kappa = \dim \mathcal{H}^- = 0$ gerade die HILBERT-Räume sind.
Sei nun wieder $\mathcal{H}$ ein KREIN-Raum. Für $f = f^+ + f^- \in \mathcal{H}$ mit $f^+ \in \mathcal{H}^+$ und $f^- \in \mathcal{H}^-$ definieren wir $P^+ f := f^+$ und $P^- f := f^-$. Dann sind P^+, P^- Orthogonalprojektionen in $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}^+$ bzw. $\mathcal{H}^-$. Durch diese wird vermöge

$$J := P^+ - P^- \tag{1.2}$$

die zu (1.1) gehörende *Fundamentalsymmetrie* J definiert. Es ist leicht zu sehen, daß hieraus $J = J^{-1}$ folgt. Eine solche Fundamentalsymmetrie erfüllt für alle $f, g \in \mathcal{H}$

$$[Jf, g] = [f, Jg]$$

und

$$[Jf, Jg] = [f, g].$$

Durch $(\cdot,\cdot) := [J\cdot,\cdot] = [\cdot, J\cdot]$ wird auf $\mathcal{H}$ ein positiv definites inneres Produkt definiert, mit welchem $(\mathcal{H}, [J\cdot,\cdot])$ ein HILBERT-Raum ist. Entsprechend ist durch

$$||f|| := |[Jf, f]|^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf $\mathcal{H}$ definiert.

1.2 Lineare Relationen in KREIN-Räumen

Wir verweisen für diesen Abschnitt auf CROSS [9] und vor allem auf die Arbeit [16] von A. DIJKSMA und H. DE SNOO, worin die hier behandelten grundlegenden Definitionen und Eigenschaften zu finden sind. Die analogen Aussagen für Operatoren in KREIN-Räumen findet man auch in den schon im vorhergehenden Abschnitt erwähnten Büchern [4] und [21].

Definitionen. Wir vereinbaren die folgenden Schreibweisen:
Seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ beliebige KREIN- oder HILBERT-Räume. Die Elemente aus $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ schreiben wir als Spaltenvektoren, z.B.

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}, \quad \text{mit } f \in \mathcal{H}, g \in \mathcal{K}.$$

Im Fall $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ schreiben wir für das Element $\left(\begin{smallmatrix} f \\ f' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} = \mathcal{H}^2$ auch $\hat{f}$. Wir werden mit Räumen der Form $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{K}^2$ und $(\mathcal{H} \times \mathcal{K})^2$ arbeiten. Anstelle von

$$\begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} f \\ f' \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} g \\ g' \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^2 \times \mathcal{K}^2 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} f' \\ g' \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \in (\mathcal{H} \times \mathcal{K})^2$$

mit $f, f' \in \mathcal{H}$ und $g, g' \in \mathcal{K}$ vereinbaren wir die Notation

$$\left\{ \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \hat{f}, \hat{g} \right\} \in \mathcal{H}^2 \times \mathcal{K}^2 \text{ und } \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} \right\} \in (\mathcal{H} \times \mathcal{K})^2.$$

Die Glieder einer Folge $f : \mathbb{N} \to X$ werden wir wie üblich mit f_n anstelle von $f(n)$ bezeichnen.

Definition 1.3. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ KREIN-Räume. Wir nennen A eine* lineare Relation*, falls A ein linearer Unterraum von $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ ist.*
Ist A ein abgeschlossener Unterraum, so bezeichnen wir A als abgeschlossene *lineare Relation und notieren $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Ist $\mathcal{H} = \mathcal{K}$, so schreiben wir vereinfachend $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Wir werden in dieser Arbeit durchweg lineare Relationen als „Relationen“ bezeichnen.*

Wir definieren für eine Relation $A \subset \mathcal{H} \times \mathcal{K}$

$$\begin{aligned} \text{den Definitionsbereich } \operatorname{dom} A &:= \left\{ f \in \mathcal{H} \;\middle|\; \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A \text{ für ein } g \in \mathcal{K} \right\}, \\ \text{das Bild } \operatorname{ran} A &:= \left\{ g \in \mathcal{K} \;\middle|\; \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A \text{ für ein } f \in \mathcal{H} \right\}, \\ \text{den Kern } \ker A &:= \left\{ f \in \mathcal{H} \;\middle|\; \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in A \right\} \\ \text{und } \operatorname{mul} A &:= \left\{ g \in \mathcal{K} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in A \right\}. \end{aligned}$$

Wir sehen Relationen zum einen als lineare Unterräume und zum anderen als (möglicherweise mehrwertige) lineare Zuordnungen an. Eine lineare Relation $A \subset \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ ist mithin genau dann ein Operator $A : \mathcal{H} \supset \operatorname{dom} A \to \mathcal{K}$, wenn $\operatorname{mul} A = \{0\}$ ist.

Wir definieren zwei Additionen für Relationen. Sind $A, B \subset \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ Relationen, so ist

$$A \hat{+} B := \left\{ \binom{f+f'}{g+g'} \,\middle|\, \binom{f}{g} \in A, \binom{f'}{g'} \in B \right\} \qquad \text{die Addition von Unterräumen}$$

$$A + B := \left\{ \binom{f}{g+g'} \,\middle|\, \binom{f}{g} \in A, \binom{f}{g'} \in B \right\} \qquad \text{die Addition von Zuordnungen.}$$

Die Komposition zweier Relationen $A \subset \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ und $B \subset \mathcal{K} \times \mathcal{G}$ definieren wir durch

$$BA := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ l \end{pmatrix} \,\middle|\, \text{Es gibt ein } g \in \mathcal{K} \text{ mit } \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A \text{ und } \begin{pmatrix} g \\ l \end{pmatrix} \in B \right\}.$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist

$$\lambda A := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \lambda g \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A \right\}$$

und die Inverse von A wird definiert durch

$$A^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A \right\}.$$

Sind $A \subset \mathcal{H}^2$, $B \subset \mathcal{K}^2$ Relationen, so schreiben wir

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} := \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right\} \in (\mathcal{H} \times \mathcal{K})^2 \,\middle|\, \hat{a} \in A \text{ und } \hat{b} \in B \right\}. \tag{1.3}$$

Sind A und B Operatoren, so ist $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ genau die Diagonaloperatormatrix $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathcal{H} \times \mathcal{K}$.

Seien nun wieder $A, B \subset \mathcal{H} \times \mathcal{K}$. Aus den obigen Definitionen folgen ohne Mühe die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(A \cap B) &= = \ker(A + (-B)) = \ker(A - B), \\ \operatorname{ran}(A \cap B) &= \ker(A^{-1} - B^{-1}). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Wir definieren für eine Teilmenge $X \subset \mathcal{H}$ das *Bild von* X *unter* A durch

$$A(X) := \left\{ g \in \mathcal{K} \,\middle|\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A \text{ für ein } f \in X \right\}.$$

Also ist $\operatorname{ran} A = A(\operatorname{dom} A)$ und $\operatorname{mul} A = A(\{0\})$.
Wie üblich sei $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ die Menge der beschränkten, überall definierten, linearen Operatoren und $\mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ die Menge der abgeschlossenen, linearen Operatoren von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{K}$, sowie $\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ und $\mathcal{C}(\mathcal{H}) := \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Sei $\mathcal{H}$ ein Kreinraum mit Fundamentalsymmetrie J. Auf $\mathcal{H}^2$ ist kanonisch das innere Produkt $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{H}^2}$ durch

$$\left[\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{H}^2} := [f, g]_{\mathcal{H}} + [f', g']_{\mathcal{H}} \quad \text{für } f, f', g, g' \in \mathcal{H}$$

gegeben. Wir erklären ein weiteres inneres Produkt auf $\mathcal{H}^2$ durch

$$\left[\!\!\left[\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \right]\!\!\right]_{\mathcal{H}^2} := i\big([f,g']_{\mathcal{H}} - [f',g]_{\mathcal{H}}\big) \quad \text{für } f,f',g,g' \in \mathcal{H}. \tag{1.5}$$

Dann ist $(\mathcal{H}^2, [\![\cdot,\cdot]\!]_{\mathcal{H}^2})$ ein KREIN-Raum mit einer Fundamentalsymmetrie

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 0 & -iJ \\ iJ & 0 \end{pmatrix}.$$

Die *Adjungierte* A^+ einer Relation $A \subset \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ wird definiert durch

$$A^+ := \left\{ \begin{pmatrix} h \\ f \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \times \mathcal{H} \;\middle|\; [h,k]_{\mathcal{K}} = [f,g]_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix} \in A \right\}.$$

Ganz analog definieren wir die Adjungierte einer Relation im HILBERT-Raum und bezeichnen sie mit A^*.
Sei $\mathcal{H} = \mathcal{K}$. Dann ist $A^+ = A^{[\![\perp]\!]_{\mathcal{H}^2}}$, wobei $A^{[\![\perp]\!]_{\mathcal{H}^2}}$ den Orthogonalraum zu A bezüglich $[\![\cdot,\cdot]\!]$ bezeichnet.
Wir nennen A *symmetrisch*, falls $A \subset A^+$, *wesentlich selbstadjungiert*, falls clos $A = A^+$ und *selbstadjungiert*, falls $A = A^+$ ist. Ist A^* die Adjungierte von A im HILBERT-Raum $(\mathcal{H}, [J\cdot,\cdot]_{\mathcal{H}})$, wobei J eine Fundamentalsymmetrie des KREIN-Raumes $\mathcal{H}$ ist, so gilt $A^+ = JA^*J$. Dann ist A symmetrisch (selbstadjungiert) bezüglich $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{H}}$ genau dann, wenn JA symmetrisch (selbstadjungiert) bezüglich $[J\cdot,\cdot]_{\mathcal{H}}$ ist.
Wie aus der Definition von $\mathfrak{J}$ folgt, gilt für beliebige Relationen $A \subset \mathcal{H}^2$

$$A^+ = A^{[\![\perp]\!]_{\mathcal{H}^2}} = \mathfrak{J}\left(A^{[\perp]_{\mathcal{H}^2}}\right), \tag{1.6}$$

wobei $A^{[\perp]_{\mathcal{H}^2}}$ den Orthogonalraum zu A bezüglich $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{H}^2}$ bezeichnet. Wir definieren für eine beliebige Relation $A \subset \mathcal{H}^2$ und $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{N}_\lambda(A) := \ker\,(A-\lambda) \;\; \text{und} \;\; \hat{\mathcal{N}_\lambda}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} f_\lambda \\ \lambda f_\lambda \end{pmatrix} \in A \;\middle|\; f_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda(A) \right\}. \tag{1.7}$$

Ist A eine symmetrische Relation, so werden üblicherweise die Defekträume von A durch ker $(A^+ - \lambda)$ erklärt. Diese bezeichnen wir hier also mit $\mathcal{N}_\lambda(A^+)$. In dieser Abweichung von der Standardnotation folgen wir [10], da wir für die Behandlung von Randrelationen (in Abschnitt 3) die Räume $\mathcal{N}_\lambda(A)$ und $\widetilde{\mathcal{N}}_\lambda(A)$ auch von nichtsymmetrischen Relationen benötigen.
Ist $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum und $A \subset \mathcal{H}^2$ eine symmetrische Relation, so werden die *Defektzahlen* $n_+(A)$ und $n_-(A)$ von A durch

$$n_\pm(A) := \dim \mathcal{N}_{\mp i}(A^*).$$

definiert.
Ist $\mathcal{H}$ ein KREIN-Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation, so ist JA

eine symmetrische, abgeschlossene Relation im HILBERT-Raum $(\mathcal{H}, [J_{\mathcal{H}}\cdot,\cdot]_{\mathcal{H}})$. Wir bezeichnen $n_+(JA)$ und $n_-(JA)$ als *Defektindizes* von A. Diese sind unabhängig von der Wahl der Fundamentalsymmetrie J. Ist $n_+(JA) = n_-(JA) =: n$, so sagen wir, A habe *Defekt* n.
Wir definieren noch den *Imaginär*- und den *Realteil* von A durch

$$\mathrm{Re}\, A := \frac{1}{2}\big(A + A^+\big) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\, A := \frac{1}{2i}\big(A - A^+\big). \tag{1.8}$$

Eigenschaften. Wir geben nun einige wichtige Eigenschaften von Relationen in KREIN-Räumen an.
Unmittelbar aus der Definition der Adjungierten folgt das

Lemma 1.4. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ KREIN-Räume und $A, B \subset \mathcal{H}\times\mathcal{K}$ Relationen.*

(i) *Ist $A \subset B$, so ist $B^+ \subset A^+$,*

(ii) $(A^+)^+ = \mathrm{clos}\, A$ *und* $(\mathrm{clos}\, A)^+ = A^+$,

(iii) $A^+ + B^+ \subset (A+B)^+$ *und* $A^+B^+ \subset (BA)^+$,

(iv) $(A^{-1})^+ = (A^+)^{-1}$,

(v) $(A-\lambda)^+ = A^+ - \overline{\lambda}$ *und* $(\lambda A)^+ = \overline{\lambda} A^+$,

(vi) $\big(A \,\hat{+} B\,\big)^+ = A^+ \cap B^+$

und weiterhin

$$\begin{aligned} (\mathrm{dom}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{H}}} &= \mathrm{mul}\, A^+ &&\text{und}\quad (\mathrm{ran}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{H}}} &&= \ker A^+,\\ (\mathrm{dom}\, A^+)^{[\perp]_{\mathcal{H}}} &= \mathrm{mul}\,(\mathrm{clos}\, A) &&\text{und}\quad (\mathrm{ran}\, A^+)^{[\perp]_{\mathcal{H}}} &&= \ker\,(\mathrm{clos}\, A). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Lemma 1.5. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ KREIN-Räume und $A \subset \mathcal{H}\times\mathcal{K}$ eine Relation. Dann gilt: Ist* dom A *abgeschlossen, so auch* dom (clos A) *und es gilt* dom (clos A) = dom A. *Ebenso ist* ran (clos A) = ran A, *falls* ran A *abgeschlossen ist.*

Beweis. Es gilt natürlich dom $A \subset$ dom (clos A).
Sei nun $f \in$ dom (clos A). Es gibt also ein $g \in \mathcal{K}$ mit $\binom{f}{g} \in \mathrm{clos}\, A$. Sei $\binom{f'}{g'} : \mathbb{N} \to A$ mit $f'_n \to f$ und $g'_n \to g$ für $n \to \infty$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist folglich $f_n \in \mathrm{dom}\, A = \mathrm{clos}\,(\mathrm{dom}\, A)$ und damit ist auch $f \in \mathrm{dom}\, A$. Also folgt dom A = dom (clos A) und dom (clos A) ist abgeschlossen. Ganz analog für ran A. ◻

Das folgende Lemma wird in [10] für HILBERT-Räume bewiesen.

Lemma 1.6. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ KREIN-Räume und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ eine Relation. Dann gilt* *(i)* dom A *ist abgeschlossen genau dann, wenn* dom A^+ *abgeschlossen ist.*

(ii) ran A *ist abgeschlossen genau dann, wenn* ran A^+ *abgeschlossen ist.*

Beweis. Da dom A = ran A^{-1}, $(A^+)^{-1} = (A^{-1})^+$ und somit dom $A^+ =$ (ran $A^+)^{-1}$ ist, reicht es aus, *(ii)* zu zeigen. Da desweiteren A abgeschlossen ist, also $(A^+)^+ = \text{clos } A = A$, so reicht es aus zu zeigen, daß die Abgeschlossenheit von ran A die Abgeschlossenheit von ran A^+ impliziert. Die andere Implikation folgt dann durch Übergang von A auf A^+.

Sei nun ran A abgeschlossen. Wir definieren $P : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ durch $P\binom{f}{g} = g$ für $\binom{f}{g} \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ und $Q : \mathcal{K} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch $Q\binom{g}{f} = f$ für $\binom{g}{f} \in \mathcal{K} \times \mathcal{H}$. Dann sind P und Q linear, überall definiert, stetig und surjektiv. Es gilt

$$\begin{aligned} \ker P = \mathcal{H} \times \{0\} \quad &\text{und} \quad \ker Q = \mathcal{K} \times \{0\} \\ P(A) = \text{ran } A \quad &\text{und} \quad Q(A^+) = \text{ran } A^+. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist ran $A = P(A)$ abgeschlossen. Mit [14, Lemma 2.1] folgt nun, daß

$$A \hat{+} (\mathcal{H} \times \{0\})$$

abgeschlossen in $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ ist. Nach [30, Theorem 4.8] folgt, daß

$$A^+ \hat{+} (\mathcal{K} \times \{0\}) = A^+ \hat{+} \ker Q$$

abgeschlossen ist. Wiederum mit [14, Lemma 2.1] folgt nun, daß auch $Q(A^+) = \text{ran } A^+$ abgeschlossen ist. □

Das Spektrum. Sei $\mathcal{H}$ ein KREIN-Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Wie gewöhnlich erklären wir die *Resolventenmenge* $\rho(A)$ von A durch

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; (A - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \right\}.$$

Für die Resolvente gilt

$$(A - \lambda)^{-1} - (A - \mu)^{-1} = (\lambda - \mu)(A - \lambda)^{-1}(A - \mu)^{-1}$$

für $\lambda, \mu \in \rho(A)$.
Das *Spektrum* $\sigma(A)$ von A wird definiert durch $\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ und wie üblich sei es zerlegt in Punkt-, Rest- und kontinuierliches Spektrum (vgl. [16]). Wir definieren das *erweiterte* Spektrum $\widetilde{\sigma}(A)$ durch

$$\widetilde{\sigma}(A) := \begin{cases} \sigma(A) \cup \{\infty\}, & \text{falls } \; A \notin \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \sigma(A), & \text{falls } \; A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \end{cases}$$

Ist mul $A \neq \{0\}$, so nennen wir ∞ einen Eigenwert von A.

Ein Punkt $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ gehört zum *approximativen Punktspektrum* $\sigma_{ap}(A)$, falls es eine Folge $\binom{f}{f'} : \mathbb{N} \to A$ mit $||f_n|| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\lim_{n\to\infty} ||f'_n - \lambda_0 f_n|| = 0$ gilt. Ist $0 \in \sigma_{ap}(A^{-1})$, so definieren wir das *erweiterte approximative Punktspektrum* durch $\widetilde{\sigma}_{ap}(A) := \sigma_{ap}(A) \cup \{\infty\}$ und sonst setzen wir $\widetilde{\sigma}_{ap}(A) := \sigma_{ap}(A)$.
Es ist stets $\widetilde{\sigma}_{ap}(A) \subset \widetilde{\sigma}(A)$ und der Rand von $\sigma(A)$ in $\overline{\mathbb{C}}$ gehört zu $\widetilde{\sigma}_{ap}(A)$.
Ist A selbstadjungiert, so ist $\sigma(A) \cap \mathbb{R} \subset \sigma_{ap}(A)$ (siehe [7, Kor. VI.6.2]).

Wir definieren *Spektralpunkte positiven (negativen) Typs.* (siehe hierzu die Arbeiten von LANGER, MARKUS und MATSAEV [34] sowie von AZIZOV, JONAS und TRUNK [3] und JONAS[27], in denen auch die in diesem Abschnitt erwähnten Aussagen bewiesen werden).

Definition 1.7. *Sei $\mathcal{H}$ ein* KREIN-*Raum,* $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *und* $\lambda_0 \in \sigma_{ap}(A)$. *Dann heißt* λ_0 *von* positivem (negativem) Typ bezüglich A, *falls für jede Folge* $\binom{f}{f'} : \mathbb{N} \to A$ *mit* $||f_n|| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, *und* $\lim_{n\to\infty} ||f'_n - \lambda_0 f_n|| = 0$

$$\liminf_{n\to\infty} [f_n, f_n]_{\mathcal{H}} > 0 \qquad \left(\limsup_{n\to\infty} [f_n, f_n]_{\mathcal{H}} < 0\right)$$

gilt. Der Punkt ∞ *heißt von* positivem (negativem) Typ bezüglich A, *falls* $\infty \in \widetilde{\sigma}_{ap}(A)$ *ist und für jede Folge* $\binom{f}{f'} : \mathbb{N} \to A$ *mit* $||f'_n|| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, *und* $\lim_{n\to\infty} ||f_n|| = 0$

$$\liminf_{n\to\infty} [f'_n, f'_n]_{\mathcal{H}} > 0 \qquad \left(\limsup_{n\to\infty} [f'_n, f'_n]_{\mathcal{H}} < 0\right)$$

gilt. Wir nennen einen Punkt definiten Typs bezüglich A, *falls er von positivem oder negativem Typ bezüglich A ist.*
Mit $\sigma_{++}(A)$ $(\sigma_{--}(A))$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte, welche bezüglich A positiven (negativen) Typs sind.
Ist Δ eine offene Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$, so heißt Δ positiven (negativen) Typs bezüglich A, *falls*

$$\Delta \cap \widetilde{\sigma}(A) \subset \sigma_{++}(A) \qquad (\Delta \cap \widetilde{\sigma}(A) \subset \sigma_{--}(A)) \tag{1.10}$$

ist und definiten Typs bezüglich A, *falls Δ positiven oder negativen Typs bezüglich A ist.*

Ist A eine selbstadjungierte Relation in $\mathcal{H}$, so ist sowohl $\sigma_{++}(A)$ als auch $\sigma_{--}(A)$ eine Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ (siehe z.B. [3]).

Erweiterungen. Es sei $\mathcal{K}$ ein KREIN-Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ eine symmetrische Relation in $\mathcal{K}$. Gibt es einen KREIN-Raum $\mathcal{H}$ und ist $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \times \mathcal{H})$ eine selbstadjungierte Relation mit $A \subset \widetilde{A} \cap \mathcal{K}^2$, so nennen wir $\widetilde{A}$ eine *selbstadjungierte Erweiterung* von A, wobei wir immer $\mathcal{K}$ mit der Einbettung in

$\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ identifizieren.
Die selbstadjungierte Erweiterung $\widetilde{A}$ von A ist eine *kanonische selbstadjungierten Erweiterung* von A, falls $\mathcal{H} = \{0\}$ ist, also (bis auf Identifizierung) $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ mit $\mathcal{K}$ zusammenfällt. Ist $\mathcal{H} \neq \{0\}$, so nennen wir $\widetilde{A}$ eine *selbstadjungierte Austrittserweiterung* von A und $\mathcal{H}$ den *Austrittsraum.*
Ist nun $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \times \mathcal{H})$ eine selbstadjungierte Erweiterung von A , so können wir, auch wenn $\lambda \notin \rho(\widetilde{A})$ ist, die Relation $(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}$ bilden. Diese ist im allgemeinen kein Operator. Bezeichnen wir nun mit $P_{\mathcal{K}}$ die Orthogonalprojektion in $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ auf $\mathcal{K}$, so definieren wir für $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ die *verallgemeinerte Resolvente* $R(\lambda)$ von A durch

$$R(\lambda) := P_{\mathcal{K}} \, (\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathcal{K}} .$$

Diese werden wir auch als *komprimierte Resolvente* von $\widetilde{A}$ bezeichnen. Ist $\widetilde{A}$ eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung von A, so ist die komprimierte Resolvente von $\widetilde{A}$ gerade die Resolvente. Ist $\lambda \in \rho(\widetilde{A})$, so ist sicher $R(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$. Die Umkehrung ist jedoch im allgemeinen nicht richtig.

1.3 Isometrische und unitäre Relationen in KREIN-Räumen

Die hier angegebenen Aussagen sind im wesentlichen der Arbeit DERKACH, HASSI, MALAMUD und DE SNOO [10] entnommen. Es seien in diesem Abschnitt $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ KREIN-Räume.

Definition 1.8. *Eine Relation $A \subset \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ heißt* isometrisch, *falls $A^{-1} \subset A^+$ ist. Gilt sogar $A^{-1} = A^+$, so nennen wir A* unitär.

Eine äquivalente Beschreibung isometrischer und unitärer Relationen wird durch das folgende Lemma gegeben.

Lemma 1.9. *Sei $A \subset \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ eine Relation.*

(i) A genau dann isometrisch, wenn für alle $\binom{f}{h}, \binom{g}{k} \in A$ die Gleichung

$$[h, k]_{\mathcal{K}} = [f, g]_{\mathcal{H}}$$

gilt.

(ii) A ist genau dann unitär, wenn A isometrisch ist und zusätzlich gilt: Ist für ein $\binom{f}{h} \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ die Beziehung

$$[h, k]_{\mathcal{K}} = [f, g]_{\mathcal{H}} \quad \textit{für alle} \begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix} \in A$$

erfüllt, so folgt $\binom{f}{h} \in A$.

Der Beweis des Lemmas ist eine unmittelbare Folgerung aus der Tatsache, daß für ein $\binom{f}{h} \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ die Bedingung $[h,k]_{\mathcal{K}} = [f,g]_{\mathcal{H}}$ für alle $\binom{g}{k} \in A$ genau dann gilt, wenn $\binom{h}{f} \in A^+$ ist.

Wir geben nun einige wichtige, wenngleich elementare Eigenschaften isometrischer und unitärer Relationen an.

Lemma 1.10. *Sei $A \subset \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ eine Relation.*

(i) Ist A isometrisch, so gilt

$$\ker A \subset (\mathrm{dom}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{H}}} \quad \text{und} \quad \mathrm{mul}\, A \subset (\mathrm{ran}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{K}}}. \tag{1.11}$$

(ii) Ist A unitär, so gilt

$$\ker A = (\mathrm{dom}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{H}}} \quad \text{und} \quad \mathrm{mul}\, A = (\mathrm{ran}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{K}}}. \tag{1.12}$$

Desweiteren ist dom A *genau dann abgeschlossen, wenn* ran A *abgeschlossen ist.*

Beweis. Die Beziehungen (1.11) und (1.12) folgen sofort aus (1.9) und der Definition der Isometrie bzw. Unitarität.
Ist A unitär, so ist insbesondere A abgeschlossen und mit Lemma 1.6 folgt, daß dom A genau dann abgeschlossen ist, wenn $\mathrm{dom}\, A^+ = \mathrm{dom}\, A^{-1} = \mathrm{ran}\, A$ abgeschlossen ist. □

Insbesondere folgt aus (1.12), daß der Kern einer unitären Relation A genau der isotrope Teil des Definitionsbereiches ist und mul (A) genau der isotrope Teil des Bildes.

Wir wollen nun eine hinreichende Bedingung angeben, unter der eine isometrische Relation auch unitär ist (siehe [10]).

Lemma 1.11. *Sei $A \subset \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ isometrisch.*

(i) Aus den Inklusionen $(\mathrm{dom}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{H}}} \subset \mathrm{dom}\, A$ *und* $(\mathrm{ran}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{K}}} \subset \mathrm{mul}\, A$ *folgt* $\ker A = (\mathrm{dom}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{H}}}$.

(ii) Ist $\ker A = (\mathrm{dom}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{H}}}$ *und* $\mathrm{dom}\, A^+ \subset \mathrm{ran}\, A$, *so ist A unitär.*

Beweis. (i) Nach (1.11) ist $\ker A \subset (\mathrm{dom}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{H}}}$. Sei nun $f \in (\mathrm{dom}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{H}}}$, das heißt, für alle $h \in \mathrm{dom}\, A$ ist $[f,h]_{\mathcal{H}} = 0$. Nach Voraussetzung ist $f \in \mathrm{dom}\, A$, also gibt es ein $g \in \mathcal{K}$ mit $\binom{f}{g} \in A$. Da A isometrisch ist, so folgt $[g,k]_{\mathcal{K}} = [f,h]_{\mathcal{H}} = 0$ für alle $\binom{h}{k} \in A$. Also ist $g \in (\mathrm{ran}\, A)^{[\perp]_{\mathcal{K}}}$ und nach Voraussetzung ist $g \in \mathrm{mul}\, A$. Also sind sowohl $\binom{f}{g}$ als auch $\binom{0}{g}$ Elemente aus A und somit auch $\binom{f}{0} = \binom{f}{g} - \binom{0}{g}$. Somit ist $f \in \ker A$ und (i) ist bewiesen.

(ii) Es ist $A^+ \subset A^{-1}$ zu zeigen. Sei hierzu $\binom{g}{f} \in A^+ \subset \mathcal{K} \times \mathcal{H}$. Somit gilt für alle $\binom{h}{k} \in A$, daß $[g,k]_{\mathcal{K}} = [f,h]_{\mathcal{H}}$ ist. Da $g \in \operatorname{dom} A^+$ und nach Voraussetzung $g \in \operatorname{ran} A$ ist, so gibt es ein $l \in \mathcal{H}$, so daß $\binom{l}{g} \in A$ ist. A ist isometrisch, also gilt $[f,h]_{\mathcal{H}} = [g,k]_{\mathcal{K}} = [l,h]_{\mathcal{H}}$ für alle $\binom{h}{k} \in A$. Somit ist $f - l \in (\operatorname{dom} A)^{[\perp]_{\mathcal{H}}}$, also $f = l + m$ für ein $m \in (\operatorname{dom} A)^{[\perp]_{\mathcal{H}}}$. Nach Voraussetzung ist nun $m \in \ker A$ und damit $\binom{m}{0} \in A$. Schließlich folgt $\binom{f}{g} = \binom{l+m}{g} = \binom{l}{g} + \binom{m}{0} \in A$. Also ist $\binom{g}{f} \in A^{-1}$.

□

Mit A ist auch A^{-1} isometrisch und somit folgt aus Lemma 1.11 durch den Übergang von A auf A^{-1} das folgende Korollar.

Korollar 1.12. *Sei $A \subset \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ isometrisch.*

(i) Ist $(\operatorname{ran} A)^{[\perp]_{\mathcal{K}}} \subset \operatorname{ran} A$ *und* $(\operatorname{dom} A)^{[\perp]_{\mathcal{H}}} \subset \ker A$, *so ist* $\operatorname{mul} A = (\operatorname{ran} A)^{[\perp]_{\mathcal{K}}}$.

(ii) Ist $\operatorname{mul} A = (\operatorname{ran} A)^{[\perp]_{\mathcal{K}}}$ *und* $\operatorname{ran} A^+ \subset \operatorname{dom} A$, *so ist A unitär.*

In dieser Arbeit wird die Isometrie und Unitarität bezüglich des inneren Produktes $[\![\cdot,\cdot]\!]_{\mathcal{H}^2}$ (siehe (1.5)) eine große Rolle spielen. Deshalb vereinbaren wir die

Bezeichnung 1.13. *Eine Relation $\Gamma \subset \mathcal{H}^2 \times \mathcal{K}^2$ heißt* $[\![\cdot,\cdot]\!]$-isometrisch ($[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitär), *falls Γ isometrisch (unitär) bezüglich der* KREIN-*Räume* $(\mathcal{H}^2, [\![\cdot,\cdot]\!]_{\mathcal{H}^2})$ *und* $(\mathcal{K}^2, [\![\cdot,\cdot]\!]_{\mathcal{K}^2})$ *ist.*

Nach Lemma 1.9 ist Γ genau dann $[\![\cdot,\cdot]\!]$-isometrisch, wenn die sogenannte abstrakte GREEN*sche Identität* gilt, also für alle $\{\hat{f},\hat{h}\}, \{\hat{g},\hat{k}\} \in \Gamma$ folgendes gilt:

$$[\![\hat{f},\hat{g}]\!]_{\mathcal{H}^2} = [\![\hat{h},\hat{k}]\!]_{\mathcal{K}^2}, \text{ also } [f,g']_{\mathcal{H}} - [f',g]_{\mathcal{H}} = [h,k']_{\mathcal{K}} - [h',k]_{\mathcal{K}}. \tag{1.13}$$

Genau dann, wenn die Gültigkeit von (1.13) für ein $\{\hat{f},\hat{h}\} \in \mathcal{H}^2 \times \mathcal{K}^2$ und alle $\{\hat{g},\hat{k}\} \in \Gamma$ impliziert, daß $\{\hat{f},\hat{h}\} \in \Gamma$ ist, so ist Γ $[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitär.

Wir geben noch ein Resultat aus [10] über einige Abbildungseigenschaften von $[\![\cdot,\cdot]\!]$-isometrischen Relationen an.

Lemma 1.14. *Sei $\mathcal{H}$ ein* KREIN-*Raum, $\mathcal{K}$ ein* HILBERT-*Raum und* $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2,\mathcal{K}^2)$ *eine $[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitäre Relation. Es sei* $B \subset T = \operatorname{dom} \Gamma$ *eine Relation in $\mathcal{H}^2$. Dann gilt*

(i) B ist symmetrisch in $\mathcal{H}^2$ genau dann, wenn $\Gamma(B)$ symmetrisch in $\mathcal{K}^2$ ist.

(ii) Ist $B^+ \subset T$, dann ist $\Gamma(B^+) \subset (\Gamma(B))^*$.

(iii) Ist $B^+ \subset T$ und $\Gamma(B)$ wesentlich selbstadjungiert in $\mathcal{K}^2$, so ist B wesentlich selbstadjungiert in $\mathcal{H}^2$.

Beweis. Es ist $\Gamma(B) = \left\{\hat{h} \;\middle|\; \{\hat{f}, \hat{h}\} \in \Gamma \text{ für ein } \hat{f} \in B\right\}$.

(i) Sei $B \subset B^+$ und seien $\hat{h}, \hat{k} \in \Gamma(B)$ beliebig. Es gibt also $\hat{f}$, $\hat{g} \in B$ mit $\{\hat{f}, \hat{h}\}, \{\hat{g}, \hat{k}\} \in \Gamma$. Da B symmetrisch ist, gilt mit der $[\![\cdot,\cdot]\!]$-Unitarität von Γ

$$0 = [f, g']_{\mathcal{H}} - [f', g]_{\mathcal{H}} = (h, k')_{\mathcal{K}} - (h', k)_{\mathcal{K}}. \tag{1.14}$$

Also ist $\hat{h} \in (\Gamma(B))^*$ und somit $\Gamma(B)$ symmetrisch. Die andere Richtung folgt analog.

(ii) Sei $\hat{h} \in \Gamma(B^+)$, also $\{\hat{f}, \hat{h}\} \in \Gamma$ für ein $\hat{f} \in B^+$. Sei nun $\hat{k} \in \Gamma(B)$ beliebig, also $\{\hat{g}, \hat{k}\} \in \Gamma$ für ein $\hat{g} \in B$. Dann gilt (1.14) und somit $\hat{h} \in (\Gamma(B))^*$.

(iii) Sei $\Gamma(B)$ wesentlich selbstadjungiert, also $\operatorname{clos}(\Gamma(B)) = (\Gamma(B))^*$. Insbesondere ist $\Gamma(B)$ symmetrisch und nach (i) ist damit B symmetrisch, das heißt $B \subset B^+$. Nach (ii) folgt $\Gamma(B) \subset \Gamma(B^+) \subset (\Gamma(B))^*$ und damit $\operatorname{clos}(\Gamma(B)) \subset \operatorname{clos}(\Gamma(B^+)) \subset (\Gamma(B))^* = \operatorname{clos}(\Gamma(B))$. Also gilt $\operatorname{clos}(\Gamma(B)) = \operatorname{clos}(\Gamma(B^+)) = (\Gamma(B))^*$ Wir bilden die Adjungierten und erhalten

$$(\Gamma(B^+))^* = \big(\operatorname{clos}\,(\Gamma(B^+))\big)^* = ((\Gamma(B))^*)^* = \operatorname{clos}(\Gamma(B)) = \operatorname{clos}(\Gamma(B^+)).$$

Somit ist $\Gamma(B^+)$ wesentlich selbstadjungiert und damit symmetrisch, also wieder nach (i) auch B^+ symmetrisch. Damit ist $B^+ \subset (B^+)^+ = \operatorname{clos}(B)$ und schließlich $B^+ = \operatorname{clos}(B)$.

□

1.4 Lokal Definisierbare Relationen

H. Langer nennt in seiner Habilitationsschrift [35] einen selbstadjungierten Operator A in einem Krein-Raum $\mathcal{K}$ *definisierbar*, falls die Resolventenmenge von A nichtleer ist, und es ein reelles Polynom p, $p \neq 0$, gibt, so daß

$$[p(A)f, f]_{\mathcal{K}} \geq 0 \quad \text{für alle } f \in \operatorname{dom}\big(p(A)\big) \tag{1.15}$$

gilt. In [17] geben A. Dijksma und H. de Snoo eine analoge Definition für selbstadjungierte Relationen an.

Definitionen. P. Jonas führt in [25] lokal definisierbare Operatoren ein; wir geben hier die Definition für selbstadjungierte Relationen an (siehe z.B. Jonas [27] oder Azizov et al. [3]):

Definition 1.15. *Sei Ω ein bezüglich der reellen Achse symmetrisches Gebiet in $\overline{\mathbb{C}}$, so daß $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ gilt und $\Omega \cap \mathbb{C}^+$ sowie $\Omega \cap \mathbb{C}^-$ einfach zusammenhängend sind. Es sei $\mathcal{K}$ ein* Krein*-Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ eine selbstadjungierte Relation, so daß $\sigma(A) \cap (\Omega \backslash \overline{\mathbb{R}})$ nur aus isolierten Punkten besteht, welche Pole der Resolvente sind, und so, daß kein Punkt aus $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ Häufungspunkt des nichtreellen Spektrums von A in Ω ist. Die Relation A heißt* definisierbar über Ω*, falls*

(i) für jede offene Menge Δ mit $\overline{\Delta} \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ eine in $\overline{\mathbb{C}}$ offene Umgebung $\mathcal{U} \subset \overline{\mathbb{C}}$ von $\overline{\Delta}$ und Zahlen M, m mit $m \geq 1, M > 0$ existieren, so daß

$$||(A-\lambda)^{-1}|| \leq \frac{M(|\lambda|+1)^{2m-2}}{|\mathrm{Im}\ \lambda|^m} \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathcal{U} \backslash \overline{\mathbb{R}}$$

gilt und

(ii) es für jeden Punkt $\lambda \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ eine in $\overline{\mathbb{R}}$ offene, zusammenhängende Umgebung I_λ von λ gibt, so daß beide Zusammenhangskomponenten von $I_\lambda \backslash \{\lambda\}$ von definitem Typ bezüglich A sind (siehe (1.10)).

In [27] zeigt P. Jonas, daß ein Operator genau dann definisierbar im Sinne von (1.15) ist, wenn er definisierbar über $\overline{\mathbb{C}}$ im Sinne der Definition 1.15 ist.

Definition 1.16. *Sei Ω ein Gebiet wie in Definition 1.15, $\mathcal{K}$ und $\mathcal{H}$* Krein*-Räume und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$, $B \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ über Ω definisierbare Relationen. Dann nennen wir A und B* d-kompatibel in Ω*, falls es für jeden Punkt $\lambda \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ eine offene, zusammenhängende Umgebung $I_\lambda \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ von λ derart gibt, daß die rechtsseitige Komponente von $I_\lambda \backslash \{\lambda\}$ von gleichem Typ bezüglich A und B ist und die linksseitige Komponente von $I_\lambda \backslash \{\lambda\}$ von gleichem Typ bezüglich A und B ist.*

Es sei Ω wie in Definition 1.15 und Δ eine offene Teilmenge von $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}(\Delta)$ den Booleschen Ring aller endlichen Vereinigungen zusammenhängender Teilmengen von Δ, deren Randpunkte (in $\overline{\mathbb{R}}$) Elemente von Δ sind.

Definition 1.17. *Es sei Ω wieder ein Gebiet wie in Definition 1.15 und A eine selbstadjungierte Relation in $\mathcal{K}$, deren nichtreelles Spektrum in Ω sich gegen keinen Punkt aus $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ häuft und nur aus isolierten Punkten besteht, die alle Pole der Resolvente sind. Es sei Δ eine offene Teilmenge von $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$. Wir sagen, A habe eine* Spektralfunktion E auf Δ*, falls*

(i) $E : \mathcal{B}(\Delta) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ ein stark σ-additiver Homomorphismus ist,

(ii) die Bilder von E selbstadjungierte Projektoren in $\mathcal{K}$ sind und

(iii) für jedes $\delta \in \mathcal{B}(\Delta)$ folgendes gilt.

(a) *Ist* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ *und vertauscht* T *mit der Resolvente von* A *in einem Punkt der Resolventenmenge von* A*, so vertauscht* T *mit* $E(\delta)$*.*

(b) $\widetilde{\sigma}\left(A \cap (E(\delta)\mathcal{K})^2\right) \subset \widetilde{\sigma}(A) \cap \overline{\delta}$ *und*
$\widetilde{\sigma}\left(A \cap ((I - E(\delta))\mathcal{K})^2\right) \subset \widetilde{\sigma}(A) \backslash \delta^0$,
wobei δ^0 *das Innere von* δ *in* $\overline{\mathbb{R}}$ *ist.*

In [27] zeigt P. Jonas, daß die Spektralfunktion von A auf δ eindeutig definiert ist und beweist folgende Charakterisierung lokal definisierbarer Relationen.

Satz 1.18. *Es seien* Ω *und* A *wie in Definition 1.17. Dann ist* A *genau dann definisierbar über* Ω*, wenn folgendes gilt.*
Für jede abgeschlossene Menge $K \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ *gibt es eine offene Menge* Δ_0*, welche die Vereinigung einer endlichen Anzahl offener, zusammenhängender Mengen ist, so daß* $K \subset \Delta_0$ *und* $\overline{\Delta_0} \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ *gilt, und einen selbstadjungierten Projektor* $E_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$*, der mit jedem beschränkten Operator vertauscht, mit dem die Resolvente von* A *vertauscht, so daß sich* A *in*

$$A = A \cap (E_0\mathcal{K})^2 \dot{+} A \cap ((I - E_0)\mathcal{K})^2$$

zerlegen läßt, wobei

(i) *die Relation* $A \cap (E_0\mathcal{K})^2$ *definisierbar ist,*

(ii) $\widetilde{\sigma}\left(A \cap (E_0\mathcal{K})^2\right) \subset \widetilde{\sigma}(A) \cap \overline{\Delta_0}$*, sowie*
$\widetilde{\sigma}\left(A \cap ((1 - E_0)\mathcal{K})^2\right) \subset \widetilde{\sigma}(A) \backslash \Delta_0$ *ist und*

In diesem Fall existiert dann insbesondere für alle abgeschlossenen endlichen Vereinigungen δ *zusammenhängender Teilmengen von* $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$*, deren Endpunkte aus* $\sigma_{++}(A) \cup \sigma_{--}(A) \cup \widetilde{\rho}(A)$ *sind, der Spektralprojektor* $E(\delta)$ *von* A *aus Definition 1.17.*

Eigenschaften. Die lokale Spektralfunktion ermöglicht eine äquivalente Definition von Intervallen, welche im Sinne der Definition 1.7 von positivem beziehungsweise negativem Typ bezüglich einer lokal definisierbaren Relation sind (siehe Jonas [27], Behrndt [6]).

Lemma 1.19. *Sei* Ω *wie in Definition 1.15 und* A *eine über* Ω *definisierbare Relation. Es sei* $\Delta \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ *offen. Dann ist folgendes äquivalent.*

(i) Δ *ist von positivem (negativem) Typ bezüglich* A*,*

(ii) *Für jede endliche Vereinigung* δ *offener, zusammenhängender Teilmengen von* Δ*, so daß* $\overline{\delta} \subset \Delta$ *gilt und die Randpunkte von* δ *in* $\overline{\mathbb{R}}$ *definiten Typs bezüglich* A *sind (Definition 1.7), sind die Räume*

$$(E(\delta)\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}}) \quad \big(\text{bzw. } (E(\delta)\mathcal{K}, -[\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}})\big) \tag{1.16}$$

Hilbert-*Räume.*

Definition 1.20. *Seien Ω, A und Δ wie in Lemma 1.19. Die Menge Δ heißt* vom Typ π_+ (Typ π_-) bezüglich A, *falls für jede endliche Vereinigung δ offener, zusammenhängender Teilmengen von Δ, so daß $\overline{\delta} \subset \Delta$ gilt und die Randpunkte von δ in $\overline{\mathbb{R}}$ definiten Typs bezüglich A sind (Definition 1.7), die Räume*

$$(E(\delta)\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}}) \quad \big(\text{bzw. } (E(\delta)\mathcal{K}, -[\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}})\big)$$

PONTRYAGIN-*Räume sind.*
Die Relation A ist vom Typ $\pi_+ (\pi_-)$ über Ω, falls $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ vom Typ π_+ (π_-) bezüglich A ist.

Lemma 1.21. *Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{H}$* KREIN-*Räume, $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$, $B \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ selbstadjungierte Relationen und Ω ein Gebiet wie in Definition 1.15.*

(i) Ist die selbstadjungierte Relation $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) \in \widetilde{\mathcal{C}}((\mathcal{K} \times \mathcal{H}))$ (vgl. (1.3)) definisierbar über Ω, so sind auch A und B definisierbar über Ω und A, B und $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ sind paarweise d-kompatibel über Ω.

(ii) Sind A und B definisierbar und d-kompatibel über Ω, so ist auch $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ definisierbar über Ω und d-kompatibel zu A und B.

Beweis. Wir zeigen (i) und (ii) gemeinsam. Es ist nach Definition 1.15 jeweils zu zeigen, daß das nichtreelle Spektrum die geforderten Eigenschaften hat (Teil (a) des Beweises), daß das Resolventenwachstum zur reellen Achse von endlicher Ordnung ist (Teil (b)) und daß Umgebungen von reellen Punkten in Ω die angegebenen Spektraleigenschaften besitzen (Teil (c)).

(a) Es ist leicht zu sehen, daß $\rho(\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)) = \rho(A) \cap \rho(B)$ ist und für $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) - \lambda\right)^{-1} = \begin{pmatrix} (A-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (B-\lambda)^{-1} \end{pmatrix}$$

gilt. Somit besteht das nichtreelle Spektrum von $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ in Ω genau dann aus isolierten Punkten, welche Pole der Resolvente sind und sich nicht zur reellen Achse häufen, wenn dies für das nichtreelle Spektrum von A und B in Ω der Fall ist.

(b) Es ist für alle $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$

$$||(\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) - \lambda)^{-1}|| = \max\left\{||(A-\lambda)^{-1}||, ||(B-\lambda)^{-1}||\right\}. \tag{1.17}$$

Sei zuerst Δ eine offene Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ mit $\Delta \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ und sei $\mathcal{U}$ eine offene Umgebung von $\overline{\Delta}$ in $\overline{\mathbb{C}}$, $M > 0, m \geq 1$, so daß

$$||(\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) - \lambda)^{-1}|| \leq \frac{M(|\lambda|+1)^{2m-2}}{|\text{Im } \lambda|^m} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathcal{U}\backslash\overline{\mathbb{R}} \tag{1.18}$$

gilt. Mit (1.17) folgt dann auch

$$||(A-\lambda)^{-1}|| \leq \frac{M(|\lambda|+1)^{2m-2}}{|\mathrm{Im}\ \lambda|^m} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathcal{U}\backslash\overline{\mathbb{R}}$$

und die analoge Aussage für B.
Seien nun $\mathcal{U}_A, \mathcal{U}_B$ offene Umgebungen von $\overline{\Delta}$ in $\overline{\mathbb{C}}$ und $M_A,\ M_B > 0$, $m_A, m_B \geq 1$, so daß für alle $\lambda \in \mathcal{U}_A\backslash\overline{\mathbb{R}}$ und $\mu \in \mathcal{U}_B\backslash\overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$||(A-\lambda)^{-1}|| \leq \frac{M_A(|\lambda|+1)^{2m_A-2}}{|\mathrm{Im}\ \lambda|^{m_A}} \quad \text{und}$$
$$||(B-\mu)^{-1}|| \leq \frac{M_B(|\mu|+1)^{2m_B-2}}{|\mathrm{Im}\ \mu|^{m_B}}.$$

Dann ist $\mathcal{U} := \mathcal{U}_A \cap \mathcal{U}_B$ eine offene Umgebung von $\overline{\Delta}$ in $\overline{\mathbb{C}}$. Mit $m := \max\{m_A, m_B\}$ und $M := \max M_A, M_B$ folgt aus (1.17), daß (1.18) gilt.

(c) Sei $\mu \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ und I_μ eine offene, zusammenhängende Umgebung von μ in $\overline{\mathbb{R}}$, so daß beide Komponenten von $I_\mu\backslash\{\mu\}$ definiten Typs bezüglich $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ sind. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\infty \notin I_\mu\backslash\{\mu\}$ ist. Sei $\lambda \in I_\mu\backslash\{\mu\}$ beliebig. Ist $\lambda \in \rho(\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right))$, so ist auch $\lambda \in \rho(A)$. Ist nun $\lambda \in \sigma(\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right))$, oBdA $\lambda \in \sigma_{++}(\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right))$, dann ist entweder $\lambda \in \rho(A)$ oder $\lambda \in \sigma(A)$. Im zweiten Fall ist dann $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$. Sei $\binom{f}{f'} : \mathbb{N} \to A$ eine beliebige Folge mit $||f_n|| = 1$ und $||f_n' - \lambda f_n|| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann ist $\left\{\binom{f}{0}, \binom{f'}{0}\right\} : \mathbb{N} \to \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ eine Folge mit $||\binom{f_n}{0}|| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $||\binom{f_n'}{0} - \lambda\binom{f_n}{0}|| \to 0$ für $n \to \infty$. Also folgt

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \left[\begin{pmatrix} f_n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_n \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{K}\times\mathcal{H}} = \liminf_{n\to\infty} [f_n, f_n]_{\mathcal{H}}$$

und somit ist $\lambda \in \sigma_{++}(A)$. Der Fall $\lambda \in \sigma_{--}(\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right))$ folgt ganz analog. Die gleichen Überlegungen gelten für B anstelle von A. Damit sind nach Definition 1.15 die Relationen A und B über Ω definisierbar und darüber hinaus sind A, B und $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ paarweise d-kompatibel in Ω.

Sei nun $\mu \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ und I_μ eine offene, zusammenhängende Umgebung von μ in $\overline{\mathbb{R}}$, so daß beide Komponenten von $I_\mu\backslash\{\mu\}$ gleichen Typs bezüglich A und B sind.
Sei Δ_+ eine der Komponenten von $I_\mu\backslash\{\mu\}$, welche positiven Typs bezüglich A und B sei (der Fall negativen Typs folgt ganz analog). Dann ist Δ_+ auch von positivem Typ bezüglich $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es ein $\lambda \in \Delta_+ \cap \sigma_{ap}(\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right))$ und eine Folge $\left\{\binom{f}{g}, \binom{f'}{g'}\right\} : \mathbb{N} \to \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ mit $||\binom{f_n}{g_n}||^2 = ||f_n||^2 + ||g_n||^2 = 1$ für alle

$n \in \mathbb{N}$ und $||\binom{f_n'}{g_n'} - \lambda\binom{f_n}{g_n}||^2 = ||f_n' - \lambda f_n||^2 + ||g_n' - \lambda g_n||^2 \to 0$ für $n \to \infty$, so daß

$$\liminf_{n\to\infty}[f_n, f_n]_{\mathcal{K}} + \liminf_{n\to\infty}[g_n, g_n]_{\mathcal{H}} \leq \liminf_{n\to\infty} \left[\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{K}\times\mathcal{H}} \leq 0$$

gilt. Der Fall, daß $\liminf_{n\to\infty}[f_n, f_n]_{\mathcal{K}} < 0$ oder $\liminf_{n\to\infty}[g_n, g_n]_{\mathcal{H}} < 0$ ist, führt sofort zu einem Widerspruch zu $\Delta_+ \subset \sigma_{++}(A) \cup \rho(A)$ und $\Delta_+ \subset \sigma_{++}(B) \cup \rho(B)$. Seien nun also $\liminf_{n\to\infty}[f_n, f_n]_{\mathcal{K}}$ und $\liminf_{n\to\infty}[g_n, g_n]_{\mathcal{H}}$ gleich null. Zumindest eine der Folgen $\binom{f}{f'} : \mathbb{N} \to A$ und $\binom{g}{g'} : \mathbb{N} \to B$ ist, nach Ausschluß der Glieder, welche gleich null sind, und anschließender Normierung, eine approximative Eigenfolge für A bzw. B. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\Delta_+ \subset \sigma_{++}(A) \cup \rho(A)$ und $\Delta_+ \subset \sigma_{++}(B) \cup \rho(B)$.
Somit ist $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ definisierbar über Ω und die beiden Komponenten von $I_\mu \backslash \{\mu\}$ sind gleichen Typs bezüglich A, B und $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$.

Damit sind beide Behauptungen bewiesen. □

1.5 NEVANLINNA-Funktionen und -Familien

NEVANLINNA-Funktionen und -Familien werden in einer Fülle von Arbeiten behandelt, es seien nur [29] für den Fall skalarer NEVANLINNA-Funktionen und im allgemeinen [15] und [33] genannt.

Wir werden nun Funktionen untersuchen, deren Bilder Operatoren oder Relationen im HILBERT-Raum H sind. Relationswertige Funktionen nennen wir *Relationenfamilien* (wir folgen hier den Bezeichnungen aus [10]).
Für eine in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ stückweise meromorphe, $\mathcal{L}(H)$-wertige Funktion τ bezeichnen wir mit $\mathfrak{h}(\tau)$ die Menge der Punkte aus $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, in denen τ holomorph ist. Ist τ eine Relationenfamilie mit Bildern in $\widetilde{\mathcal{C}}(H)$, so sagen wir τ sei *holomorph* in einem Punkt $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, falls es eine Umgebung $\mathcal{U}_0$ von λ_0 und es einen weiteren HILBERT-Raum H_1 gibt, sowie operatorwertige, in $\mathcal{U}_0$ holomorphe Funktionen Φ und Ψ, die Werte in $\mathcal{L}(H_1, H)$ annehmen, so daß

$$\tau(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} \Phi(\lambda)h_1 \\ \Psi(\lambda)h_1 \end{pmatrix} \in H^2 \;\middle|\; h_1 \in \mathcal{H}_1 \right\}, \quad \lambda \in \mathcal{U}_0 \tag{1.19}$$

gilt und für alle $\lambda \in \mathcal{U}_0$

$$\ker\, \Phi(\lambda) \cap \ker\, \Psi(\lambda) = \{0\}$$

ist. Eine Relationenfamilie τ heißt *symmetrisch zur reellen Achse*, falls die Menge der Punkte, in denen τ holomorph ist, symmetrisch zur reellen Achse ist und für jeden solchen Punkt λ

$$\tau(\overline{\lambda}) = \tau(\lambda)^*$$

gilt.
Für $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertige Funktionen τ, die symmetrisch zur reellen Achse sind, ergänzen wir das Holomorphiegebiet um die reellen Punkte, in die τ analytisch fortgesetzt werden kann und die Fortsetzungen aus der oberen und der unteren Halbebene übereinstimmen. Wir können nun NEVANLINNA-Familien definieren (siehe [14]).

Definition 1.22. *Sei $\mathcal{H}$ ein* HILBERT-*Raum und τ eine Relationenfamilie, die symmetrisch zur reellen Achse ist. Wir nennen τ eine N_κ*-Familie, *$\tau \in \widetilde{N}_\kappa(\mathcal{H})$, falls es einen Punkt $\lambda_0 \in \mathbb{C}^+ \cap \mathfrak{h}(\tau)$ gibt mit $\rho(\tau(\lambda_0)) \neq \emptyset$ und für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathfrak{h}(\tau)$ und $\binom{h_1}{h_1'} \in \tau(\lambda_1), \dots, \binom{h_n}{h_n'} \in \tau(\lambda_n)$ die Matrix*

$$\left(\frac{(h_i', h_j)_H - (h_i, h_j')_H}{\lambda_i - \overline{\lambda}_j} \right)_{i,j=1}^{n} \tag{1.20}$$

höchstens κ viele negative Eigenwerte und für eine Wahl von n, λ_i, $\binom{h_i}{h_i'}$, $i = 1, \dots, n$, genau κ negative Eigenwerte hat.

Ist $\tau \in \widetilde{N}_\kappa(\mathcal{H})$ und τ $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertig, so heißt τ *verallgemeinerte* NEVANLINNA-*Funktion* und wir schreiben $\tau \in N_\kappa(\mathcal{H})$. In diesem Fall wird (1.20) zu

$$\mathrm{N}_\tau(\lambda, \mu) = \frac{\tau(\lambda) - \tau(\mu)^*}{\lambda - \overline{\mu}} \qquad \text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{C}^+ \cap \mathfrak{h}(\tau).$$

Ist τ skalar, so notieren wir $\tau \in N_\kappa(\mathbb{C}) =: N_\kappa$.
Verallgemeinerte NEVANLINNA-Funktionen haben Darstellungen durch Relationen in PONTRYAGIN-Räumen ([32], [20]). Sei $\tau \in N_\kappa(\mathcal{H})$. Dann gibt es einen π_κ-Raum $\mathcal{K}$, eine selbstadjungierte Relation $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$, $\rho(A) \cap (\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}) = \mathfrak{h}(\tau) \cap (\mathbb{C} \backslash \mathbb{R})$, und einen Operator $\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, so daß für einen festen Punkt $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \mathbb{C}^+$ und beliebige $\lambda \in \rho(A)$ die Darstellung

$$\tau(\lambda) = \mathrm{Re}\ \tau(\lambda_0) + \gamma^+ \big(\lambda - \mathrm{Re}\ \lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \overline{\lambda_0})(A - \lambda)^{-1} \big) \gamma \tag{1.21}$$

und die Minimalitätsbedingung

$$\mathcal{K} = \mathrm{clsp}\ \left\{ \big(I + (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda)^{-1} \big) \gamma h \;\middle|\; \lambda \in \rho(A), h \in \mathcal{H} \right\} \tag{1.22}$$

gelten.
Ist $\tau \in N_\kappa(\mathcal{H})$ und τ in einem Punkt $\lambda_0 \in \mathfrak{h}(\tau)$ beschränkt invertierbar, so ist auch $\hat{\tau} := -\tau^{-1} \in N_\kappa(\mathcal{H})$ (siehe hierzu z.B. LUGER [38]).

Ist $\mathfrak{h}(\tau) \supset \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ und hat die Matrix (1.20) keine negativen Quadrate, so nennen wir τ eine NEVANLINNA-*Familie*. Die Definition 1.22 können wir in diesem Fall schreiben als

Definition 1.23. *Sei $\mathcal{H}$ ein* HILBERT-*Raum. Eine Relationenfamilie τ, deren Bilder Relationen in $\mathcal{H}$ sind, heißt* NEVANLINNA-Familie, *falls* *(i)* τ *symmetrisch zur reellen Achse ist,*

(ii) für alle $\lambda \in \mathbb{C}^+$ *und alle* $\binom{f}{f'} \in \tau(\lambda)$ *gilt* $\operatorname{Im} \left(f', f\right)_{\mathcal{H}} \geq 0$,

(iii) $-\lambda \in \rho(\tau(\lambda))$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *ist.*

Die Menge der NEVANLINNA-Familien bezeichnen wir mit $\widetilde{\mathcal{R}}(\mathcal{H})$.
Aus (iii) folgt, daß für jedes $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ die Relation $\tau(\lambda)$ eine nichtleere Resolventenmenge hat, also abgeschlossen ist; τ ist somit $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$-wertig.
Für NEVANLINNA-Familien ist die Bedingung *(iii)* äquivalent zu

(iii') für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^+$ $(\mathbb{C}^-)$ ist $-\mu \in \rho(\tau(\lambda))$,

siehe [15].
Ist τ eine NEVANLINNA-Familie, so ist mul (τ) unabhängig von λ (siehe z.B. LANGER und TEXTORIUS [33]). Dieses Resultat kann auch mit den Methoden der Randrelationen aus DERKACH et al. [10] bewiesen werden (Lemma 3.26).
Ist $\tau(\lambda_0)$ ein Operator für ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, also mul $\tau(\lambda_0) = \{0\}$, so ist also $\tau(\lambda) \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und τ ist eine operatorwertige Funktion, welche wir NEVANLINNA-*Funktion* nennen. Die Menge der NEVANLINNA-Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{R}(\mathcal{H})$. Im Zusammenhang mit Randtripeln und -relationen ist folgende weitere Unterscheidung sinnvoll.
Mit $\mathcal{R}[\mathcal{H}]$ bezeichnen wir die Menge der NEVANLINNA-Familien $\tau \in \widetilde{\mathcal{R}}(\mathcal{H})$, für die gilt: dom $\tau(\lambda) = \mathcal{H}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Für $\tau \in \mathcal{R}[\mathcal{H}]$ ist nach (1.9) für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$: mul $\tau(\lambda) = \left(\operatorname{dom} \tau(\lambda)\right)^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$, also ist $\mathcal{R}[\mathcal{H}] \subset \mathcal{R}(\mathcal{H})$. Weiterhin ist nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen sogar $\tau(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, also ist $\mathcal{R}[\mathcal{H}]$ die Menge der $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertigen NEVANLINNA-Funktionen. Es ist somit $\mathcal{R}[\mathcal{H}] = N_0(\mathcal{H})$.
Es gilt weiterhin, daß der Kern des Imaginärteils einer NEVANLINNA-Familie unabhängig von λ ist. Wir definieren nun $\mathcal{R}^s[\mathcal{H}]$ als die Teilmenge von $\mathcal{R}[\mathcal{H}]$, für deren Elemente gerade ker Im $\tau(\lambda_0) = \{0\}$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ (und damit für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$) gilt. Diese NEVANLINNA-Funktionen heißen *strikt*.
Ist für ein (und somit für alle) $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ sogar $0 \in \rho(\tau(\lambda_0))$, so nennen wir τ *uniform strikt* und schreiben $\tau \in \mathcal{R}^u[\mathcal{H}]$. Es gilt also

$$\mathcal{R}^u[\mathcal{H}] \subset \mathcal{R}^s[\mathcal{H}] \subset \mathcal{R}[\mathcal{H}] \subset \mathcal{R}(\mathcal{H}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\mathcal{H}).$$

Für NEVANLINNA-Funktionen $\tau \in \mathcal{R}[\mathcal{H}]$ existiert eine Integraldarstellung (für $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ findet man diese z.B. im Buch von ACHIESER und GLASMANN [1]), nämlich

$$\tau(\lambda) = A + B\lambda + \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{t^2+1}\Big) d\Sigma(t) \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{1.23}$$

Hier ist $A = A^*$, $B = B^* \geq 0$ und Σ eine $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertige, nichtfallende Operatorfunktion, so daß das Integral $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2+1} d\Sigma(t)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ konvergiert. Die

Integrale verstehen wir als RIEMANN-STIELTJES-Integrale.
Normalisiert man Σ durch $\Sigma(t) = \frac{1}{2}(\Sigma(t+) + \Sigma(t-))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\Sigma(0) = 0$, so ist diese Darstellung eindeutig durch τ bestimmt. Es ist dann $A = \mathrm{Re}\ \tau(i)$ und B ist der starke Grenzwert $B = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y}\mathrm{Im}\ \tau(iy)$.

Für NEVANLINNA-Funktionen der Klasse $\mathcal{R}[\mathcal{H}]$ kann aus (1.23) eine Darstellung durch die Resolvente einer Relation abgeleitet werden. Ist $\tau \in \mathcal{R}[\mathcal{H}]$ und $\lambda_0 \in \mathbb{C}^+$, so gibt es einen HILBERT-Raum $\mathcal{K}$, eine selbstadjungierte Relation $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ und einen linearen Operator $\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, so daß für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ gilt

$$\tau(\lambda) = \mathrm{Re}\ \tau(\lambda_0) + \gamma^*\big(\lambda - \mathrm{Re}\ \lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \overline{\lambda_0})(A - \lambda)^{-1}\big)\gamma. \quad (1.24)$$

Auch hier kann eine solche Darstellung *minimal* gewählt werden, das heißt, daß

$$\mathcal{K} = \mathrm{clsp}\ \left\{\big(I + (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda)^{-1}\big)\,\gamma h \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, h \in \mathcal{H}\right\} \quad (1.25)$$

gilt. Wir definieren die Unterklasse $\mathcal{R}_0[\mathcal{H}]$ von $\mathcal{R}[\mathcal{H}]$ durch

$$\mathcal{R}_0[\mathcal{H}] := \left\{\tau \in \mathcal{R}[\mathcal{H}] \;\middle|\; \text{der starke Grenzwert } \lim_{y\to\infty} y\mathrm{Im}\ \tau(iy) \text{ existiert}\right\}.$$

τ ist genau dann in der Klasse $\mathcal{R}_0[\mathcal{H}]$, wenn die Integraldarstellung (1.23) die Form

$$\tau(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - \lambda} d\Sigma(t) \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \quad (1.26)$$

annimmt. Dann ist $0 \leq \int_{\mathbb{R}} d\Sigma(t) = \lim_{\lambda\to\infty} y\mathrm{Im}\ \tau(iy)$.

1.6 Lokal Definisierbare Funktionen

Sei $\mathcal{K}$ ein HILBERT-Raum. Eine auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ meromorphe Funktion G, welche Werte in $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ annimmt und symmetrisch zur reellen Achse ist, heißt *definisierbar*, falls es eine skalare rationale Funktion r gibt, welche symmetrisch zur reellen Achse ist, so daß

$$r(\lambda)G(\lambda) = N(\lambda) + P(\lambda) \quad (1.27)$$

für alle Punkte in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, in denen rG holomorph ist, gilt. Hierbei ist N eine NEVANLINNA-Funktion und P eine $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-wertige Funktion, welche meromorph auf $\overline{\mathbb{C}}$ ist und deren Pole im Holomorphiegebiet von G liegen.
Der Zusammenhang mit den Resolventen definisierbarer Relationen offenbart sich in den folgenden Definitionen. Wir erinnern daran, daß eine Relation genau dann definisierbar im Sinne von (1.15) ist, wenn sie definisierbar über $\overline{\mathbb{C}}$ im Sinne von Definition 1.15 ist.
Analog zu Definition 1.7 erklären wir Mengen positiven und negativen Typs bezüglich einer Operatorfunktion folgendermaßen.

Definition 1.24. *Sei $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, welches symmetrisch bezüglich der reellen Achse ist mit $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ und für das gilt, daß $\Omega \cap \mathbb{C}^+$ und $\Omega \cap \mathbb{C}^-$ einfach zusammenhängend sind. Es sei $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum, G eine in $\Omega \backslash \overline{\mathbb{R}}$ meromorphe Funktion, welche Werte in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ annimmt, symmetrisch bezüglich der reellen Achse ist und deren nichtreelle Polstellen sich nicht gegen $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ häufen.*
Eine offene Teilmenge $\Delta \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ heißt von positivem (negativem) Typ bezüglich *G, falls für jedes $f \in \mathcal{H}$ und jede Folge $\lambda : \mathbb{N} \to \mathfrak{h}(G) \cap \Omega \cap \mathbb{C}^+$, welche in $\overline{\mathbb{C}}$ gegen einen Punkt aus Δ konvergiert,*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{Im}\ (G(\lambda_n)x, x)_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \left(\liminf_{n\to\infty} \mathrm{Im}\ (G(\lambda_n)x, x)_{\mathcal{H}} \leq 0 \right)$$

gilt. Δ heißt definiten Typs bezüglich G, falls Δ positiven oder negativen Typs bezüglich G ist.

Nun können wir die lokale Version definisierbarer Funktionen aus [27] einführen (vergleiche hierzu die Definition 1.15 lokal definisierbarer Relationen).

Definition 1.25. *Seien Ω und G wie in Definition 1.24. Wir nennen G* definisierbar in Ω, *falls*

(i) für jede offene Menge Δ mit $\overline{\Delta} \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ eine in $\overline{\mathbb{C}}$ offene Umgebung $\mathcal{U}$, $\overline{\Delta} \subset \mathcal{U}$, und Zahlen M, m mit $m \geq 1, M > 0$ existieren, so daß

$$||G(\lambda)|| \leq \frac{M(|\lambda|+1)^{2m}}{|\mathrm{Im}\ \lambda|^m} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathcal{U}\backslash\overline{\mathbb{R}}$$

und

(ii) es für jeden Punkt $\lambda \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ eine in $\overline{\mathbb{R}}$ offene, zusammenhängende Umgebung I_λ von λ gibt, so daß beide Zusammenhangskomponenten von $I_\lambda \backslash \{\lambda\}$ von definitem Typ bezüglich G sind.

In [26], [27] zeigt P. JONAS, daß analog zum Relationenfall eine Funktion genau dann definisierbar im Sinne von (1.27) ist, wenn sie definisierbar über $\overline{\mathbb{C}}$ im Sinne von Definition 1.25 ist.
Wir bemerken noch (siehe [27]), daß eine selbstadjungierte Relation A genau dann definisierbar über Ω ist (Ω sei ein Gebiet wie in Definition 1.25), wenn $\sigma(A) \cap (\Omega\backslash\overline{\mathbb{R}})$ aus isolierten Punkten besteht, welche Pole der Resolventen sind, und die Funktion G, welche durch

$$G(\lambda) := \lambda - \mathrm{Re}\ \lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \overline{\lambda_0})(A - \lambda)^{-1}$$

mit $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \Omega \cap \mathbb{C}^+$ auf $\rho(A) \cap \Omega$ definiert wird, definisierbar in Ω ist.
Lokal definisierbare Funktionen haben minimale Darstellungen der Form (1.24) durch lokal definisierbare Relationen. Genauer gilt der folgende

Satz 1.26. *Sei $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum, Ω ein Gebiet wie in Definition 1.24 und G eine $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertige Funktion, welche definisierbar in Ω ist. Es sei $\lambda_0 \in \mathfrak{h}(G) \cap \Omega \cap \mathbb{C}^+$ und Ω' sei ein Gebiet in $\overline{\mathbb{C}}$ mit den gleichen Eigenschaften wie Ω, so daß $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ und $\lambda_0 \in \Omega'$ gilt.*
Dann gibt es einen KREIN*-Raum $\mathcal{K}$, eine selbstadjungierte Relation $A \subset \mathcal{K}^2$, welche definisierbar über Ω' ist, $\rho(A) \cap \Omega' = \mathfrak{h}(G) \cap \Omega'$, und eine Abbildung $\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, so daß*

$$\tau(\lambda) = \mathrm{Re}\ \tau(\lambda_0) + \gamma^* \left(\lambda - \mathrm{Re}\ \lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \overline{\lambda_0})(A - \lambda)^{-1}\right) \gamma$$

für alle $\lambda \in \rho(A) \cap \Omega'$ gilt und die Minimalmalitätsbedingung

$$\mathcal{K} = \mathrm{clsp}\ \left\{(I + (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda)^{-1})\gamma h \;\middle|\; \lambda \in \rho(A) \cap \Omega', h \in \mathcal{H}\right\}$$

erfüllt ist.

In [24] beweist P. JONAS dieses Resultat mit einem schwächeren Minimalitätsbegriff, die hier angegebene Version wird in [23] gezeigt. Ein sehr hilfreicher Satz aus der Arbeit [2] von T.YA. AZIZOV und P. JONAS behandelt bestimmte Transformationen lokal definisierbarer Funktionen:

Satz 1.27. *Sei Ω ein Gebiet wie in Definition 1.24 und $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum. Die $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertige Funktion G_1 sei definisierbar in Ω. Es sei $\mathcal{K}$ ein weiterer* HILBERT*-Raum und q, K, B seien in Ω meromorphe Funktionen mit folgenden Eigenschaften: q und B seien symmetrisch bezüglich der reellen Achse und q sei skalar, K sei $\mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$-wertig und B sei $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-wertig. Dann ist die Funktion G, welche durch*

$$G(\lambda) := q(\lambda)K(\overline{\lambda})^* G_1(\lambda)K(\lambda) + B(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \Omega \backslash \mathbb{R}$ mit $\lambda \in \mathfrak{h}(q) \cap \mathfrak{h}(K) \cap \mathfrak{h}(G_1) \cap \mathfrak{h}(B)$ definiert wird, definisierbar in Ω.

2 Randtripel

Die Theorie der Randtripel als Methode zur Beschreibung von kanonischen Erweiterungen symmetrischer Operatoren bzw. Relationen und, damit verbunden, von Lösungen gewisser (abstrakter) Randwertprobleme geht zurück auf
A.N. KOCHUBEI [31] und V.M. BRUK [8]. Weitere Darstellungen findet man in [19], [12], [13] für HILBERT-Räume und in [11] für KREIN-Räume. Verallgemeinerte Randtripel werden in [14] definiert.

2.1 Randtripel

Definition 2.1. *Sei $\mathcal{H}$ ein* KREIN-*Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation. Wir nennen ein Tripel $\big(H, \Gamma_0, \Gamma_1\big)$ ein* Randtripel für A^+*, falls H ein* HILBERT-*Raum ist und $\Gamma_0, \Gamma_1 : A^+ \to H$ Operatoren sind, so daß*

(i) $\Gamma := \binom{\Gamma_0}{\Gamma_1} : A^+ \to H^2$ surjektiv ist und

(ii) für alle $\hat{f}, \hat{g} \in A^+$

$$[f', g]_{\mathcal{H}} - [f, g']_{\mathcal{H}} = \Big(\Gamma_1 \hat{f}, \Gamma_0 \hat{g}\Big)_H - \Big(\Gamma_0 \hat{f}, \Gamma_1 \hat{g}\Big)_H$$

gilt.

Nach (1.12) und Lemma 1.11 können wir Randtripel mit Hilfe des inneren Produktes $[\![\cdot,\cdot]\!]_{\mathcal{H}^2}$ auf $\mathcal{H}^2$ (siehe (1.5)) folgendermaßen charakterisieren.

Lemma 2.2. *Sei $\mathcal{H}$ ein* KREIN-*Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation.*
Dann ist (H, Γ_0, Γ_1) genau dann ein Randtripel für A^+, falls H ein HILBERT-*Raum und $\Gamma := \binom{\Gamma_0}{\Gamma_1} : A^+ \to H^2$ ein* $[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitär*er Operator ist.*

Ein Randtripel (H, Γ_0, Γ_1) für A^+ definiert zwei kanonische selbstadjungierte Erweiterungen von A, nämlich

$$A_i := \ker \Gamma_i \quad i = 0, 1. \tag{2.1}$$

Wir betrachten abgeschlossene Erweiterungen $\widetilde{A}$ von A in $\mathcal{H}$, also Relationen $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ mit $A \subset \widetilde{A} \subset A^+$. Zwei abgeschlossene Erweiterungen $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1$ von A heißen *disjunkt*, falls $\widetilde{A}_0 \cap \widetilde{A}_1 = A$ ist und *transversal*, falls zusätzlich auch $\widetilde{A}_0 \hat{+} \widetilde{A}_1 = A^+$ ist. Die in (2.1) definierten Erweiterungen A_0 und A_1 sind transversal.
Durch Γ wird eine bijektive Beziehung zwischen den abgeschlossenen Erweiterungen $\widetilde{A}$ von A und den abgeschlossenen Unterräumen $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(H)$ von H^2 durch

$$\widetilde{A} \text{ ist eine abgeschlossene Erweiterung von } A \iff \Gamma(\widetilde{A}) =: \Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(H) \tag{2.2}$$

definiert. Dann läßt sich $\widetilde{A}$ schreiben als

$$\widetilde{A} = \Gamma^{-1}(\Theta) \tag{2.3}$$

Dabei ist $\widetilde{A}$ genau dann symmetrisch (selbstadjungiert) im KREIN-Raum $\mathcal{H}$, falls Θ symmetrisch (selbstadjungiert) im HILBERT-Raum H ist. Weiter ist $\widetilde{A}$ genau dann disjunkt (transversal) zu A_0, falls $\Theta \in \mathcal{C}(H)$ ($\Theta \in \mathcal{L}(H)$) ist. In beiden Fällen ist dann $\widetilde{A} = \ker\,(\Gamma_1 - \Theta\Gamma_0)$.
Der für uns interessante Fall ist, daß A eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung mit nichtleerer Resolventenmenge besitzt. Sei also im folgenden $\widetilde{A} = \widetilde{A}^+$ eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung von A mit $\rho(\widetilde{A}) \neq \emptyset$. Dann hat A gleiche Defektindizes. Unter diesen Voraussetzungen gibt es ein Randtripel (H, Γ_0, Γ_1) von A mit $A_0 = \ker\,\Gamma_0 = \widetilde{A}$ und $\dim H = n$. Desweiteren gilt für alle $\lambda \in \rho(\widetilde{A})$

$$A^+ = \widetilde{A} \hat{+} \hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+) \tag{2.4}$$

Ist nun (H, Γ_0, Γ_1) ein Randtripel für A^+ mit $A_0 = \widetilde{A}$, so folgt aus (2.4), daß für $\lambda \in \rho(\widetilde{A}) = \rho(A_0)$ der Operator $\Gamma_0 \restriction_{\hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+)}$ injektiv, also $\hat{\gamma}(\lambda) := \left(\Gamma_0 \restriction_{\hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+)}\right)^{-1}$ ein Operator ist. Bezeichnen wir mit P_1 die Orthogonalprojektion auf die erste Komponente von $\mathcal{H}^2$ und definieren wir $\gamma(\lambda) := P_1\hat{\gamma}(\lambda)$, so sind $\hat{\gamma}, \gamma$ operatorwertige Funktionen, welche holomorph auf $\rho(A_0)$ sind und Werte in $\mathcal{L}(H, \mathcal{H}^2)$ beziehungsweise in $\mathcal{L}(H, \mathcal{H})$ annehmen. Wir nennen γ das γ-*Feld* des Randtripels (H, Γ_0, Γ_1).
Für $\lambda, \mu \in \rho(A_0)$ erfüllen sie die Identitäten

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda) &= \gamma(\mu) + (\lambda - \mu)(A_0 - \lambda)^{-1}\gamma(\mu), \\ \gamma(\overline{\lambda})^+ &= \Gamma_1 \begin{pmatrix} (A_0 - \lambda)^{-1} \\ I + \lambda(A_0 - \lambda)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Wir bemerken noch, daß für $\lambda \in \rho(A_0)$

$$\operatorname{ran} \begin{pmatrix} (A_0 - \lambda)^{-1} \\ I + \lambda(A_0 - \lambda)^{-1} \end{pmatrix} = A_0 \tag{2.6}$$

ist. Von zentraler Bedeutung ist die WEYL-*Funktion* M eines Randtripels. Wir definieren diese durch

$$M(\lambda) := \Gamma_1\hat{\gamma}(\lambda) = \Gamma_1\left(\Gamma_0 \restriction_{\hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+)}\right)^{-1} \qquad \text{für } \lambda \in \rho(A_0). \tag{2.7}$$

oder äquivalent durch

$$M(\lambda)\Gamma_0\hat{f}_\lambda = \Gamma_1\hat{f}_\lambda \qquad \text{für alle } \hat{f}_\lambda \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+), \lambda \in \rho(A_0) \tag{2.8}$$

gegeben.
Die WEYL-Funktion M eines Randtripels ist holomorph auf $\rho(A_0)$, symmetrisch zur reellen Achse und erfüllt sogar für $\lambda, \mu \in \rho(A_0)$ die Beziehung

$$M(\lambda) - M(\mu)^* = (\lambda - \overline{\mu})\gamma(\mu)^+\gamma(\lambda). \tag{2.9}$$

Hieraus gewinnen wir für ein festes $\lambda_0 \in \rho(A_0)$ die folgende Darstellung

$$M(\lambda) = \text{Re } M(\lambda_0) + \gamma(\lambda_0)^+ \left(\lambda - \text{Re } \lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \overline{\lambda}_0)(A_0 - \lambda)^{-1}\right) \gamma(\lambda_0) \tag{2.10}$$

für alle $\lambda \in \rho(A_0)$.
Mit Hilfe der Weyl-Funktion können wir die spektralen Eigenschaften der durch (2.3) definierten Erweiterungen von A untersuchen (siehe z.B. [11]).

Lemma 2.3. *Sei $\mathcal{H}$ ein* Krein-*Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation, die eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung A_0 in $\mathcal{H}$ mit nichtleerer Resolventenmenge besitzt. Sei (H, Γ_0, Γ_1) ein Randtripel für A^+ mit* $\ker \Gamma_0 = A_0$*,* Weyl-*Funktion M und γ-Feld γ. Sei A_Θ eine abgeschlossene Erweiterung von A und $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(H)$ die durch (2.2) definierte zugehörige Parameterrelation. Sei $\lambda \in \rho(A_0)$.*
Dann ist $\lambda \in \rho(A_\Theta)$ genau dann, wenn $0 \in \rho(M(\lambda) - \Theta)$ ist und es gilt

$$(A_\Theta - \lambda)^{-1} = (A_0 - \lambda)^{-1} + \gamma(\lambda)\big(\Theta - M(\lambda)\big)^{-1}\gamma^+(\overline{\lambda}) \tag{2.11}$$

für alle $\lambda \in \rho(A_0) \cap \rho(A_\Theta)$.

Es besteht also ein bijektiver Zusammenhang zwischen den Resolventen kanonischer selbstadjungierter Erweiterungen $A_\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ von A und selbstadjungierten Relationen $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(H)$. In Abschnitt 4 werden wir in diesem Kontext beliebige selbstadjungierte Erweiterungen untersuchen.

2.2 Verallgemeinerte Randtripel

V.A. Derkach und M.M. Malamud geben in [14] eine Verallgemeinerung des Begriffs des Randtripels im Hilbert-Raum an.

Definition 2.4. *Sei $\mathcal{H}$ ein* Krein-*Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation. Dann heißt ein Tripel (H, Γ_0, Γ_1) ein* verallgemeinertes Randtripel *für A^+, falls*

(i) $\Gamma := \binom{\Gamma_0}{\Gamma_1} : A^+ \supset \text{dom } \Gamma \to H^2$ *ein linearer Operator und* $T := \text{dom } \Gamma$ *dicht in A^+ ist,*

(ii) $\text{ran } \Gamma_0 = H$ *und* $A_0 := \ker \Gamma_0$ *selbstadjungiert ist,*

(iii) Γ $[\![\cdot,\cdot]\!]$-isometrisch *ist.*

Es folgt wieder (siehe [14], [10]), daß $\ker \Gamma = A$ ist.
Offenbar ist jedes Randtripel auch ein verallgemeinertes Randtripel. Ist nun (H, Γ_0, Γ_1) ein verallgemeinertes Randtripel, so daß Γ surjektiv ist, so ist Γ mit Lemma 1.11 $[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitär und mit Lemma 1.10 ist $T := \text{dom } \Gamma$ abgeschlossen, also $T = A^+$. Somit sind die verallgemeinerten Randtripel mit surjektivem Γ gerade die Randtripel (vgl. dazu die Bemerkungen nach Definition 3.6 über Randrelationen).

Verallgemeinerte Randtripel haben viele der Eigenschaften von Randtripeln. Sei wieder $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ symmetrisch, abgeschlossen und sei A_0 eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung von A in $\mathcal{H}$, welche eine nichtleere Resolventenmenge habe. Sei (H, Γ_0, Γ_1) ein verallgemeinertes Randtripel für A^+ mit $\ker \Gamma_0 = A_0$. Dann gilt für $\lambda \in \rho(A_0)$

$$\mathrm{dom}\, \Gamma = T = A_0 \hat{+} \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)$$

(vergleiche (2.4)) Im allgemeinen ist zwar Γ nicht surjektiv, hat aber dichtes Bild (siehe [14]). Ganz genau wie in (2.5) und (2.7) können wir das γ-Feld und die WEYL-Funktion eines verallgemeinerten Randtripels definieren. Diese erfüllen wieder die Identitäten (2.9) und (2.5).

2.3 Randtripel und Operatorfunktionen

Wir wollen in diesem Abschnitt darauf eingehen, welche Operatorfunktionen sich als WEYL-Funktionen von Randtripeln darstellen lassen.
Wir betrachten zuerst den Fall, daß $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum ist. Wie in Abschnitt 1.5 sei $\mathcal{R}^s[H]$ die Klasse der strikten und $\mathcal{R}^u[H]$ die Klasse der uniform strikten Nevanlinnafunktionen in H. Für den Zusammenhang von NEVANLINNA-Funktionen und Randtripeln gilt folgender Satz (siehe z.B. [13]).

Satz 2.5. *(i) Sei $\mathcal{H}$ ein* HILBERT*-Raum, $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation mit gleichen Defektzahlen. Sei (H, Γ_0, Γ_1) ein Randtripel (verallgemeinertes Randtripel) für A^* und M die zugehörige* WEYL*-Funktion. Dann ist M eine uniform strikte* NEVANLINNA*-Funktion (strikte* NEVANLINNA*-Funktion).*

(ii) Zu jeder uniform strikten NEVANLINNA*-Funktion (strikten* NEVANLINNA*-Funktion) M gibt es einen* HILBERT*-Raum $\mathcal{H}$, eine abgeschlossene, symmetrische Relation $A \subset \mathcal{H}^2$ mit gleichen Defektzahlen und ein Randtripel (verallgemeinertes Randtripel) (H, Γ_0, Γ_1), so daß M die zugehörige* WEYL*-Funktion ist.*

Die Darstellung nicht strikter NEVANLINNA-Funktionen oder NEVANLINNA-Familien als WEYL-Funktionen von Randtripeln ist nicht möglich. Ein Ausweg ist die Verallgemeinerung von Randtripeln zu Randrelationen, wie sie in Abschnitt 3 geschieht. Wir verweisen auf den Satz 3.21 und die folgenden Korollare.
Wir richten nun unsere Aufmerksamkeit auf den Fall, daß $\mathcal{H}$ ein KREIN-Raum ist.

Satz 2.6. *Sei $\mathcal{H}$ ein* KREIN*-Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation und $A_0 \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung von A mit nichtleerer Resolventenmenge. Sei (H, Γ_0, Γ_1) ein Randtripel für A^+ mit* WEYL*-Funktion M und γ-Feld γ und $A_0 = \ker \Gamma_0$.*

Sei $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, welches symmetrisch bezüglich der reellen Achse ist, mit dieser einen nicht trivialen Schnitt hat, und für das gilt, daß $\Omega \cap \mathbb{C}^+$ und $\Omega \cap \mathbb{C}^-$ einfach zusammenhängend sind.
Ist nun A_0 definisierbar über Ω, so ist die WEYL-*Funktion M definisierbar in Ω.*

Beweis. Mit einem festen $\lambda_0 \in \rho(A_0) \cap \Omega \cap \mathbb{C}^+$ können wir M in der Form (2.10) darstellen. In [24] folgert P. JONAS, daß nun M definisierbar in Ω ist. □

Die Darstellung gegebener (lokal) definisierbarer Funktionen als WEYL--Funktionen von Randtripeln erfordert mehr Mühe. Wir zitieren hierzu folgendes Resultat für skalare Funktionen aus BEHRNDT [5] und verweisen auf Abschnitt 3.4.

Satz 2.7. *Sei Ω wie in Lemma 2.6 und M eine in Ω definisierbare Funktion, welche Werte in $\mathbb{C}$ annimmt und nicht konstant ist. Sei Ω' ein Gebiet mit den gleichen Eigenschaften wie Ω und $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Dann gibt es einen* KREIN-*Raum $\mathcal{H}$, eine symmetrische Relation $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ und ein Randtripel $(\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ für A^+, so daß M in Ω' gerade mit der* WEYL-*Funktion des Randtripels übereinstimmt.*

3 Randrelationen

3.1 Die Transformation $\mathcal{J}$

In diesem Abschnitt werden einige Hilfsmittel bereitgestellt, die für die Untersuchung von Randrelationen nötig sind. Insbesondere nimmt die in (3.1) erklärte Transformation eine zentrale Rolle ein. Sie verallgemeinert die Transformation $\mathcal{J}$ aus [10].
Sei in diesem Abschnitt $\mathcal{H}$ ein KREIN-Raum mit Fundamentalsymmetrie J und sei H ein HILBERT-Raum.

Definition 3.1. *Sei $C \in \mathcal{L}(H)$ mit $C = C^*$ und $C^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Wir definieren $\mathcal{J}_C : \mathcal{H}^2 \times H^2 \to (\mathcal{H} \times H)^2$ durch*

$$\mathcal{J}_C\{\hat{f}, \hat{h}\} = \mathcal{J}_C\left\{\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix}\right\} := \left\{\begin{pmatrix} f \\ Ch \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ -C^{-1}h' \end{pmatrix}\right\} \tag{3.1}$$

für $\{\hat{f}, \hat{h}\} \in \mathcal{H}^2 \times H^2$.

Ist $C = \mathrm{Id}_H$, so schreiben wir $\mathcal{J} := \mathcal{J}_{\mathrm{Id}_H}$.
Im folgenden sei immer $\mathcal{H} \times H$ mit dem kanonischen inneren Produkt ausgestattet, d.h. es ist für $\binom{f}{h}, \binom{f'}{h'} \in \mathcal{H} \times H$

$$\left[\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ h' \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{H} \times H} = [f, f']_{\mathcal{H}} + (h, h')_H. \tag{3.2}$$

Sei Γ eine Relation von $\mathcal{H}^2$ nach H^2. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}
S_0 &:= \left\{\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \;\middle|\; \left\{\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \in \mathcal{J}_C(\Gamma)\right\} \\
T_0 &:= \left\{\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \;\middle|\; \left\{\begin{pmatrix} f \\ Ch \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ -C^{-1}h' \end{pmatrix}\right\} \in \mathcal{J}_C(\Gamma) \text{ für ein } \hat{h} \in H^2\right\} \\
S_1 &:= \left\{\begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \;\middle|\; \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ Ch \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -C^{-1}h' \end{pmatrix}\right\} \in \mathcal{J}_C(\Gamma)\right\} \\
T_1 &:= \left\{\begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \;\middle|\; \left\{\begin{pmatrix} f \\ Ch \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ -C^{-1}h' \end{pmatrix}\right\} \in \mathcal{J}_C(\Gamma) \text{ für ein } \hat{f} \in \mathcal{H}^2\right\}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Wir geben nun einige elementare Eigenschaften von $\mathcal{J}_C$ an. Sie werden für $C = \mathrm{Id}_H$ und $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum in [10] bewiesen.

Lemma 3.2. *Sei $\mathcal{J}_C$ wie in Definition 3.1 erklärt. Dann gelten die folgenden Aussagen (i) – (iv).*

(i) $\mathcal{J}_C$ ist bijektiv,

(ii) Eine Relation Γ von $\mathcal{H}^2$ nach H^2 ist $[\![\cdot,\cdot]\!]$-isometrisch ($[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitär) (vgl. die Bezeichnung 1.13) genau dann, wenn die Relation $\mathcal{J}_C(\Gamma)$ von $\mathcal{H} \times H$ nach $\mathcal{H} \times H$ symmetrisch (selbstadjungiert) bezüglich des kanonischen Produktes (3.2) ist.

(iii) *Sei* Γ *eine Relation von* $\mathcal{H}^2$ *nach* H^2*. Dann ist*
$\ker \Gamma = S_0$, $\operatorname{dom} \Gamma = T_0$, $\operatorname{mul} \Gamma = S_1$ *und* $\operatorname{ran} \Gamma = T_1$.

(iv) *Ist* $\mathcal{J}_C(\Gamma)$ *symmetrisch, so sind* S_0 *und* S_1 *symmetrisch und es gilt* $T_0 \subset S_0^+$ *und* $T_1 \subset S_1^*$.
Ist $\mathcal{J}_C(\Gamma)$ *selbstadjungiert, so gilt zusätzlich* $\operatorname{clos} T_0 = S_0^+$ *und* $\operatorname{clos} T_1 = S_1^*$ *und* S_0, S_1 *sind abgeschlossen.*

Beweis. (i) Aus $C = C^* \in \mathcal{L}(H)$ und $C^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ folgt leicht, daß $\mathcal{J}_C$ bijektiv ist.

(ii) Sei zunächst Γ eine beliebige Relation von $\mathcal{H}^2$ nach H^2 und $\Gamma^{[\![+]\!]}$ die Adjungierte von Γ bezüglich der indefiniten Produkte $[\![\cdot,\cdot]\!]_{\mathcal{H}^2}$ und $[\![\cdot,\cdot]\!]_{H^2}$. Wir zeigen zuerst die Beziehung

$$\big(\mathcal{J}_C(\Gamma)\big)^+ = \mathcal{J}_C\Big(\big(\Gamma^{[\![+]\!]}\big)^{-1}\Big). \tag{3.4}$$

Für $\{\hat{f},\hat{h}\}, \{\hat{g},\hat{k}\} \in \mathcal{H}^2 \times H^2$ ist nämlich, da $C = C^*$ gilt,

$$\begin{aligned}
[\![\hat{f},\hat{g}]\!]_{\mathcal{H}^2} - [\![\hat{h},\hat{k}]\!]_{H^2} &= i\Big([f,g']_{\mathcal{H}} - [f',g]_{\mathcal{H}} - (h,k')_H + (h',k)_H\Big) \\
&= i\Big([f,g']_{\mathcal{H}} - [f',g]_{\mathcal{H}} + (Ch,-C^{-1}k')_H - (-C^{-1}h',Ck)_H\Big) \\
&= i\left(\left[\begin{pmatrix} f \\ Ch \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g' \\ -C^{-1}k' \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{H}\times H} - \left[\begin{pmatrix} f' \\ -C^{-1}h' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ Ck \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{H}\times H}\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{pmatrix} f \\ Ch \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ -C^{-1}h' \end{pmatrix}\right\} \in \big(\mathcal{J}_C(\Gamma)\big)^+ \\
\iff &\left[\begin{pmatrix} f \\ Ch \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g' \\ -C^{-1}k' \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{H}\times H} - \left[\begin{pmatrix} f' \\ -C^{-1}h' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ Ck \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{H}\times H} = 0 \\
&\qquad\qquad \text{für alle } \left\{\begin{pmatrix} g \\ Ck \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g' \\ -C^{-1}k' \end{pmatrix}\right\} \in \mathcal{J}_C(\Gamma) \\
\iff &[\![\hat{f},\hat{g}]\!]_{\mathcal{H}^2} - [\![\hat{h},\hat{k}]\!]_{H^2} = 0 \quad \text{für alle } \{\hat{g},\hat{k}\} \in \Gamma \\
\iff &\{\hat{h},\hat{f}\} \in \Gamma^{[\![+]\!]} \\
\iff &\{\hat{f},\hat{h}\} \in \big(\Gamma^{[\![+]\!]}\big)^{-1} \\
\iff &\left\{\begin{pmatrix} f \\ Ch \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ -C^{-1}h' \end{pmatrix}\right\} \in \mathcal{J}_C\left((\Gamma^{[\![+]\!]})^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Also folgt (3.4). Damit ist nun aber

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_C(\Gamma) \subset \big(\mathcal{J}_C(\Gamma)\big)^+ &\iff \mathcal{J}_C(\Gamma) \subset \mathcal{J}_C\Big(\big(\Gamma^{[\![+]\!]}\big)^{-1}\Big) \\
&\iff \Gamma \subset \big(\Gamma^{[\![+]\!]}\big)^{-1} \\
&\iff \Gamma^{-1} \subset \Gamma^{[\![+]\!]}
\end{aligned}$$

und analog
$$\mathcal{J}_C(\Gamma) = \big(\mathcal{J}_C(\Gamma)\big)^+ \iff \Gamma^{-1} = \Gamma^{[\![+]\!]}.$$
Somit folgt *(ii)*.

(iii) Die Behauptungen folgen sofort aus der Definition in (3.3).

(iv) Ist $\mathcal{J}_C(\Gamma)$ symmetrisch, so ist Γ nach *(ii)* $[\![\cdot,\cdot]\!]$-isometrisch. Nach (1.11) gilt nun $\ker\Gamma \subset (\mathrm{dom}\,\Gamma)^{[\![\perp]\!]_{\mathcal{H}^2}}$, also $S_0 \subset T_0^+$ und somit $T_0 \subset \mathrm{clos}\,T_0 = (T_0^+)^+ \subset S_0^+$. Da nach Definition $S_0 \subset T_0$ ist, so folgt $S_0 \subset S_0^+$ und somit ist S_0 symmetrisch. Da ebenfalls nach (1.11) gilt: $\mathrm{mul}\,\Gamma \subset (\mathrm{ran}\,\Gamma)^{[\![\perp]\!]_{H^2}}$, so folgt $T_1 \subset S_1^+$ ganz analog.
Ist nun $\mathcal{J}_C(\Gamma)$ selbstadjungiert, so gilt mit (1.12) $\ker\Gamma = (\mathrm{dom}\,\Gamma)^{[\![\perp]\!]_{\mathcal{H}^2}}$ und $\mathrm{mul}\,\Gamma = (\mathrm{ran}\,\Gamma)^{[\![\perp]\!]_{H^2}}$ und somit $\mathrm{clos}\,T_i = S_i^+$ für $i = 0,1$. Weiterhin ist $S_0 = \ker\Gamma$ abgeschlossen.

□

Bemerkung 3.3. *Sei $\Gamma \subset \mathcal{H}^2 \times H^2$. Ist $\mathcal{J}_C(\Gamma)$ symmetrisch (selbstadjungiert) für ein $C \in \mathcal{L}(H)$, $C = C^*$, $C^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, so ist nach Lemma 3.2 also Γ $[\![\cdot,\cdot]\!]$-isometrisch ($[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitär). Damit ist für alle $C' = C'^* \in \mathcal{L}(H)$ mit $(C')^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ die Relation $\mathcal{J}_{C'}(\Gamma)$ ebenfalls symmetrisch (selbstadjungiert).*

Sei nun $B \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H} \times H)$ eine selbstadjungierte Relation. Dann gibt es nach Lemma 3.2 eine $[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitäre Relation $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$, so daß $B = \mathcal{J}(\Gamma)$ ist. Seien nun $S_i,\ T_i\ \ i = 0,1$ wie in (3.3) definiert. Dann sind S_0 und S_1 abgeschlossen und symmetrisch und damit ist auch
$$\begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} = \left\{\left\{\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ h' \end{pmatrix}\right\} \,\Big|\, \hat{f} \in S_0 \text{ und } \hat{h} \in S_1\right\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H} \times H)$$
symmetrisch und B ist eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung von $\left(\begin{smallmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_1 \end{smallmatrix}\right)$ in $(\mathcal{H} \times H)^2$. Also hat $\left(\begin{smallmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_1 \end{smallmatrix}\right)$ gleiche Defektindizes.
Genauer gilt sogar (vgl. wieder [10] für den Fall, daß $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum ist) das

Lemma 3.4. *Sei $B \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H} \times H)$ selbstadjungiert, $B = \mathcal{J}(\Gamma)$ für eine $[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitäre Relation $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ und seien $S_i, T_i,\ \ i = 0,1$, wie in (3.3) definiert. Dann gilt*

(i) $\mathcal{N}_\lambda((JS_0)^*) = \mathrm{clos}\,\mathcal{N}_\lambda(JT_0)$ und $\mathcal{N}_\lambda(S_1^*) = \mathrm{clos}\,\mathcal{N}_\lambda(T_1)$.

(ii) Die Defektzahlen von JS_0 und $-S_1$ sind gleich: $n_\pm(JS_0) = n_\mp(S_1)$.

Beweis. (i) Wir definieren
$$B' : \left\{\left\{\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Jf' \\ h' \end{pmatrix}\right\} \,\Big|\, \left\{\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ h' \end{pmatrix}\right\} \in B\right\}.$$

Dann ist B' selbstadjungiert im HILBERT-Raum $(\mathcal{H}' \times H)^2$, wobei $\mathcal{H}'$ der HILBERT-Raum $(\mathcal{H}, [J\cdot,\cdot]_{\mathcal{H}})$ ist. Seien $S_i', T_i' \quad i = 0,1$ wie in (3.3) definiert. Dann ist $S_0' = JS_0, T_0' = JT_0$ und $S_1' = S_1, T_1' = T_1$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ beliebig. Da B' selbstadjungiert in einem HILBERT-Raum ist, so ist nun $\lambda \in \rho(B')$,

$$(B' - \lambda)^{-1} = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} Jf' - \lambda f \\ h' - \lambda h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right\} \;\middle|\; \left\{ \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Jf' \\ h' \end{pmatrix} \right\} \in B' \right\}, \tag{3.5}$$

und $(B' - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}' \times H)$.
Wir identifizieren $\mathcal{H}'$ mit $\mathcal{H} \times \{0\}$ und H mit $\{0\} \times H$ als Unterräume von $\mathcal{H} \times H$.
Sei $P_{\mathcal{H}'}$ die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{H}'$ in $\mathcal{H}' \times H$ und P_H entsprechend die Orthogonalprojektion auf H. Aus (3.5) und $\lambda \in \rho(B')$ folgt nun

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda(JT_0) &= \operatorname{ran}\left(P_{\mathcal{H}'}(B' - \lambda)^{-1} \restriction_H\right) \\ \mathcal{N}_\lambda(T_1) &= \operatorname{ran}\left(P_H(B' - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathcal{H}'}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{ran}(JS_0 - \lambda) &= \ker P_H(B' - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathcal{H}'} \\ \operatorname{ran}(S_1 - \lambda) &= \ker P_{\mathcal{H}'}(B' - \lambda)^{-1} \restriction_H . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Mit der Selbstadjungiertheit von B' folgt

$$\begin{aligned} \left(P_{\mathcal{H}'}(B' - \lambda)^{-1} \restriction_H\right)^* &= P_H(B' - \overline{\lambda})^{-1} \restriction_{\mathcal{H}'} \\ \left(P_H(B' - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathcal{H}'}\right)^* &= P_{\mathcal{H}'}(B' - \overline{\lambda})^{-1} \restriction_H . \end{aligned}$$

Somit ist schließlich

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda((JS_0)^*) &= \ker((JS_0)^* - \lambda) = (\operatorname{ran}(JS_0 - \overline{\lambda}))^{\perp_{\mathcal{H}'}} \\ &= (\ker P_H(B' - \overline{\lambda})^{-1} \restriction_{\mathcal{H}'})^{\perp_{\mathcal{H}'}} \\ &= \operatorname{clos}\left(\operatorname{ran}(P_{\mathcal{H}'}(B' - \lambda)^{-1} \restriction_H)\right) \\ &= \operatorname{clos} \mathcal{N}_\lambda(JT_0) \end{aligned} \tag{3.7}$$

also ist

$$\mathcal{N}_\lambda((JS_0)^*) = \operatorname{clos} \mathcal{N}_\lambda(JT_0)$$

und ganz analog

$$\mathcal{N}_\lambda(S_1^*) = \operatorname{clos} \mathcal{N}_\lambda(T_1).$$

(ii) Mit (3.6) ist

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}_{-i}(S_1^*))^{\perp_H} &= (\ker\,(S_1^* + i))^{\perp_H} \\ &= \operatorname{ran}\,(S_1 - i) = \ker P_{\mathcal{H}'}(B' - i)^{-1}\restriction_H\end{aligned}$$

und damit

$$\operatorname{ran} P_{\mathcal{H}'}(B'-i)^{-1}\restriction_H = \operatorname{ran}\,\left(P_{\mathcal{H}'}(B'-i)^{-1}\restriction_{\mathcal{N}_{-i}(S_1^*)}\right).$$

Aus (3.7) folgt deshalb

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_i((JS_0)^*) &= \operatorname{clos}\,\left(\operatorname{ran}\,(P_{\mathcal{H}'}(B'-i)^{-1}\restriction_H\,\right) \\ &= \operatorname{clos}\,\left(\operatorname{ran}\,(P_{\mathcal{H}'}(B'-i)^{-1}\restriction_{\mathcal{N}_{-i}(S_1^*)})\right).\end{aligned}$$

Ebenso gilt $\mathcal{N}_i(S_1^*) = \operatorname{clos}\,\left(\operatorname{ran}\,(P_H(B'-i)^{-1}\restriction_{\mathcal{N}_{-i}((JS_0)^*)})\right)$ und somit folgt schließlich: $\dim \mathcal{N}_{\pm i}((JS_0)^*) = \dim \mathcal{N}_{\mp i}(S_1^*)$.

□

Bemerkung 3.5. *Besitzt B zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 3.4 eine nichtleere Resolventenmenge, so folgt ganz analog wie im obigen Beweis für $\lambda \in \rho(B)$*

$$\mathcal{N}_\lambda(T_0) = \operatorname{ran}\,\left(P_{\mathcal{H}}(B-\lambda)^{-1}\restriction_H\right).$$

3.2 Randrelationen

Eine Verallgemeinerung von Randtripeln sind die im folgenden beschriebenen Randrelationen, wie sie für Hilbert-Räume in Derkach et al. [10] eingeführt werden (siehe auch Abschnitt 3.3).
Der wesentliche Unterschied zu Randtripeln besteht darin, daß Randrelationen nicht notwendigerweise surjektiv sein müssen. Wir erweitern hier dieses Konzept aus [10] auf Krein-Räume.

Definitionen. In diesem Abschnitt sei $\mathcal{H}$ ein Krein-Raum mit innerem Produkt $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{H}}$ und einer Fundamentalsymmetrie J und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation in $\mathcal{H}$.

Definition 3.6. *Eine Relation $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ heißt* Randrelation *für A^+, falls H ein* Hilbert*-Raum ist,* $\operatorname{dom}\Gamma$ *dicht in A^+ und Γ $[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitär ist (siehe Bezeichnung 1.13).*
Wir schreiben $T := \operatorname{dom}\Gamma$ und definieren Relationen $\Gamma_0, \Gamma_1 \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H)$ durch

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &:= \left\{\{\hat f, h\} \;\middle|\; \{\hat f, \hat h\} \in \Gamma \text{ mit } \hat h = \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \text{ für ein } h' \in H\right\} \\ \Gamma_1 &:= \left\{\{\hat f, h'\} \;\middle|\; \{\hat f, \hat h\} \in \Gamma \text{ mit } \hat h = \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \text{ für ein } h \in H\right\}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Ist nun (H, Γ_0, Γ_1) ein Randtripel, so ist $\Gamma = \binom{\Gamma_0}{\Gamma_1}$ ein $[\![\cdot,\cdot]\!]$-isometrischer Operator, welcher surjektiv und mit Lemma 1.11 auch $[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitär ist. Es ist also Γ eine Randrelation und somit sind diese in der Tat Verallgemeinerungen von Randtripeln.
Ist nun Γ eine surjektive Randrelation, so gilt nach Korollar 1.12

$$\mathrm{mul}\Gamma = (\mathrm{ran}\Gamma)^{[\![\perp]\!]_{H^2}} = (H^2)^{[\![\perp]\!]_{H^2}} = \{\hat{0}\}.$$

Also ist Γ ein surjektiver, $[\![\cdot,\cdot]\!]$-isometrischer Operator, und damit sind auch Γ_0 und Γ_1 Operatoren.
Da $\mathrm{ran}\Gamma = H^2$ abgeschlossen ist, so ist nach (1.12) auch $\mathrm{dom}\Gamma$ abgeschlossen, also ist $\mathrm{dom}\Gamma = \mathrm{dom}\Gamma_0 = \mathrm{dom}\Gamma_1 = A^+$ und somit ist (H, Γ_0, Γ_1) ein Randtripel für A^+.

Wie in (1.7) sei $\mathcal{N}_\lambda(T) := \ker(T - \lambda)$ definiert und

$$\hat{\mathcal{N}_\lambda}(T) := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \lambda f \end{pmatrix} \;\middle|\; f \in \mathcal{N}_\lambda(T) \right\}.$$

Wir definieren nun das γ-Feld und die Weyl-Familie einer Randrelation.

Definition 3.7. *Ist $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine Randrelation für A^+, so definieren wir die* Weyl-Familie *τ von Γ durch*

$$\tau(\lambda) := \Gamma(\hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)) = \left\{ \hat{h} \;\middle|\; \{\hat{f}, \hat{h}\} \in \Gamma \text{ für ein } \hat{f} \in \hat{\mathcal{N}_\lambda}(T) \right\} \subset H^2 \tag{3.9}$$

und das γ-Feld *γ durch*

$$\gamma(\lambda) := \left\{ \{h, f\} \;\middle|\; f \in \mathcal{N}_\lambda(T) \text{ und } \exists h' \in H \text{ mit } \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \lambda f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \right\} \in \Gamma \right\}. \tag{3.10}$$

Ist (H, Γ_0, Γ_1) ein Randtripel und $\Gamma = \binom{\Gamma_0}{\Gamma_1}$, so entsprechen diese Definitionen gerade den in Abschnitt 2.1 gegebenen.

Da $\mathrm{dom}\Gamma$ dicht in A^+ ist und A abgeschlossen, folgt aus (1.12)

$$\ker\Gamma = (\mathrm{dom}\Gamma)^{[\![\perp]\!]_{\mathcal{H}^2}} = (A^+)^{[\![\perp]\!]_{\mathcal{H}^2}} = (A^+)^+ = A. \tag{3.11}$$

Somit gilt $A \subset T \subset A^+$ und $\mathrm{clos}T = A^+$.

Mit der Transformation $\mathcal{J}_C$ aus Definition 3.1 können wir ein Kriterium angeben, wann eine Relation $\Gamma \subset \mathcal{H}^2 \times H^2$ eine Randrelation ist.
Unmittelbar aus Lemma 3.2 folgt für $C = \mathrm{Id}_H$ wie im Hilbert-Raum das

Lemma 3.8. *Sei $\Gamma \subset \mathcal{H}^2 \times H^2$ eine lineare Relation mit $A := \ker\Gamma$. Γ ist genau dann eine Randrelation für A^+, wenn die Transformierte $\mathcal{J}(\Gamma) \subset (\mathcal{H} \times H)^2$ selbstadjungiert ist.*

Die „$\mathcal{J}_C$-Transformierte" von Γ, $\mathcal{J}_C(\Gamma)$, wird in den folgenden Aussagen und Beweisen immer wieder eine zentrale Rolle einnehmen.

Definition 3.9. *Sei $\mathcal{H}$ ein* Krein-*Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation. Sei $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine Randrelation für A^+. Wir nennen Γ eine* minimale Randrelation*, falls es einen beschränkt invertierbaren Operator $C = C^* \in \mathcal{L}(H)$ gibt, so daß*

$$\mathcal{H} = \operatorname{clsp}\left\{\mathcal{N}_\lambda(T) \;\middle|\; \lambda \in \rho(\mathcal{J}_C(\Gamma))\right\} \tag{3.12}$$

gilt.

Im Fall, daß $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum ist, ist (3.12) äquivalent zu

$$\mathcal{H} = \operatorname{clsp}\left\{\mathcal{N}_\lambda(T) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right\} \tag{3.13}$$

(dies ist die Definition in [10]).

Sei wieder $\mathcal{H}$ ein Krein-Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine beliebige symmetrische Relation. Wir zeigen nun, daß es dann eine Randrelation Γ für A^+ gibt (Wenn A eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung in $\mathcal{H}$ hat, so gibt es nach Abschnitt 2.1 sogar ein Randtripel für A^+).

Lemma 3.10. *Sei $A \subset \mathcal{H}^2$ eine beliebige abgeschlossene, symmetrische Relation. Dann gibt es eine Randrelation $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ für A^+.*

Beweis. Es ist JA eine abgeschlossene, symmetrische Relation im Hilbert-Raum $(\mathcal{H}, [J\cdot,\cdot])$. Nach [10, Prop.3.7] gibt es nun eine selbstadjungierte Erweiterung B von JA in einem Hilbert-Raum $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \times H$, H ein Hilbert-Raum, mit $JA = \left\{\binom{f}{f'} \in \mathcal{H}^2 \;\middle|\; \left\{\binom{f}{0}, \binom{f'}{0}\right\} \in B\right\}$ (siehe auch [1] für den Fall, daß A ein Operator ist). Dann ist

$$\widetilde{A} := \left\{\left\{\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Jf' \\ h' \end{pmatrix}\right\} \;\middle|\; \left\{\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ h' \end{pmatrix}\right\} \in B\right\}$$

eine selbstadjungierte Erweiterung von A mit $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H} \times H)$. Es ist dann $A = \left\{\binom{f}{f'} \in \mathcal{H}^2 \;\middle|\; \left\{\binom{f}{0}, \binom{f'}{0}\right\} \in \widetilde{A}\right\}$. Mit $\Gamma := \mathcal{J}^{-1}(\widetilde{A}) \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ ist nach (3.3) $A = \ker\Gamma$, und nach Lemma 3.8 ist Γ eine Randrelation für A^+. $\square$

Die Relation A_0. Wie bei Randtripeln (vgl. (2.1)) definieren wir

$$A_i := \ker\Gamma_i \quad i = 1, 2 \tag{3.14}$$

Aus der $[\![\cdot,\cdot]\!]$-Isometrie von Γ folgt mit (1.13), daß $A_i,\ i = 1, 2$, symmetrisch sind und mit (3.11) gilt $A \subset A_i \subset A_i^+ \subset A^+ \quad i = 1, 2$. Im allgemeinen sind A_0 und A_1 aber im Gegensatz zum Randtripel (siehe (2.1)) nicht abgeschlossen, also insbesondere nicht selbstadjungiert (siehe hierzu z.B. die Beispiele in [10]). Der folgende Satz gibt nun eine hinreichende Bedingung für die Selbstadjungiertheit von A_0 (wie in [10]).

Satz 3.11. *Sei $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation und $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine Randrelation für A^+, so daß* $\mathrm{ran}\Gamma_0$ *und* $\mathrm{ran}\ \Gamma$ *abgeschlossen sind. Dann ist A_0 selbstadjungiert.*

Zum Beweis benötigen wir das

Lemma 3.12. *Sei $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine Randrelation für A^+. Wir fassen Γ_0, Γ_1 als lineare Unterräume von $\mathcal{H}^2 \times H^2$ auf. Dann ist*

$$\mathrm{ran}\ \left(\Gamma_i^{[\![+]\!]}\right) = \ker \Gamma_i \quad i = 1, 2.$$

Ist nun $\mathrm{ran}\ \Gamma_i$ *abgeschlossen, so ist auch* $\ker \Gamma_i \quad i = 1, 2$ *abgeschlossen.*

Beweis. Wir zeigen die Aussagen für Γ_0. Der Beweis für Γ_1 ist analog. Wir identifizieren Γ_0 mit

$$\Gamma_0 = \left\{ \left\{ \hat{f}, \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ \Big| \ \left\{ \hat{f}, \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \right\} \in \Gamma \text{ für ein } h' \in H \right\}$$

als Unterraum von $\mathcal{H}^2 \times H^2$. Sei nun $\hat{g} \in \mathrm{ran}\ \left(\Gamma_0^{[\![+]\!]}\right) \subset \mathcal{H}^2$, das heißt, es gibt ein $\hat{k} \in H^2$ mit $\left\{\hat{k}, \hat{g}\right\} \in \Gamma_0^{[\![+]\!]}$. Mithin gilt für alle $\left\{\hat{f}, \binom{h}{0}\right\} \in \Gamma_0$ und für alle $h' \in H$ mit $\left\{\hat{f}, \binom{h}{h'}\right\} \in \Gamma$ das folgende:

$$\begin{aligned} 0 =& \left[\!\!\left[\hat{k}, \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \right]\!\!\right]_{H^2} - \left[\!\!\left[\hat{g}, \hat{f} \right]\!\!\right]_{\mathcal{H}^2} = i\Big([k, 0]_H - [k', h]_H \Big) - \left[\!\!\left[\hat{g}, \hat{f} \right]\!\!\right]_{\mathcal{H}^2} \\ =& i\Big([0, h']_H - [k', h]_H \Big) - \left[\!\!\left[\hat{g}, \hat{f} \right]\!\!\right]_{\mathcal{H}^2} = \left[\!\!\left[\begin{pmatrix} 0 \\ k' \end{pmatrix}, \hat{h} \right]\!\!\right]_{H^2} - \left[\!\!\left[\hat{g}, \hat{f} \right]\!\!\right]_{\mathcal{H}^2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß $\left\{\binom{0}{k'}, \hat{g}\right\} \in \Gamma^{[\![+]\!]} = \Gamma^{-1}$ ist, also $\left\{\hat{g}, \binom{0}{k'}\right\} \in \Gamma$, und damit ist $\hat{g} \in \ker \Gamma_0$. Liest man dieses Argument rückwärts, so erhält man auch $\ker \Gamma_0 \subset \mathrm{ran}\ \left(\Gamma_0^{[\![+]\!]}\right)$ und damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Sei nun $\mathrm{ran}\ \Gamma_0$ abgeschlossen. Im Gegensatz zu Γ_0 ist $\left(\Gamma_0^{[\![+]\!]}\right)^{[\![+]\!]}$ immer abgeschlossen und es gilt nach Lemma 1.5:

$$\mathrm{ran}\ \Gamma_0 = \mathrm{clos}\ (\mathrm{ran}\ \Gamma_0) = \mathrm{ran}\ (\mathrm{clos}\ \Gamma_0) = \mathrm{ran}\ \left(\Gamma_0^{[\![+]\!]}\right)^{[\![+]\!]}.$$

Also ist $\mathrm{ran}\ \left(\Gamma_0^{[\![+]\!]}\right)^{[\![+]\!]}$ abgeschlossen und nach Lemma 1.6 ist damit auch $\mathrm{ran}\ \left(\Gamma_0^{[\![+]\!]}\right) = \ker \Gamma_0$ abgeschlossen. □

Beweis des Satzes 3.11. Wir bilden die selbstadjungierte Relation $\mathcal{J}(\Gamma)$. Mit den Bezeichnungen aus (3.3) ist dann nach Voraussetzung dom $T_1 =$ ran Γ_0 abgeschlossen. Damit ist nun nach Lemma 1.5 auch dom (clos T_1) = dom S_1^* abgeschlossen und nach Lemma 1.6 auch dom S_1. Sei $A_0 = \ker \Gamma_0$ wie in (3.14) erklärt.

(1) Wir zeigen zuerst, daß $\Gamma(A_0)$ wesentlich selbstadjungiert ist. Dies sehen wir folgendermaßen. Da A_0 symmetrisch ist, so ist nach Lemma 1.14 $\Gamma(A_0)$ symmetrisch. Wir benötigen nun eine Hilfskonstruktion.
Wir zerlegen S_1 in

$$S_1 = S_1^0 \hat{+} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } S_1 \end{pmatrix},$$

wobei S_1^0 der Operatorteil von S_1 ist. Es ist mul S_1 versehen mit der von H induzierten Metrik ein HILBERT-Raum. In diesem ist die Relation $\binom{0}{\text{mul } S_1} \subset (\text{mul } S_1)^2$ selbstadjungiert.
Nach Lemma 3.2 ist S_1 abgeschlossen und symmetrisch und mit (1.9) ist

$$\begin{aligned}(\text{mul } S_1)^{\perp_H} &= (\text{mul } (\text{clos } S_1))^{\perp_H} = \text{clos } (\text{dom } S_1^*) \\ &= \text{dom } S_1^* = \text{dom } (\text{clos } T_1) \supset \text{dom } T_1 \\ &\supset \text{dom } S_1,\end{aligned}$$

also dom $S_1^0 =$ dom $S_1 \subset$ dom $T_1 \subset (\text{mul } S_1)^{\perp_H}$.
Versehen mit der induzierten Metrik ist dom T_1 ein HILBERT-Raum. Wir betrachten S_1^0 als Operator im HILBERT-Raum dom T_1. Da S_1^0 der Operatorteil von S_1 ist, so ist S_1^0 symmetrisch, abgeschlossen und hat abgeschlossenen Definitionsbereich. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist S_1^0 also ein beschränkter Operator in dom T_1.
Dann hat (siehe z.B. [1]) S_1^0 eine beschränkte selbstadjungierte Erweiterung B_0 in dom T_1 mit dom $B_0 =$ dom T_1. Wir wollen nun

$$\text{clos } T_1 = S_1^* = B_0 \hat{+} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } S_1^* \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

zeigen. Hierfür beweisen wir zuerst, daß

$$\left(B_0 \hat{+} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } S_1^* \end{pmatrix} \right)^* = S_1 \tag{3.16}$$

gilt.
Sei hierzu zunächst $\binom{h}{k} \in S_1$. Somit gibt es ein $h' \in$ mul S_1 mit $k = S_1^0 h + h'$, also $\binom{h}{S_1^0 h + h'} \in S_1$. Sei $\binom{f}{B_0 f + g'} \in B_0 \hat{+} \binom{0}{\text{mul } S_1^*}$ beliebig. Es ist $f \in$ dom $B_0 =$ dom T_1 und $g' \in$ mul S_1^*, und somit ist $\binom{0}{g'} \in S_1^*$. Da $(\text{dom } T_1)^{\perp_H} = (\text{dom } S_1^*)^{\perp_H} =$ mul (clos S_1) = mul S_1 ist, gilt

$(h', f)_H = 0$ und es folgt

$$\begin{aligned}(h, B_0 f + g')_H - (S_1^0 h + h', f)_H =& (h, B_0 f)_H + (h, g')_H - \\ & (S_1^0 h, f)_H - (h', f)_H \\ =& (B_0 h, f)_H - (S_1^0 h, f)_H \\ =& (S_1^0 h, f)_H - (S_1^0 h, f)_H \\ =& 0.\end{aligned}$$

Also ist $S_1 \subset \left(B_0 \hat{+} \binom{0}{\text{mul } S_1^*}\right)^*$.
Sei nun $\binom{h}{h'} \in \left(B_0 \hat{+} \binom{0}{\text{mul } S_1^*}\right)^*$. Somit gilt für alle $\binom{f}{B_0 f + g'} \in B_0 \hat{+} \binom{0}{\text{mul } S_1^*}$, also für alle $f \in \text{dom } T_1$ und $g' \in \text{mul } S_1^*$,

$$(h, B_0 f + g')_H = (h', f)_H.$$

Insbesondere folgt für $f = 0$ und beliebiges $g' \in \text{mul } S_1^*$: $(h, g')_H = 0$, also ist $h \in (\text{mul } S_1^*)^\perp = \text{clos } (\text{dom } S_1) = \text{dom } S_1 = \text{dom } S_1^0$. Sei nun $f \in \text{dom } T_1$ beliebig und $g' = 0$. Dann folgt

$$(h', f)_H = (h, B_0 f)_H = (B_0 h, f)_H = (S_1^0 h, f)_H$$

und somit $h' - S_1^0 h \in (\text{dom } T_1)^\perp = \text{mul } S_1$. Es gibt also es ein $k \in \text{mul } S_1$ mit $h' = S_1^0 h + k$. Damit ist dann $\binom{h}{h'} = \binom{h}{S_1^0 h + k} \in S_1$. Somit ist (3.16) gezeigt.
Da B_0 ein abgeschlossener, beschränkter Operator ist, so ist $B_0 \hat{+} \binom{0}{\text{mul } S_1^*}$ ebenfalls abgeschlossen und somit ist

$$\begin{aligned}\text{clos } T_1 = S_1^* =& \left(\left(B_0 \hat{+} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } S_1^* \end{pmatrix}\right)^*\right)^* \\ =& \text{clos } \left(B_0 \hat{+} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } S_1^* \end{pmatrix}\right) = B_0 \hat{+} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } S_1^* \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wir haben nun (3.15) bewiesen und es gilt $\text{clos } (\text{mul } T_1) = \text{mul } S_1^* = \text{mul } (\text{clos } T_1)$.
Wir betrachten nun wieder die symmetrische Relation $\Gamma(A_0)$.
Da ja $T_1 = \text{ran } \Gamma$ und $S_1 = \text{mul } \Gamma$ ist, so gilt

$$\Gamma(A_0) = \text{mul } \Gamma \hat{+} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } T_1 \end{pmatrix} = S_1 \hat{+} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } T_1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich folgt mit Lemma 1.4:

$$
\begin{aligned}
(\Gamma(A_0))^* = {} & \left(S_1 \hat{+} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } T_1 \end{pmatrix}\right)^* = S_1^* \cap \begin{pmatrix} (\text{mul } T_1)^{\perp_H} \\ H \end{pmatrix} \\
= {} & S_1^* \cap \begin{pmatrix} (\text{mul } S_1^*)^{\perp_H} \\ H \end{pmatrix} = S_1^* \cap \begin{pmatrix} \text{dom } S_1 \\ H \end{pmatrix} \\
= {} & \left(B_0 \hat{+} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } S_1^* \end{pmatrix}\right) \cap \begin{pmatrix} \text{dom } S_1 \\ H \end{pmatrix} \\
= {} & \left(B_0 \cap \begin{pmatrix} \text{dom } S_1 \\ H \end{pmatrix}\right) \hat{+} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } S_1^* \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} \text{dom } S_1 \\ H \end{pmatrix}\right) \qquad (3.17) \\
= {} & S_1^0 \hat{+} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } S_1^* \end{pmatrix} \\
\subset {} & \text{clos } \left(S_1^0 \hat{+} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{mul } T_1 \end{pmatrix}\right) \\
\subset {} & \text{clos } \big(\Gamma(A_0)\big) \\
\subset {} & \big(\Gamma(A_0)\big)^*.
\end{aligned}
$$

Also ist clos $\big(\Gamma(A_0)\big) = \big(\Gamma(A_0)\big)^*$ und somit $\Gamma(A_0)$ wesentlich selbstadjungiert.

(2) Da ran Γ abgeschlossen ist, so ist nach Lemma 1.10 auch $T = \text{dom } \Gamma$ abgeschlossen. Damit ist $T = A^*$ und nach der Definition von A_0 gilt $A \subset A_0 \subset A_0^* \subset A^* = \text{dom } \Gamma$. Da nach dem ersten Teil $\Gamma(A_0)$ wesentlich selbstadjungiert ist, folgt also mit Lemma 1.14, daß auch A_0 wesentlich selbstadjungiert ist. Da nach Voraussetzung ran Γ_0 abgeschlossen ist, so ist nach Lemma 3.12 auch A_0 abgeschlossen und somit ist A_0 selbstadjungiert.

□

Bemerkung 3.13.

(i) Sei ran Γ_0 abgeschlossen. Wir sehen aus (3.17), daß dann $\Gamma(A_0)$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn mul T_1 abgeschlossen ist, da in diesem Fall mul T_1 = clos (mul T_1) = mul (clos T_1) = mul S_1^* ist.

(ii) Ganz analog zu Satz 3.11 zeigt man folgendes. Sind ran Γ_1 und ran Γ abgeschlossen, so ist A_1 selbstadjungiert.

(iii) Ist A_0 selbstadjungiert, so besitzt insbesondere A eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung. Demnach hat A gleiche Defektindizes.

Falls H endlichdimensional ist, sind die Voraussetzungen von Satz 3.11 erfüllt. Damit erhalten wir das folgende

Korollar 3.14. *Ist $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation mit $n_+(JA) \neq n_-(JA)$ und $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine Randrelation für A^+, so muß H unendlichdimensional sein.*

Die* Weyl*-Familie. Wir wollen nun die Eigenschaften der WEYL-Familie τ näher untersuchen. Zentral ist hierbei folgende Beziehung zwischen WEYL-Familie und $\mathcal{J}_C$-Transformierter einer Randrelation. Für $C = \mathrm{Id}_H$ und $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum wird sie in [10] gezeigt.

Lemma 3.15. *Sei $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation, $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine Randrelation für A^+ mit* WEYL*-Familie τ und sei $C = C^* \in \mathcal{L}(H)$ mit $C^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt*

$$P_H\big(\mathcal{J}_C(\Gamma) - \lambda\big)^{-1}\restriction_H = -C\big(\tau(\lambda) + \lambda C^2\big)^{-1}C. \tag{3.18}$$

Hat überdies $\mathcal{J}_C(\Gamma)$ nichtleere Resolventenmenge, so ist für $\lambda \in \rho(\mathcal{J}_C(\Gamma))$

$$\mathrm{dom}\,\big(-C(\tau(\lambda) + \lambda C^2)^{-1}C\big) = H$$

und damit insbesondere $-C(\tau(\lambda) + \lambda C^2)^{-1}C \in \mathcal{L}(H)$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} -C(\tau(\lambda) + \lambda C^2)^{-1}C = &\ -C\big(C^{-1}\tau(\lambda) + \lambda C\big)^{-1} \\ = &\ \left\{\left\{\begin{pmatrix} C^{-1}h' + \lambda Ch \\ -Ch \end{pmatrix}\right\} \;\middle|\; \{\hat{f}, \hat{h}\} \in \Gamma \text{ für ein } \hat{f} \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)\right\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

und aus

$$(\mathcal{J}_C(\Gamma) - \lambda)^{-1} = \left\{\left\{\begin{pmatrix} f' - \lambda f \\ -C^{-1}h' - \lambda Ch \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ Ch \end{pmatrix}\right\} \;\middle|\; \{\hat{f}, \hat{h}\} \in \Gamma\right\}$$

folgt

$$\begin{aligned} P_H(\mathcal{J}_C(\Gamma) - \lambda)^{-1} \restriction_H = &\left\{\begin{pmatrix} -C^{-1}h' - \lambda Ch \\ Ch \end{pmatrix} \middle| \{\hat{f}, \hat{h}\} \in \Gamma \text{ für ein } \hat{f} \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)\right\} \\ = &- C(\tau(\lambda) + \lambda C^2)^{-1}C. \end{aligned}$$

Sei nun $\lambda \in \rho(\mathcal{J}_C(\Gamma))$. Also ist ran $(\mathcal{J}_C(\Gamma) - \lambda) = \mathcal{H} \times H$ und folglich

$$\{0\} \times H \subset \mathrm{ran}\,(\mathcal{J}_C(\Gamma) - \lambda) = \left\{\begin{pmatrix} f' - \lambda f \\ -C^{-1}h' - \lambda Ch \end{pmatrix} \;\middle|\; \{\hat{f}, \hat{h}\} \in \Gamma\right\}.$$

Also ist insbesondere

$$H = \left\{ -C^{-1}h' - \lambda Ch \,\middle|\, \{\hat{f}, \hat{h}\} \in \Gamma \text{ für ein } \hat{f} \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)\right\}.$$

Mit (3.19) ist also dom $\big(-C(\tau(\lambda) + \lambda C^2)^{-1}C\big) = H$.
Da $\lambda \in \rho(\mathcal{J}_C(\Gamma))$ ist, so ist $P_H(\mathcal{J}_C(\Gamma) - \lambda)^{-1} \restriction_H \in \mathcal{L}(H)$ und somit folgt schließlich $-C(\tau(\lambda) + \lambda C^2)^{-1}C \in \mathcal{L}(H)$. $\square$

Bemerkung 3.16. Wir notieren noch, daß für $C = \mathrm{Id}_H$ (3.18) zu

$$P_H\big(\mathcal{J}(\Gamma) - \lambda\big)^{-1}\!\restriction_H = -\big(\tau(\lambda) + \lambda\big)^{-1}. \tag{3.20}$$

wird.

Wir erhalten nun, daß die Weyl-Familie einer Randrelation symmetrisch zur reellen Achse ist.

Lemma 3.17. *Sei $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation, $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine Randrelation für A^+ mit Weyl-Familie τ. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, daß*

$$\tau(\overline{\lambda}) = \tau(\lambda)^* \tag{3.21}$$

ist.

Beweis. (siehe [10]). Sei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ beliebig und $\hat{h} \in \tau(\lambda)$, $\hat{k} \in \tau(\overline{\lambda})$. Es gibt also Elemente $\hat{f}_\lambda \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)$ und $\hat{f}_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}(T)$ mit $\{\hat{f}_\lambda, \hat{h}\}$, $\{\hat{f}_{\overline{\lambda}}, \hat{k}\} \in \Gamma$. Somit gilt

$$(h, k')_H - (h', k)_H = [f_\lambda, \overline{\lambda} f_{\overline{\lambda}}]_{\mathcal{H}} - [\lambda f_\lambda, f_{\overline{\lambda}}]_{\mathcal{H}} = 0,$$

also ist für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\tau(\overline{\lambda}) \subset \tau(\lambda)^* \,. \tag{3.22}$$

Mit $C = \mathrm{Id}_H$ folgt aus (3.18)

$$\begin{aligned}
-(\tau(\lambda)^* + \overline{\lambda})^{-1} &\subset \big(-(\tau(\lambda) + \lambda)^{-1}\big)^* \\
&= \big(P_H(\mathcal{J}(\Gamma) - \lambda)^{-1} \restriction_H\big)^* \\
&\subset P_H(\mathcal{J}(\Gamma) - \overline{\lambda})^{-1} \restriction_H \\
&= -(\tau(\overline{\lambda}) + \overline{\lambda})^{-1}.
\end{aligned}$$

Damit ist nun $\tau(\lambda)^* + \overline{\lambda} \subset \tau(\overline{\lambda}) + \overline{\lambda}$ und schließlich $\tau(\lambda)^* \subset \tau(\overline{\lambda})$.
Also folgt die Behauptung. □

3.3 Randrelationen im Hilbert-Raum

Wir untersuchen nun, welche weiteren Eigenschaften Randrelationen haben, wenn $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum ist. Hauptziel dieses Abschnitts ist Satz 3.21, welcher besagt, daß zum einen jede Weyl-Familie einer Randrelation eine Nevanlinna-Familie ist und zum anderen jede Nevanlinna-Familie als Weyl-Familie einer Randrelation dargestellt werden kann.Sei zunächst

$\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine beliebige Randrelation. Wir machen die folgende Beobachtung:
Für beliebige $\{\hat{f}, \hat{h}\}$, $\{\hat{g}, \hat{k}\} \in \Gamma$ mit $\hat{f} \in \hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)$, $\hat{g} \in \hat{\mathcal{N}_\mu}(T)$ gilt

$$(h, k')_H - (h', k)_H = [f, \mu g]_{\mathcal{H}} - [\lambda f, g]_{\mathcal{H}} = (\overline{\mu} - \lambda)[f, g]_{\mathcal{H}} \tag{3.23}$$

und für $\hat{f} = \hat{g} \in \hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)$ wird dies zu

$$(h, k')_H - (h', k)_H = -2i\text{Im}\lambda[f, f]_{\mathcal{H}}. \tag{3.24}$$

Im Fall, daß $\mathcal{H}$ ein KREIN-Raum ist, kann es nun Elemente $f \in \mathcal{N}_\lambda(T)$ geben, $f \neq 0$, mit $[f, f]_{\mathcal{H}} = 0$, sogenannte neutrale Defektelemente. Dies ist im HILBERT-Raum wegen der Definitheit des Skalarproduktes nicht der Fall. Mit dieser Überlegung erhalten wir das

Lemma 3.18. *Es sei $\mathcal{H}$ ein* HILBERT-*Raum, $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation und $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine Randrelation für A^*. Dann ist das γ-Feld operatorwertig.*

Beweis. Es sei wieder $T = \text{dom}\,\Gamma$ und $\Gamma_0,\ \Gamma_1$ seien wie in (3.8) definiert. Sei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Wir zeigen zuerst, daß

$$\ker\left(\Gamma_0 \restriction_{\hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)}\right) = \{\hat{0}\} \tag{3.25}$$

gilt. Ist nämlich $\hat{f} \in \ker\left(\Gamma_0 \restriction_{\hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)}\right) = A_0 \cap \hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)$, also $\left\{\hat{f}, \binom{0}{h'}\right\} \in \Gamma$ für ein $h' \in H$, so folgt nun wegen der Definitheit des Skalarproduktes im HILBERT-Raum mit (3.24), daß

$$0 = (0, h')_H - (h', 0)_H = -2i(\text{Im})\ \lambda(f, f)_{\mathcal{H}} = -2i(\text{Im}\lambda)\ ||f||^2$$

gilt und somit ist $f = 0$. Ganz analog ist $\ker\left(\Gamma_1 \restriction_{\hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)}\right) = \{\hat{0}\}$ und $\ker\left(\Gamma \restriction_{\hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)}\right) = \{\hat{0}\}$. Mit (3.25) ist $\hat{\gamma}(\lambda) := \left(\Gamma_0 \restriction_{\hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)}\right)^{-1}$ ein linearer Operator von $\Gamma_0(\hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)) = \text{dom}\,\tau(\lambda)$ auf $\hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)$. Nach (3.10) ist nun $\gamma(\lambda) = P_1(\hat{\gamma}(\lambda))$, wobei P_1 die orthogonale Projektion auf die erste Komponente von $\mathcal{H}$ ist, und daher ist das γ-Feld $\gamma(\lambda)$ ein linearer Operator von $\text{dom}\,\tau(\lambda)$ auf $\mathcal{N}_\lambda(T)$. □

Wir erwähnen nun einige Eigenschaften von Randrelationen in HILBERT-Räumen aus [10].

Satz 3.19. *Sei $\mathcal{H}$ ein* HILBERT-*Raum, $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation und sei $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine Randrelation für A^* mit* WEYL-*Familie τ, γ-Feld γ und $A_0 := \ker \Gamma_0$. Dann gelten die Aussagen (i) – (iv).*

(i) $\Gamma_0(\hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)) \subset \text{ran}\,\Gamma_0 \subset \text{clos}\left(\Gamma_0(\hat{\mathcal{N}_\lambda}(T))\right)$ *für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.*

(ii) $\Gamma_0(\hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)) = \mathrm{dom}\ \tau(\lambda)$ *ist unabhängig von* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *genau dann, wenn für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$, *gilt* $\mathcal{N}_\mu(T) \subset \mathrm{ran}\ (A_0 - \lambda)$. *In diesem Fall ist* A_0 *wesentlich selbstadjungiert und es gilt*

$$\gamma(\lambda) = \Big(I + (\lambda - \mu)(A_0 - \lambda)^{-1}\Big)\gamma(\mu) \quad \textit{für } \lambda, \mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

(iii) *Für festes* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *sind äquivalent*

(a) $\mathrm{ran}\ (A_0 - \lambda) = \mathcal{H}$

(b) $T = A_0 \hat{+} \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)$

(c) $\Gamma_0(\hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)) = \mathrm{ran}\ \Gamma_0$.

A_0 *ist genau dann selbstadjungiert, falls eine dieser Aussagen für ein* $\lambda_+ \in \mathbb{C}^+$ *und ein* $\lambda_- \in \mathbb{C}^-$ *gilt.*

(iv) *Für festes* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *gilt:*
$\Gamma(\hat{\mathcal{N}}_\lambda(T))$ *ist abgeschlossen genau dann, wenn* $\mathrm{ran}\ (A_0 - \lambda) = \mathcal{H}$ *und* $\mathrm{ran}\ \Gamma_0$ *abgeschlossen ist.*

Ist (H, Γ_0, Γ_1) ein Randtripel so sind die Voraussetzungen in den Aussagen $(i) - (iv)$ stets erfüllt, und somit haben Randtripel diese Eigenschaften.

Korollar 3.20. *Seien* $\mathrm{dom}\ \tau(\lambda_0) = \Gamma_0(\mathcal{N}_{\lambda_0}(T))$ *und* $\mathrm{ran}\ \Gamma$ *abgeschlossen für ein* $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. *Dann ist* A_0 *selbstadjungiert.*

Beweis. Ist $\Gamma_0(\mathcal{N}_{\lambda_0}(T))$ abgeschlossen, so ist nach Satz 3.19 (i) auch $\mathrm{ran}\ \Gamma_0$ abgeschlossen, und somit ist dann die Bedingung aus Satz 3.11 erfüllt. □

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts. Ein alternativer Beweis findet sich in [10]. Dieser beruht auf der Integraldarstellung (1.23) für Nevanlinna-Funktionen und dem Erweiterungssatz für Spektralmaße von Naimark (siehe z.B. [1]). Unser Beweis baut auf der Darstellung (1.24) von Nevanlinna-Funktionen durch die Resolventen selbstadjungierter Relationen in Hilbert-Räumen auf. Im nächsten Abschnitt werden wir auf ganz ähnliche Weise einen Darstellungssatz für eine größere Klasse von Relationenfamilien zeigen.

Satz 3.21. *(i) Sei* $\mathcal{H}$ *ein* Hilbert-*Raum und* $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *eine symmetrische Relation. Sei* $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ *eine Randrelation für* A^* *mit* Weyl-*Familie* τ. *Dann ist* τ *eine* Nevanlinna-*Familie.*

(ii) Sei H *ein* Hilbert-*Raum und* τ *eine beliebige* Nevanlinna-*Familie,* $\tau(\lambda) \in \widetilde{\mathcal{C}}(H)$ *für* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. *Dann existiert ein* Hilbert-*Raum* $\mathcal{H}$, *eine symmetrische Relation* $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *und eine minimale Randrelation* $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ *für* A^*, *deren* Weyl-*Familie mit* τ *übereinstimmt.*

Beweis. (i) Sei τ die WEYL-Familie einer Randrelation $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$. Nach (3.21) ist τ symmetrisch bezüglich der reellen Achse und da $\mathcal{J}(\Gamma) \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H} \times H)$ eine selbstadjungierte Relation im HILBERT-Raum ist, so ist $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{J}(\Gamma))$. Damit ist mit (3.20) für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$(\tau(\lambda) + \lambda)^{-1} = -P_H(\mathcal{J}(\Gamma) - \lambda)^{-1} \upharpoonright_H \in \mathcal{L}(H).$$

Also ist $-\lambda \in \rho(\tau(\lambda))$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
Es bleibt zu zeigen, daß für $\operatorname{Im} \lambda > 0$ auch $\operatorname{Im} \tau(\lambda) \geq 0$ gilt. Dazu setzen wir $R(\lambda) := P_H(\mathcal{J}(\Gamma) - \lambda)^{-1} \upharpoonright_H$ und erhalten $R(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$ sowie $\tau(\lambda) + \lambda = \left\{ \binom{R(\lambda)h}{-h} \;\middle|\; h \in H \right\}$ und somit

$$\tau(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} R(\lambda)h \\ -h - \lambda R(\lambda)h \end{pmatrix} \;\middle|\; h \in H \right\}.$$

Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}^+$, $\hat{k} \in \tau(\lambda)$ und $h \in H$, so daß $\hat{k} = \binom{R(\lambda)h}{-h-\lambda R(\lambda)h}$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\, (k', k)_H =& \frac{1}{2i}\big((k', k)_H - (k, k')_H\big) \\
=& \frac{1}{2i}\Big(-(h, R(\lambda)h)_H - (\lambda R(\lambda)h, R(\lambda)h)_H \\
& \qquad + (R(\lambda)h, h)_H + (R(\lambda)h, \lambda R(\lambda)h)_H\Big) \\
=& \frac{1}{2i}\Big((\overline{\lambda} - \lambda)(R(\overline{\lambda})R(\lambda)h, h)_H + ((R(\lambda) - R(\overline{\lambda}))h, h)_H\Big) \\
=& \frac{1}{2i}\Big(((\overline{\lambda} - \lambda)P_H(\mathcal{J}(\Gamma) - \overline{\lambda})^{-1} \upharpoonright_H \; P_H(\mathcal{J}(\Gamma) - \lambda)^{-1} \upharpoonright_H \\
& \qquad + P_H(\,(\mathcal{J}(\Gamma) - \lambda)^{-1} - (\mathcal{J}(\Gamma) - \overline{\lambda})^{-1}) \upharpoonright_H)h, h\big)_H\Big) \\
=& \frac{1}{2i}\Big(((\overline{\lambda} - \lambda)\big(P_H(\mathcal{J}(\Gamma) - \overline{\lambda})^{-1}P_H(\mathcal{J}(\Gamma) - \lambda)^{-1} \upharpoonright_H \\
& \qquad - P_H(\mathcal{J}(\Gamma) - \lambda)^{-1}(\mathcal{J}(\Gamma) - \overline{\lambda})^{-1} \upharpoonright_H\big)h, h\big)_H\Big) \\
=& -\operatorname{Im}\, \lambda\Big(P_H(\mathcal{J}(\Gamma) - \overline{\lambda})^{-1}(-I + P_H)(\mathcal{J}(\Gamma) - \lambda)^{-1} \upharpoonright_H h, h\Big)_H \\
=& \operatorname{Im}\, \lambda\left((I - P_H)(\mathcal{J}(\Gamma) - \lambda)^{-1}\begin{pmatrix}0\\h\end{pmatrix}, (\mathcal{J}(\Gamma) - \lambda)^{-1}\begin{pmatrix}0\\h\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}\times H} \\
=& \operatorname{Im}\, \lambda\Big((I - P_H)g, g\Big)_{\mathcal{H}\times H} \geq 0
\end{aligned}$$

mit $g := (\mathcal{J}(\Gamma) - \lambda)^{-1}\binom{0}{h}$. Somit ist τ eine NEVANLINNA-Familie.

(ii) Sei H ein HILBERT-Raum und τ eine NEVANLINNA-Familie in H. Dann ist

$$\tau_1(\lambda) := (-(\tau(\lambda) + \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Dies folgt sofort, da nach der Definition einer Nevanlinna-Familie für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ immer $-\lambda \in \rho(\tau(\lambda))$ gilt. Damit ist für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ auch

$$\tau_2(\lambda) := \lambda + (\lambda^2 + 1)\tau_1(\lambda) \in \mathcal{L}(H).$$

Wir können τ_2 schreiben als

$$\tau_2(\lambda) = -\left\{ -\left[\lambda - \tau(\lambda)^{-1}\right]^{-1} - \left[\tau(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\right]^{-1} \right\}^{-1} \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Da mit η auch $-\eta^{-1}$ eine Nevanlinna-Familie ist und die Summe von Nevanlinna-Familien wieder eine Nevanlinna-Familie ist, so folgt $\tau_2 \in \mathcal{R}[H]$. Es gibt somit (vgl. Abschnitt 1.5) einen Hilbert-Raum $\mathcal{K}$, eine selbstadjungierte Relation $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ und einen Operator $\gamma \in \mathcal{L}(H, \mathcal{K})$, so daß für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\tau_2(\lambda) = \text{Re } \tau_2(i) + \gamma^*(\lambda + (\lambda^2 + 1)(A - \lambda)^{-1})\gamma \tag{3.26}$$

gilt. Diese Darstellung kann minimal gewählt werden, es sei also

$$\mathcal{K} = \text{clsp } \left\{(1 + (\lambda - i)(A - \lambda)^{-1})\gamma h \mid h \in H, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right\}. \tag{3.27}$$

Für $\lambda = i$ folgt $\tau_2(i) = i$, also ist Re $\tau_2(i) = 0$, und aus (3.26) erhalten wir $\gamma^*\gamma = Id_H$. Somit gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$-(\tau(\lambda) + \lambda)^{-1} = \tau_1(\lambda) = \gamma^*(A - \lambda)^{-1}\gamma. \tag{3.28}$$

Da $\gamma^*\gamma = Id_H$ ist, so ist γ^* surjektiv und γ ein isometrischer Operator. Damit ist $\gamma\gamma^*$ eine Orthogonalprojektion auf ran $\gamma \subset \mathcal{H}$. Wir betrachten γ als Operator nach ran γ. Dann ist γ ein isometrischer Isomorphismus von H auf ran γ und wir identifizieren H als Unterraum von $\mathcal{K}$: $H \cong \text{ran } \gamma \subset \mathcal{K}$. Mit $\mathcal{H} := (\text{ran } \gamma)^{\perp_{\mathcal{K}}}$ ist somit (bis auf isometrische Isomorphie) $\mathcal{K} = \mathcal{H} \times H$ und also $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H} \times H)$. Mit dieser Identifizierung ist γ^* die Orthogonalprojektion von $\mathcal{K}$ auf H und (3.28) wird zu

$$-(\tau(\lambda) + \lambda)^{-1} = P_H(A - \lambda)^{-1} \restriction_H . \tag{3.29}$$

Wir definieren $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ durch $\Gamma := \mathcal{J}^{-1}(A)$. Dann ist Γ eine Randrelation für S^*, wobei S die symmetrische Relation

$$S := \left\{\hat{f} \;\middle|\; \left\{\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \in A\right\}$$

ist. Nach (3.20) erfüllt auch die Weyl-Funktion von Γ die Identität (3.29) und somit ist die Weyl-Funktion von Γ gerade durch τ gegeben. Bis auf isometrische Isomorphie wird (3.27) zu

$$\mathcal{K} = \text{clsp } \left\{(I + (\lambda - i)(A - \lambda)^{-1}) \restriction_H h \mid h \in H, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right\}.$$

Insbesondere ist

$$\mathcal{H} = P_{\mathcal{H}}\mathcal{K} = \operatorname{clsp}\left\{P_{\mathcal{H}}(I + (\lambda - i)(A - \lambda)^{-1}) \restriction_H h \mid h \in H, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right\},$$

und mit Bemerkung 3.5 folgt somit

$$\mathcal{H} = \operatorname{clsp}\left\{\hat{\mathcal{N}}_\lambda(T) \mid \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right\}.$$

Demnach ist Γ eine minimale Randrelation.

□

Wir wollen nun untersuchen, wie zwei minimale Randrelationen, deren WEYL-Familien übereinstimmen, zusammenhängen. Dazu benötigen wir das folgende

Lemma 3.22. *Sei H ein* HILBERT-*Raum und $\tau \in \mathcal{R}[H]$. Es seien $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ zwei* HILBERT-*Räume, $\gamma_0 \in \mathcal{L}(H, \mathcal{K}_0), \gamma_1 \in \mathcal{L}(H, \mathcal{K}_1)$ und selbstadjungierte Relationen $A_0 \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K}_0), A_1 \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K}_1)$ gegeben, so daß*

$$\tau(\lambda) = \operatorname{Re}\, \tau(i) + \gamma_j^*\big(\lambda + (\lambda^2 + 1)(A_j - \lambda)^{-1}\big)\gamma_j \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\ j = 0, 1 \tag{3.30}$$

gilt und

$$\mathcal{K}_j = \operatorname{clsp}\left\{(I + (\lambda - i)(A_j - \lambda)^{-1})\gamma_j h \;\middle|\; h \in H, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right\} \quad j = 0, 1$$

ist. Dann gibt es einen unitären Operator $V : \mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}_1$ derart, daß

$$A_1 = \left\{\begin{pmatrix} Vf \\ Vf' \end{pmatrix} \;\middle|\; \hat{f} \in A_0\right\} \tag{3.31}$$

ist.

Beweis. Seien γ_0, γ_1 und $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ wie in der Behauptung gegeben. Die Räume

$$M_j := \operatorname{span}\left\{(I + (\lambda - i)(A_j - \lambda)^{-1})\gamma_j h \;\middle|\; h \in H, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right\} \quad , j = 0, 1,$$

sind nach Voraussetzung dicht in $\mathcal{K}_j$, $j = 0, 1$. Dann ist

$$\widetilde{V} := \left\{\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^N (I + (\lambda_n - i)(A_0 - \lambda_n))^{-1}\gamma_0 h_n \\ \sum_{n=0}^N (I + (\lambda_n - i)(A_1 - \lambda_n))^{-1}\gamma_1 h_n \end{pmatrix} \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, \lambda_n \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, h_n \in H \text{ für } n = 0, \dots, N\right\} \subset \mathcal{K}_0 \times \mathcal{K}_1.$$

eine lineare Relation mit $\operatorname{dom} \widetilde{V} = M_0$ und $\operatorname{ran} \widetilde{V} = M_1$ ist. Aus (3.30) folgt mit $\lambda = i$, daß

$$\gamma_0^*\gamma_0 = \gamma_1^*\gamma_1$$

und damit

$$\gamma_0^*(A_0-\lambda)^{-1}\gamma_0 = \gamma_1^*(A_1-\lambda)^{-1}\gamma_1$$

ist. Durch direktes Nachrechnen ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}&[(I+(\lambda_n-i)(A_1-\lambda_n)^{-1})\gamma_1 h_n, (I+(\lambda_m-i)(A_1-\lambda_m)^{-1})\gamma_1 h_m]_{\mathcal{K}_1}\\ &= [(I+(\lambda_n-i)(A_0-\lambda_n)^{-1})\gamma_0 h_n, (I+(\lambda_m-i)(A_0-\lambda_m)^{-1})\gamma_0 h_m]_{\mathcal{K}_0}\end{aligned}$$

für $\lambda_n, \lambda_m \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $h_n, h_m \in \mathbb{N}$. Somit ist $\widetilde{V}$ eine isometrische Relation. Da ran $\widetilde{V} = M_1$ dicht in $\mathcal{K}_1$ liegt, so ist nach (1.11) $\widetilde{V}$ ein Operator, also ein dicht definierter Operator mit dichtem Bild. Dieser ist abschließbar. Es sei $V := \operatorname{clos} \widetilde{V}$. Dann ist V ein isometrischer Operator, dom $V = \mathcal{K}_0$ und ran $V = \mathcal{K}_1$, also ist V ein unitärer Operator von $\mathcal{K}_0$ auf $\mathcal{K}_1$. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ beliebig gewählt. Dann ist für beliebige $h_n \in H$

$$V(A_0-\lambda)^{-1}\gamma_0 h_n = (A_1-\lambda)^{-1}\gamma_1 h_n = (A_1-\lambda)^{-1}V\gamma_0 h_n.$$

Hiermit verifizieren wir, daß für alle $f \in M_0$

$$V(A_0-\lambda)^{-1}f = (A_1-\lambda)^{-1}Vf$$

gilt und dann auch für alle $f \in \mathcal{K}_0$. Also ist

$$V(A_0-\lambda)^{-1} = (A_1-\lambda)^{-1}V$$

und hieraus folgt (3.31). □

Korollar 3.23. *Sei H ein* Hilbert*-Raum, $\tau \in \widetilde{\mathcal{R}}(H)$ eine* Nevanlinna*-Familie und seien $\Gamma^j \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_j^2, H^2)$, $j = 0,1$, $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$* Hilbert*-Räume, zwei minimale Randrelationen, deren* Weyl*-Familien mit τ übereinstimmen. Dann gibt es einen unitären Operator*

$$V := \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} : \mathcal{H}_0 \times H \to \mathcal{H}_1 \times H$$

mit

$$\Gamma^1 = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} V_{11}f + V_{12}h \\ V_{11}f' - V_{12}h' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_{21}f + V_{22}h \\ -V_{21}f' + V_{22}h' \end{pmatrix} \right\} \;\middle|\; \left\{ \hat{f}, \hat{h} \right\} \in \Gamma^0 \right\}.$$

Beweis. Es seien $\Gamma^j, \mathcal{H}_j$, $j = 0,1$, wie in der Voraussetzung gegeben. Dann sind $\mathcal{K}_j := \mathcal{H}_j \times H$, $j = 0,1$, Hilbert-Räume und $A^j := \mathcal{J}(\Gamma^j) \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K}_j)$, $j = 0,1$ selbstadjungierte Relationen (vgl. Lemma 3.2). Es ist nun

$$-(\tau(\lambda)+\lambda)^{-1} = P_H(A^j-\lambda)^{-1} \restriction_H \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \quad j = 0,1$$

und wie im Beweis zu Satz 3.21 folgt dann (bis auf Unitarität)

$$\lambda - (\lambda^2+1)(\tau(\lambda)+\lambda)^{-1} = \gamma_j^*\big(\lambda + (\lambda^2+1)(A^j-\lambda)^{-1}\big)\gamma_j$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $j = 0, 1$, wobei hier γ_j die Einbettung von H in $\mathcal{K}_j$ ist. Diese Darstellungen sind wegen der Minimalität der Randrelationen ebenfalls minimal.
Nach Lemma 3.22 gibt es also einen unitären Operator $V : \mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}_1$ mit $A^1 = \left\{ \binom{V\tilde{f}}{V\tilde{f}'} \;\middle|\; \hat{\tilde{f}} \in A^0 \right\}$. Bezüglich der Zerlegung $\mathcal{K}_j = \mathcal{H}_j \times H$, $j = 0, 1$ stellen wir V durch $V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$ dar. Also ist

$$A^1 = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} V_{11}f + V_{12}h \\ V_{21}f + V_{22}h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_{11}f' + V_{12}h' \\ V_{21}f' + V_{22}h' \end{pmatrix} \right\} \;\middle|\; \left\{ \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ h' \end{pmatrix} \right\} \in A^0 \right\}$$

und somit ist

$$\Gamma^1 = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} V_{11}f + V_{12}h \\ V_{11}f' + V_{12}h' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_{21}f + V_{22}h \\ -V_{21}f' - V_{22}h' \end{pmatrix} \right\} \;\middle|\; \left\{ \hat{f}, \hat{h} \right\} \in \Gamma^0 \right\}.$$

□

Ist $V_{12} = 0 = V_{21}$ und $V_{22} = I_H$, so ist sogar $V_{11} : \mathcal{H}^0 \to \mathcal{H}^1$ unitär und wir erhalten die Darstellung der unitären Äquivalenz aus [10]. Aus dieser Arbeit entnehmen wir das folgende

Korollar 3.24. *Sei nun H ein* HILBERT*-Raum und $\tau \in \widetilde{\mathcal{R}}(H)$. Ist τ konstant und $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine minimale Randrelation, deren* WEYL*-Familie mit τ übereinstimmt, so ist $\mathcal{H} = \{0\}$.*
Ist umgekehrt $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine Randrelation mit $\mathcal{H} = \{0\}$, so ist die WEYL*-Familie von Γ konstant.*

Beweis. Sei $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine minimale Randrelation, deren WEYL-Familie τ konstant ist, also $\tau(\lambda) = B$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Dann ist B selbstadjungiert in H. Für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $\{\hat{f}_\lambda, \hat{h}\} \in \Gamma$ mit $\hat{f}_\lambda \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)$, also $\hat{h} \in B$, gilt nun nach (3.24)

$$-2i(\operatorname{Im}\lambda)(f_\lambda, f_\lambda)_{\mathcal{H}} = (h, h')_H - (h, h')_H = 0$$

und damit ist $f_\lambda = 0$. Demnach ist $\mathcal{N}_\lambda(T) = \{0\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und aus der Minimalitätseigenschaft (3.13) folgt somit

$$\mathcal{H} = \operatorname{clsp} \left\{ \mathcal{N}_\lambda(T) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \right\} = \{0\}.$$

Die zweite Behauptung folgt sofort aus $\hat{\mathcal{N}}_\lambda(T) = \{\hat{0}\}$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, und da $\tau(\lambda) = \Gamma(\hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)) = \operatorname{mul}\Gamma$ ist für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. □

Wir haben in Abschnitt 2.3 gesehen, daß sich uniform strikte NEVANLINNA-Funktionen als WEYL-Funktionen gewöhnlicher Randtripel und strikte NEVANLINNA-Funktionen als WEYL-Funktionen verallgemeinerter Randtripel darstellen lassen. Satz 3.21 zeigt, daß solch eine Beziehung auch zwischen NEVANLINNA-Familien und WEYL-Familien von Randrelationen besteht. Wir erwähnen in diesem Zusammenhang noch ein Resultat aus [10].

Satz 3.25. *Sei $\mathcal{H}$ ein* Hilbert*-Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ eine symmetrische Relation. Ist $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine Randrelation für A^* mit* Weyl*-Familie τ und erfüllt Γ die Bedingung*

$$\Gamma_0\left(\hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)\right) = H \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \tag{3.32}$$

so ist τ eine $\mathcal{L}(H)$-wertige Nevanlinna*-Funktion.*
Ist umgekehrt τ eine $\mathcal{L}(H)$-wertige Nevanlinna*-Funktion, so gibt es einen* Hilbert*-Raum $\mathcal{H}$, eine abgeschlossene, symmetrische Relation A in $\mathcal{H}$ und eine Randrelation $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ für A^*, deren* Weyl*-Familie gerade mit τ übereinstimmt und die (3.32) erfüllt.*

Als eine Anwendung der Darstellung von Nevanlinna-Familien als Weyl-Familien von Randrelationen aus Satz 3.21 wollen wir nun einige der in Abschnitt 1.5 erwähnten Eigenschaften von Nevanlinna-Familien beweisen (siehe [10]).

Lemma 3.26. *Sei H ein* Hilbert*-Raum und $\tau \in \widetilde{\mathcal{R}}(H)$ eine* Nevanlinna*-Familie. Dann sind*

$$\ker\,\tau(\lambda),\ \mathrm{mul}\,\tau(\lambda),\ \ker\,(\mathrm{Im}\,\tau(\lambda)),\ \ker\,(\mathrm{Re}\,\tau(\lambda)),$$
$$\ker\,(\mathrm{Im}\,\tau(\lambda)^{-1}) \text{ und } \tau(\lambda) \cap \tau(\lambda)^*$$

unabhängig von $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\tau \in \widetilde{\mathcal{R}}(H)$. Mit Hilfe von Satz 3.21 stellen wir τ als Weyl-Familie einer Randrelation $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ dar, wobei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum ist. Sei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\ker\,\tau(\lambda) \times \{0\} = \mathrm{mul}\,\Gamma \cap (H \times \{0\}),$$

denn für $\hat{h} = \binom{h}{0} \in \mathrm{mul}\,\Gamma \cap (H \times \{0\})$ ist $\hat{h} \in \tau(\lambda)$, da $\mathrm{mul}\,\Gamma = \Gamma(\hat{0}) \subset \Gamma(\hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)) = \tau(\lambda)$ gilt. Somit folgt $h \in \ker\,\tau(\lambda)$.
Ist umgekehrt $h \in \ker\,\tau(\lambda)$, so ist $\hat{h} := \binom{h}{0} \in \tau(\lambda)$, das heißt, es gibt ein Element $\hat{f}_\lambda = \binom{f_\lambda}{\lambda f_\lambda} \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T)$, so daß $\left\{\hat{f}_\lambda, \hat{h}\right\} \in \Gamma$ ist. Da $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum ist, so folgt aus (3.24)

$$-2i\mathrm{Im}\,\lambda(f_\lambda, f_\lambda)_{\mathcal{H}} = (h, 0)_H - (0, h)_H = 0$$

und somit $f_\lambda = 0$ und $\hat{f}_\lambda = \hat{0}$. Es ist also $\left\{\hat{0}, \hat{h}\right\} \in \Gamma$ und wir erhalten $\hat{h} \in \mathrm{mul}\,\Gamma \cap (H \times \{0\})$. Dann $\mathrm{mul}\,\Gamma$ unabhängig von λ ist, folgt die erste Behauptung. Ganz analog zeigt man

$$\{0\} \times \mathrm{mul}\,\tau(\lambda) = \mathrm{mul}\,\Gamma \cap (\{0\} \times H)$$

und daraus folgt die zweite Behauptung. Wir zeigen, daß

$$\tau(\lambda) \cap \tau(\lambda)^* = \mathrm{mul}\,\Gamma$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ gilt. Sei hierzu $\hat{h} \in \text{mul}\,\Gamma$, also $\{\hat{0}, \hat{h}\} \in \Gamma$ und damit $\hat{h} \in \tau(\lambda)$. Mit (3.23) folgt, daß für alle $\hat{k} \in \tau(\lambda) = \Gamma(\hat{\mathcal{N}_\lambda}(T))$, also für alle $\{\hat{f}_\lambda, \hat{k}\} \in \Gamma$ für ein $\hat{f}_\lambda \in \hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)$,

$$(h, k')_H - (h', k)_H = -2i\text{Im}\,\lambda(f_\lambda, 0)_{\mathcal{H}} = 0$$

ist und somit $\hat{h} \in \tau(\lambda)^*$. Also folgt $\text{mul}\,\Gamma \subset \tau(\lambda) \cap \tau(\lambda)^*$.
Ist nun $\hat{h} \in \tau(\lambda) \cap \tau(\lambda)^*$, so gibt es ein $\hat{f}_\lambda \in \hat{\mathcal{N}_\lambda}(T)$ mit $\{\hat{f}_\lambda, \hat{h}\} \in \Gamma$ und da $\hat{h} \in \tau(\lambda)^*$ ist, folgt insbesondere wieder mit (3.24), daß

$$0 = (h, h')_H - (h', h)_H = -2i\text{Im}\,\lambda(f_\lambda, f_\lambda)_{\mathcal{H}}$$

gilt, also $f_\lambda = 0$ und somit auch $\hat{f}_\lambda = 0$. Also ist $\{\hat{0}, \hat{h}\} \in \Gamma$ und somit $\hat{h} \in \text{mul}\,\Gamma$. Wieder ist $\text{mul}\,\Gamma$ unabhängig von λ und somit ist die letzte Behauptung gezeigt. Es ist mit (1.4):

$\ker \text{Im}\,\tau(\lambda) = \ker\,(\tau(\lambda) - \tau(\lambda)^*) = \text{dom}\,(\tau(\lambda) \cap \tau(\lambda)^*) = \text{dom}\,(\text{mul}\,\Gamma)$ und
$\ker \text{Im}\,\tau(\lambda)^{-1} = \ker\,(\tau(\lambda)^{-1} - (\tau(\lambda)^*)^{-1}) = \text{ran}\,(\text{mul}\,\Gamma)$.

Sowohl $\text{dom}\,(\text{mul}\,\Gamma)$, als auch $\text{ran}\,(\text{mul}\,\Gamma)$ sind unabhängig von λ, und da schließlich $\text{Re}\,\tau(\lambda) = \tau(\lambda) - i\text{Im}\,\tau(\lambda)$ ist, so ist die Behauptung bewiesen. □

3.4 Randrelationen und definisierbare Funktionen

In Satz 3.21 haben wir gesehen, daß Weyl-Funktionen von Randrelationen in Hilbert-Räumen Nevanlinna-Familien sind und jede Nevanlinna-Familie als Weyl-Familie einer Randrelation aufgefaßt werden kann. Hierbei wurde insbesondere ausgenutzt, daß für eine Nevanlinna-Familie τ die Funktion

$$\lambda \mapsto -\left(\tau(\lambda) + \lambda\right)^{-1}$$

zur Klasse $\mathcal{R}_0[H]$ gehört. Im folgenden Satz verallgemeinern wir dieses zentrale Resultat aus [10] auf Relationenfamilien τ, die die Eigenschaft haben, daß die Funktion

$$\lambda \mapsto -\left(\tau(\lambda) + \lambda C^2\right)^{-1},$$

wobei $C = C^*, C^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ sei, eine lokal definisierbare Funktion ist.
Sei dazu in diesem Abschnitt wieder $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein bezüglich der reellen Achse symmetrisches Gebiet derart, daß $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ gilt und $\Omega \cap \mathbb{C}^+$ und $\Omega \cap \mathbb{C}^-$ einfach zusammenhängend sind.

Satz 3.27. *(i) Sei $\mathcal{H}$ ein Krein-Raum, $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ eine symmetrische Relation und $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine Randrelation für A^+. Die Weyl-Familie von Γ sei mit τ bezeichnet. Es sei $\mathcal{J}_C(\Gamma) \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H} \times H)$ definisierbar über Ω für ein $C \in \mathcal{L}(H)$ mit $C = C^*$ und $C^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Dann ist die Funktion*

$$\lambda \mapsto -(\tau(\lambda) + C^2\lambda)^{-1}$$

definisierbar in Ω.

(ii) Sei H *ein* HILBERT*-Raum und* τ *eine Relationenfamilie in* H*, welche symmetrisch zur reellen Achse ist derart, daß*

$$\lambda \mapsto -(\tau(\lambda) + C^2\lambda)^{-1}$$

definisierbar in Ω *ist für ein* $C \in \mathcal{L}(H)$ *mit* $C = C^*$ *und* $C^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. *Dann gibt es zu jedem Gebiet* Ω' *mit den gleichen Eigenschaften wie* Ω, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, *einen* KREIN*-Raum* $\mathcal{H}$, *eine symmetrische Relation* $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *und eine minimale Randrelation* $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ *für* A^+*, so daß* τ *in* Ω' *gerade mit der* WEYL*-Familie von* Γ *übereinstimmt und* $\mathcal{J}_C(\Gamma)$ *definisierbar über* Ω' *ist.*

Beweis. (i) Sei $C \in \mathcal{L}(H)$ wie in der Voraussetzung gefordert, so daß $\mathcal{J}_C(\Gamma)$ definisierbar über Ω ist. Also ist insbesondere $\rho(\mathcal{J}_C(\Gamma)) \cap \Omega \neq \emptyset$. Für $\lambda \in \rho(\mathcal{J}_C(\Gamma)) \cap \Omega$ ist nun nach (3.18)

$$-C(\tau(\lambda) + \lambda C^2)^{-1}C = P_H(\mathcal{J}_C(\Gamma) - \lambda)^{-1} \restriction_H . \tag{3.33}$$

Wir identifizieren die Einbettung $\restriction_H$ mit $\eta : H \to \mathcal{H} \times H$, $\eta h = \binom{0}{h}$ für $h \in H$. Dann ist $\eta^+ : \mathcal{H} \times H \to H$ gegeben durch $\eta^+\binom{f}{h} = h$ für $\binom{f}{h} \in \mathcal{H} \times H$ und wir können η^+ mit P_H identifizieren. Es ist somit $\eta^+\eta = Id_H$ und $\eta \in \mathcal{L}(H, \mathcal{H} \times H)$. Für ein $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{J}_C(\Gamma)) \cap \Omega \cap \mathbb{C}^+$ folgt mit (3.33) für alle $\lambda \in \rho(\mathcal{J}_C(\Gamma)) \cap \Omega$

$$\begin{aligned}\eta^+\big(\lambda - \text{Re }\lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda + \lambda_0)(\mathcal{J}_C(\Gamma) - \lambda)^{-1}\big)\eta = \\ &= (\lambda - \text{Re }\lambda_0)\eta^+\eta + (\lambda - \lambda_0)(\lambda + \lambda_0)\eta^+(\mathcal{J}_C(\Gamma) - \lambda)^{-1}\eta \\ &= \lambda - \text{Re }\lambda_0 - (\lambda - \lambda_0)(\lambda + \lambda_0)C(\tau(\lambda) + \lambda C^2)^{-1}C.\end{aligned}$$

Somit ist nach [24] die Funktion

$$\lambda \mapsto \lambda - \text{Re }\lambda_0 - (\lambda - \lambda_0)(\lambda + \lambda_0)C(\tau(\lambda) + \lambda C^2)^{-1}C$$

definisierbar in Ω. Mit Satz 1.27 folgt nun, daß $\lambda \mapsto -(\tau(\lambda) + C^2\lambda)^{-1}$ definisierbar in Ω ist.

(ii) Sei nun τ derart, daß $\lambda \mapsto -(\tau(\lambda)+C^2\lambda)^{-1}$ definisierbar in Ω ist für ein $C = C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $C^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Sei $\lambda_0 \in \mathfrak{h}((\tau(\cdot) + C^2\cdot)^{-1}) \cap \Omega \cap \mathbb{C}^+$ beliebig. Nach Satz 1.27 ist nun auch die Funktion, welche durch

$$\tau_1(\lambda) := \lambda - \text{Re }\lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \overline{\lambda_0})C(\tau(\lambda) + C^2\lambda)^{-1}C \tag{3.34}$$

für $\lambda \in \mathfrak{h}(-(\tau(\cdot) + C^2\cdot)^{-1}) \cap \Omega$ definiert wird, definisierbar in Ω. Sei nun Ω' ein Gebiet mit den gleichen Eigenschaften wie Ω und $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, $\lambda_0 \in \mathfrak{h}(\tau_1) \cap \Omega' \cap \mathbb{C}^+$. Nach Satz 1.26 gibt es nun einen KREIN-Raum

$\widetilde{\mathcal{H}}$, eine selbstadjungierte Relation $B \in \widetilde{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathcal{H}})$, welche definisierbar über Ω' ist mit $\rho(B) \cap \Omega' = \mathfrak{h}(\tau_1) \cap \Omega'$, und einen Operator $\gamma \in \mathcal{L}(H, \widetilde{\mathcal{H}})$, so daß für alle $\lambda \in \rho(B) \cap \Omega'$ die Darstellung

$$\tau_1(\lambda) = \text{Re } \tau_1(\lambda_0) + \gamma^+ \left(\lambda - \text{Re } \lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \overline{\lambda_0})(B - \lambda)^{-1}\right) \gamma \tag{3.35}$$

gilt und die Minimalitätseigenschaft

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \text{clsp } \left\{ (I + (\lambda - \lambda_0)(B - \lambda)^{-1})\gamma h \;\middle|\; \lambda \in \rho(B) \cap \Omega', h \in H \right\} \tag{3.36}$$

erfüllt ist. Aus (3.34) und (3.35) folgt nun für $\lambda = \lambda_0$

$$i\text{Im } \lambda_0 = \text{Re } \tau(\lambda_0) + i\text{Im } \lambda_0 \gamma^+ \gamma$$

und damit ist

$$\text{Re } \tau(\lambda_0) = 0 \quad \text{ und } \quad \gamma^+ \gamma = I_H.$$

Wie im Beweis von Satz 3.21 können wir nun H mit $\gamma(H)$ bis auf isometrische Isomorphie als Unterraum von $\widetilde{\mathcal{H}}$ identifizieren. $\gamma(H)$ ist dann ein HILBERT-Unterraum von $\widetilde{\mathcal{H}}$. Wir definieren $\mathcal{H} := H^{[\perp]_{\widetilde{\mathcal{H}}}}$, also identifizieren wir $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \times H$ und $\gamma^* = P_H$ als die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H} \times H$. Somit wird (3.35) zu

$$\tau_1(\lambda) = \lambda - \text{Re } \lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \overline{\lambda_0}) P_H (B - \lambda)^{-1} \restriction_H$$

und mit (3.34) ergibt dies nun

$$C(\tau(\lambda) + C^2 \lambda)^{-1} C = P_H (B - \lambda)^{-1} \restriction_H .$$

Wir definieren

$$\Gamma := \mathcal{J}_C^{-1}(B) = \left\{ \left\{ \hat{f}, \hat{h} \right\} \;\middle|\; \left\{ \begin{pmatrix} f \\ Ch \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ -C^{-1}h' \end{pmatrix} \right\} \in B \right\},$$

also $\Gamma \subset \mathcal{H}^2 \times H^2$. Nach Lemma 3.8 ist Γ eine Randrelation für A^+ mit $A := \ker \Gamma$. Nach (3.18) gilt für die WEYL-Familie τ' von Γ die Beziehung

$$C(\tau'(\lambda) + C^2 \lambda)^{-1} C = P_H (B - \lambda)^{-1} \restriction_H$$

für $\lambda \in \rho(\mathcal{J}_C(\Gamma)) \cap \Omega' = \rho(B) \cap \Omega' = \mathfrak{h}((\tau(\cdot) + C^2 \cdot)^{-1})$. Wegen $0 \in \rho(C^{-1})$ gilt

$$(\tau'(\lambda) + C^2 \lambda)^{-1} = (\tau(\lambda) + C^2 \lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathfrak{h}((\tau(\cdot) + C^2 \cdot)^{-1}),$$

und es folgt, daß τ und τ' übereinstimmen.
Aus (3.36) können wir insbesondere

$$\mathcal{H} = \text{clsp } \left\{ P_{\mathcal{H}} (B - \lambda)^{-1} \restriction_H h \;\middle|\; \lambda \in \rho(\mathcal{J}_C(\Gamma)) \cap \Omega', h \in H \right\}$$

folgern und mit Lemma 3.4 erhalten wir

$$\mathcal{H} = \text{clsp}\ \left\{ \mathcal{N}_\lambda(T) \ \middle|\ \lambda \in \rho(\mathcal{J}_C(\Gamma)) \cap \Omega' \subset \rho(\mathcal{J}_C(\Gamma)) \right\}.$$

Also ist Γ eine minimale Randrelation und τ die zugehörige WEYL-Familie.

□

Insbesondere sind die Voraussetzungen des zweiten Teils von Satz 3.27 erfüllt, wenn τ eine matrixwertige, lokal definisierbare Funktion ist.

Korollar 3.28. *Sei τ eine $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$-wertige Funktion, welche definisierbar in Ω ist. Dann gibt es einen* KREIN*-Raum $\mathcal{H}$, ein Gebiet Ω' mit den gleichen Eigenschaften wie Ω und $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, eine symmetrische Relation $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ und eine minimale Randrelation $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$, so daß τ in Ω' mit der* WEYL*-Familie von Γ übereinstimmt.*

Beweis. Sei τ wie in der Voraussetzung angegeben. Sei $\lambda \in \mathfrak{h}(\tau)$ beliebig. Die Matrix $\tau(\lambda)$ hat nur endlich viele Spektralpunkte. Wir wählen $c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$ so, daß $-c^2\lambda \notin \sigma(\tau(\lambda))$ (dann ist mit $C := c\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$ der Operator $C \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, $C = C^*$ und C beschränkt invertierbar). Also ist $\det(\tau(\lambda) + C^2\lambda) \neq 0$. Die Funktion $\lambda \mapsto (\tau(\lambda) + C^2\lambda)$ ist mit Satz 1.27 definisierbar in Ω. Nun folgt mit Theorem 2.3 aus [2], daß auch die Funktion $-(\tau(\cdot)+C^2\cdot)^{-1}$ definisierbar in Ω ist. Die Behauptung folgt nun gerade aus dem zweiten Teil des Satzes 3.27. □

4 Eine Parametrisierung verallgemeinerter Resolventen symmetrischer Relationen

Es sei $\mathcal{K}$ ein KREIN-Raum, $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ eine symmetrische Relation in $\mathcal{K}$ und A_0 eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung von A mit nichtleerer Resolventenmenge. Es gibt dann (siehe Abschnitt 2) ein Randtripel (H, Γ_0, Γ_1) für A^+ mit $A_0 = \ker \Gamma_0$, WEYL-Funktion M und γ-Feld γ. Durch Lemma 2.3 und die Resolventenformel (2.11),

$$(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} = (A_0 - \lambda)^{-1} + \gamma(\lambda)(\Theta - M(\lambda))^{-1}\gamma^+(\overline{\lambda}) \ , \quad \lambda \in \rho(A_0) \cap \rho(\widetilde{A}),$$

wird eine bijektive Beziehung zwischen den kanonischen selbstadjungierten Erweiterungen $\widetilde{A}$ von A und selbstadjungierten Relationen Θ in H hergestellt. Da H ein HILBERT-Raum ist und Θ selbstadjungiert in H, so ist die konstante Relationenfamilie τ, welche durch $\tau(\lambda) := \Theta$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ definiert wird, eine (konstante) NEVANLINNA-Familie.

Verallgemeinerte Krein-Naimark-Formel. Unser Ziel ist es nun, eine bijektive Beziehung zwischen den komprimierten Resolventen beliebiger selbstadjungierter Erweiterungen von A und (im allgemeinen nichtkonstanten) Relationenfamilien τ anzugeben, eine verallgemeinerte KREIN-NAIMARK-Formel. Einen Beweis derselben im HILBERT-Raum (Korollar 4.2) geben H. LANGER und B. TEXTORIUS in [33] und V. DERKACH, S. HASSI, M. MALAMUD und H. DE SNOO in [12], letztere für den Fall endlicher Defekte im HILBERT-Raum. Ihr Beweis stützt sich auf die Theorie der Randtripel. Unser Beweis kombiniert diese Methode mit dem Beweis der (kanonischen) Resolventenformel (2.11) und Resultaten aus der Theorie der Randrelationen (siehe Abschnitt 3).

Satz 4.1. *Es sei $\mathcal{K}$ ein* KREIN-*Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ eine symmetrische Relation, welche eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung A_0 mit nichtleerer Resolventenmenge besitzt. Sei (H, Γ_0, Γ_1) ein Randtripel für A^+ mit $A_0 = \ker \Gamma_0$,* WEYL-*Funktion M und γ-Feld γ.*

(i) *Es sei $\mathcal{H}$ ein weiterer* KREIN-*Raum und $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \times \mathcal{H})$ eine selbstadjungierte Erweiterung von A, so daß es ein $\lambda_0 \in \rho(A_0)$ mit der Eigenschaft $P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A} - \lambda_0)^{-1} \restriction_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ gibt. Dann gibt es eine Randrelation $\Gamma' \subset \mathcal{H}^2 \times H^2$ für S_1^+, wobei $S_1 = \widetilde{A} \cap (\{0\} \times \mathcal{H})^2$ ist, so daß die zugehörige* WEYL-*Familie τ die folgenden Eigenschaften hat:*

(a) *Für $\lambda \in \rho(A_0)$*

$$P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathcal{K}) \iff \big(M(\lambda) + \tau(\lambda)\big)^{-1} \in \mathcal{L}(H) \quad (4.1)$$

gilt und

(b) *für alle* $\lambda \in \rho(A_0) \cap \mathfrak{h}(M+\tau)^{-1}$

$$P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1} \upharpoonright_{\mathcal{K}} = (A_0-\lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)\big(M(\lambda)+\tau(\lambda)\big)^{-1}\gamma^+(\overline{\lambda}). \quad (4.2)$$

ist.

(ii) *Es sei* $\mathcal{H}$ *ein* Krein*-Raum,* $\Gamma' \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ *eine Randrelation mit zugehöriger* Weyl*-Familie* τ *und es gebe ein* $\lambda_0 \in \rho(A_0)$ *mit* $0 \in \rho(M(\lambda_0)+\tau(\lambda_0))$*. Dann gibt es eine selbstadjungierte Erweiterung* $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K}\times\mathcal{H})$ *von* A*, so daß* (a) *und* (b) *gelten.*

Beweis. Wir beweisen (i) und (ii) gemeinsam und organisieren den Beweis wie folgt: Wir werden in Teil (1) des Beweises zu jeder selbstadjungierten Erweiterung $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K}\times\mathcal{H})$ von A, welche die Voraussetzungen von Teil (i) des Satzes erfüllt, eine Randrelation $\Gamma' \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ für S_1^+ konstruieren, so daß das Paar $(\widetilde{A}, \Gamma')$ den Identitäten

$$\widetilde{A} = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix} \right\} \in (\mathcal{K}\times\mathcal{H})^2 \;\middle|\; \hat{f}_0 \in A^+ \text{ und } \left\{ \hat{f}_1, \begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{f}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{f}_0 \end{pmatrix} \right\} \in \Gamma' \right\} \quad (4.3)$$

und

$$\Gamma' = \left\{ \{\hat{f}_1, \hat{h}\} \in \mathcal{H}^2 \times H^2 \;\middle|\; \exists \hat{f}_0 \in A^+ \text{ mit } \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix} \right\} \in \widetilde{A} \text{ und } \hat{h} = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{f}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{f}_0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.4)$$

genügt. Die zu Γ' zugehörige Weyl-Familie bezeichnen wir mit τ. In Teil (2) des Beweises wird zu jeder die Voraussetzungen des 2.Teils des Satzes erfüllenden Weyl-Familie einer Randrelation $\Gamma' \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine passende selbstadjungierte Erweiterung $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K}\times\mathcal{H})$ von A definiert, so daß auch diese die Identitäten (4.3) und (4.4) erfüllen. Im Teil (3) zeigen wir, daß ein solches Paar $(\widetilde{A}, \Gamma')$, für das (4.3) und (4.4) gelten, die Krein-Naimark-Formel (4.2) erfüllt und damit eine Implikation ($\Leftarrow$) in (4.1) gilt. In (4) schließlich zeigen wir die andere Implikation von (4.1).

(1) Sei $\widetilde{A}$ eine selbstadjungierte Erweiterung von A. Ist $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ eine kanonische Erweiterung von A, so identifizieren wir wie üblich $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{K}\times\{0\}$ und sehen $\widetilde{A}$ als Erweiterung $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K}\times\mathcal{H})$ mit $\mathcal{H} = \{0\}$ an.
Es ist also $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K}\times\mathcal{H})$, wobei $\mathcal{H}$ ein weiterer (möglicherweise trivialer) Krein-Raum ist.

Wir definieren

$$\begin{aligned}
S_0 &:= \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_0' \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^2 \;\middle|\; \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0' \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in \widetilde{A} \right\} \\
T_0 &:= \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_0' \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^2 \;\middle|\; \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix} \right\} \in \widetilde{A} \text{ für ein } \hat{f}_1 \in \mathcal{H}^2 \right\} \\
S_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^2 \;\middle|\; \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_1' \end{pmatrix} \right\} \in \widetilde{A} \right\} \\
T_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^2 \;\middle|\; \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix} \right\} \in \widetilde{A} \text{ für ein } \hat{f}_0 \in \mathcal{K}^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Es ist leicht zu sehen (vgl. Lemma 3.2 für den Fall daß $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum ist), daß S_0 und S_1 abgeschlossen und symmetrisch sind und $A \subset S_0$ gilt. Weiterhin gelten

$$S_i \subset T_i \subset S_i^+ \text{ und clos } T_i = S_i^+ \quad i = 0, 1. \tag{4.6}$$

Wir zeigen dies für $i = 0$ und beweisen hierzu, daß $S_0 = T_0^+$ ist. Da nach (4.5) $S_0 \subset T_0$ ist, so folgt dann die Behauptung. Es sei also $\hat{f}_0 \in S_0$ und $\hat{g}_0 \in T_0$ beliebig. Dann ist $\left\{ \binom{f_0}{0}, \binom{f_0'}{0} \right\} \in \widetilde{A}$ und es gibt $g_1, g_1' \in \mathcal{H}$, so daß $\left\{ \binom{g_0}{g_1}, \binom{g_0'}{g_1'} \right\} \in \widetilde{A}$ ist. Da $\widetilde{A}$ selbstadjungiert ist, so gilt

$$0 = \left[\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0' \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{K} \times \mathcal{H}} - \left[\begin{pmatrix} g_0' \\ g_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{K} \times \mathcal{H}} = [g_0, f_0']_{\mathcal{K}} - [g_0', f_0]_{\mathcal{K}} \tag{4.7}$$

und somit ist $\hat{f}_0 \in T_0^+$, also $S_0 \subset T_0^+$. Sei nun $\hat{f}_0 \in T_0^+$. Es gilt demnach $[g_0, f_0']_{\mathcal{K}} - [g_0', f_0]_{\mathcal{K}} = 0$ für alle $\hat{g}_0 \in T_0$. Damit folgt für beliebige Elemente $\left\{ \binom{g_0}{g_1}, \binom{g_0'}{g_1'} \right\} \in \widetilde{A}$, daß (4.7) gilt und somit $\left\{ \binom{f_0}{0}, \binom{f_0'}{0} \right\} \in \widetilde{A}^+ = \widetilde{A}$ ist, also $\hat{f}_0 \in S_0$ und $T_0^+ \subset S_0$. Insbesondere erhalten wir $T_0 \subset S_0^+ \subset A^+ = \operatorname{dom} \Gamma$.

Wir definieren nun Γ' wie in (4.4) und zeigen, daß Γ' eine Randrelation für S_1^+ ist, also daß dom Γ' dicht in S_1^+ und Γ' $[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitär ist.

(i) Da $T_0 \subset A^+$ ist, so ist dom $\Gamma' = T_1$, also dicht in S_1^+.

(ii) Γ' ist $[\![\cdot,\cdot]\!]$-unitär, also $\Gamma'^{-1} = \Gamma'^{[\![+]\!]}$. Dies sehen wir so: Sei zunächst $\{\hat{h}, \hat{f}_1\} \in \Gamma'^{-1} \subset H^2 \times \mathcal{H}^2$ beliebig. Also gibt es nach der Definition (4.4) von Γ' ein $\hat{f}_0 \in A^+$ mit $\hat{h} = \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0}$ und $\left\{ \binom{f_0}{f_1}, \binom{f_0'}{f_1'} \right\} \in \widetilde{A}$. Sei nun $\{\hat{g}_1, \hat{k}\} \in \Gamma'$ beliebig, also wieder $\hat{k} = \binom{\Gamma_0 \hat{g}_0}{-\Gamma_1 \hat{g}_0}$ und $\left\{ \binom{g_0}{g_1}, \binom{g_0'}{g_1'} \right\} \in \widetilde{A}$ für ein $\hat{g}_0 \in A^+$. Da $\widetilde{A}$ selbstadjungiert in $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ ist, so ist

$$\left[\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0' \\ g_1' \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{K} \times \mathcal{H}} - \left[\begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{K} \times \mathcal{H}} = 0.$$

Damit folgt mit der Definition des Randtripels Γ

$$\begin{aligned}
\llbracket \hat{h}, \hat{k} \rrbracket_{H^2} - \llbracket \hat{f}_1, \hat{g}_1 \rrbracket_{\mathcal{H}^2} &= \left\llbracket \begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{f}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{f}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{g}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{g}_0 \end{pmatrix} \right\rrbracket_{H^2} - \llbracket \hat{f}_1, \hat{g}_1 \rrbracket_{\mathcal{H}^2} \\
&= i\big((\Gamma_1 \hat{f}_0, \Gamma_0 \hat{g}_0)_H - (\Gamma_0 \hat{f}_0, \Gamma_1 \hat{g}_0)_H \big) - \llbracket \hat{f}_1, \hat{g}_1 \rrbracket_{\mathcal{H}^2} \\
&= i\big([f_0', g_0]_{\mathcal{K}} - [f_0, g_0']_{\mathcal{K}} - [f_1, g_1']_{\mathcal{H}} - [f_1', g_1]_{\mathcal{H}} \big) \\
&= i \left(\left[\begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{K}\times\mathcal{H}} - \left[\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0' \\ g_1' \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{K}\times\mathcal{H}} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also ist $\{\hat{h}, \hat{f}_1\} \in \Gamma'^{\llbracket + \rrbracket}$ und somit $\Gamma'^{-1} \subset \Gamma'^{\llbracket + \rrbracket}$.

Sei nun $\{\hat{h}, \hat{f}_1\} \in \Gamma'^{\llbracket + \rrbracket}$. Also gilt für alle $\{\hat{g}_1, \hat{k}\} \in \Gamma'$:

$$\llbracket \hat{h}, \hat{k} \rrbracket_{H^2} \;=\; \llbracket \hat{f}_1, \hat{g}_1 \rrbracket_{\mathcal{H}^2} \quad . \tag{4.8}$$

Wir wollen $\{\hat{h}, \hat{f}_1\} \in \Gamma'^{-1}$ zeigen, also $\{\hat{f}_1, \hat{h}\} \in \Gamma'$, das heißt, es ist zu zeigen, daß es ein $\hat{f}_0 \in A^+$ gibt mit $\left\{ \binom{f_0}{f_1}, \binom{f_0'}{f_1'} \right\} \in \widetilde{A}$ und $\hat{h} = \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0}$. Nach Definition ist $\Gamma = \binom{\Gamma_0}{\Gamma_1}$ surjektiv, es gibt also ein $\hat{f}_0 \in A^+$ mit $\Gamma \hat{f}_0 = \binom{h}{-h'}$, also $\hat{h} = \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0}$. Wir zeigen jetzt, daß $\left\{ \binom{f_0}{f_1}, \binom{f_0'}{f_1'} \right\} \in \widetilde{A}^+ = \widetilde{A}$ ist. Sei dazu $\left\{ \binom{g_0}{g_1}, \binom{g_0'}{g_1'} \right\} \in \widetilde{A}$ beliebig. Dann ist nach der Definition von Γ' $\{\hat{g}_1, \hat{k}\} \in \Gamma'$ mit $\hat{k} := \binom{\Gamma_0 \hat{g}_0}{-\Gamma_1 \hat{g}_0}$. Es ist mit (4.8)

$$\begin{aligned}
\llbracket \hat{f}_1, \hat{g}_1 \rrbracket_{\mathcal{H}^2} \;=\; \llbracket \hat{h}, \hat{k} \rrbracket_{H^2} \;&=\; \left\llbracket \begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{f}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{f}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{g}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{g}_0 \end{pmatrix} \right\rrbracket_{H^2} \\
&= i\big(-(\Gamma_0 \hat{f}_0, \Gamma_1 \hat{g}_0)_H + (\Gamma_1 \hat{f}_0, \Gamma_0 \hat{g}_0)_H \big) \\
&= \; - \llbracket \Gamma \hat{f}_0, \Gamma \hat{g}_0 \rrbracket_{H^2} \;=\; - \llbracket \hat{f}_0, \hat{g}_0 \rrbracket_{\mathcal{H}^2}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0' \\ g_1' \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{K}\times\mathcal{H}} - \left[\begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{K}\times\mathcal{H}} &= \\
&= [f_0, g_0']_{\mathcal{K}} + [f_1, g_1']_{\mathcal{H}} - [f_0', g_0]_{\mathcal{K}} - [f_1', g_1]_{\mathcal{H}} \\
&= \; - i\big(\llbracket \hat{f}_0, \hat{g}_0 \rrbracket_{\mathcal{K}^2} + \llbracket \hat{f}_1, \hat{g}_1 \rrbracket_{\mathcal{H}^2} \big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Somit ist $\left\{ \binom{f_0}{f_1}, \binom{f_0'}{f_1'} \right\} \in \widetilde{A}^+ = \widetilde{A}$ und nach der Definition von Γ' ist $\{\hat{f}_1, \hat{h}\} \in \Gamma'$, also $\{\hat{h}, \hat{f}_1\} \in \Gamma'^{-1}$. Wir erhalten $\Gamma'^{\llbracket + \rrbracket} \subset \Gamma'^{-1}$ und mithin ist Γ' $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$-unitär.

Also ist Γ' eine Randrelation für S_1^+.

Es verbleibt zu zeigen, daß $\widetilde{A}$ die Form (4.3) hat. Wir bemerken an dieser Stelle, daß ran $\Gamma' = \left\{ \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0} \;\middle|\; \hat{f}_0 \in T_0 \right\}$ ist, wie aus der Definition (4.4) folgt. Desweiteren ist mul $\Gamma' = \left\{ \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0} \;\middle|\; \hat{f}_0 \in S_0 \right\}$. Ist nämlich $\hat{f}_0 \in S_0$, so ist $\left\{ \binom{f_0}{0}, \binom{f_0'}{0} \right\} \in \widetilde{A}$ und somit $\left\{ \hat{0}, \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0} \right\} \in \Gamma'$, also $\binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0} \in$ mul Γ'. Ist nun $\hat{h} \in$ mul Γ', so ist $\{\hat{0}, \hat{h}\} \in \Gamma'$ und nach (4.4) gibt es ein $\hat{f}_0 \in A^+$ mit $\hat{h} = \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0}$ und $\left\{ \binom{f_0}{0}, \binom{f_0'}{0} \right\} \in \widetilde{A}$, also $\hat{f}_0 \in S_0$.

Wir zeigen (4.3). Sei zunächst $\left\{ \binom{f_0}{f_1}, \binom{f_0'}{f_1'} \right\} \in \widetilde{A}$ beliebig. Also ist $\hat{f}_0 \in T_0 \subset A^+$ und $\hat{f}_1 \in T_1 =$ dom Γ'. Nach (4.4) ist demnach $\left\{ \hat{f}_1, \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0} \right\} \in \Gamma'$. Seien nun umgekehrt $\hat{f}_0 \in A^+, \hat{f}_1 \in$ dom Γ' mit $\left\{ \hat{f}_1, \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0} \right\} \in \Gamma'$. Nach Definition von Γ' gibt es also ein $\hat{g}_0 \in A^+$, so daß $\left\{ \binom{g_0}{f_1}, \binom{g_0'}{f_1'} \right\} \in \widetilde{A}$ und $\binom{\Gamma_0 \hat{g}_0}{-\Gamma_1 \hat{g}_0} = \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0}$. Somit ist $\Gamma \hat{f}_0 = \Gamma \hat{g}_0$, also $\hat{f}_0 - \hat{g}_0 \in \ker \Gamma = A \subset S_0$ und damit $\left\{ \binom{f_0 - g_0}{0}, \binom{f_0' - g_0'}{0} \right\} \in \widetilde{A}$. Schließlich erhalten wir auch $\left\{ \binom{f_0}{f_1}, \binom{f_0'}{f_1'} \right\} = \left\{ \binom{f_0 - g_0}{0}, \binom{f_0' - g_0'}{0} \right\} + \left\{ \binom{g_0}{f_1}, \binom{g_0'}{f_1'} \right\} \in \widetilde{A}$.

(2) Es sei nun τ die WEYL-Familie einer Randrelation $\Gamma' \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$, wobei $\mathcal{H}$ ein weiterer KREIN-Raum ist. Wir definieren über (4.3) eine Relation $\widetilde{A} \subset (\mathcal{K} \times \mathcal{H})^2$ und zeigen, daß $\widetilde{A}$ eine selbstadjungierte Erweiterung von A ist, für die (4.4) gilt.

(i) Zunächst beweisen wir, daß $\widetilde{A}$ symmetrisch ist, also $\widetilde{A} \subset \widetilde{A}^+$ gilt. Seien dazu $\left\{ \binom{f_0}{f_1}, \binom{f_0'}{f_1'} \right\}, \left\{ \binom{g_0}{g_1}, \binom{g_0'}{g_1'} \right\} \in \widetilde{A}$ beliebig, also $\hat{f}_0, \hat{g}_0 \in A^+$, $\hat{f}_1, \hat{g}_1 \in$ dom Γ' und $\left\{ \hat{f}_1, \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0} \right\}, \left\{ \hat{g}_1, \binom{\Gamma_0 \hat{g}_0}{-\Gamma_1 \hat{g}_0} \right\} \in \Gamma'$. Wie in (4.9) ist

$$\left[\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0' \\ g_1' \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{K} \times \mathcal{H}} - \left[\begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{K} \times \mathcal{H}} = -i\left([\![\hat{f}_0, \hat{g}_0]\!]_{\mathcal{K}^2} + [\![\hat{f}_1, \hat{g}_1]\!]_{\mathcal{H}^2} \right). \tag{4.10}$$

Ob der $[\![\cdot,\cdot]\!]-$Isometrie von Γ und Γ' ist weiterhin

$$\begin{aligned} -i\left([\![\hat{f}_0, \hat{g}_0]\!]_{\mathcal{K}^2} + [\![\hat{f}_1, \hat{g}_1]\!]_{\mathcal{H}^2} \right) = \\ &= -i\left([\![\Gamma \hat{f}_0, \Gamma \hat{g}_0]\!]_{H^2} + \left[\!\!\left[\begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{f}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{f}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{g}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{g}_0 \end{pmatrix} \right]\!\!\right]_{H^2} \right) \\ &= -i\left([\![\Gamma \hat{f}_0, \Gamma \hat{g}_0]\!]_{H^2} - [\![\Gamma \hat{f}_0, \Gamma \hat{g}_0]\!]_{H^2} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $\widetilde{A}$ symmetrisch.

(ii) Wir zeigen $\widetilde{A}^+ \subset \widetilde{A}$ und damit die Selbstadjungiertheit von $\widetilde{A}$. Sei dazu $\left\{\binom{f_0}{f_1}, \binom{f_0'}{f_1'}\right\} \in \widetilde{A}^+ \subset (\mathcal{K} \times \mathcal{H})^2$ beliebig, das heißt, es gilt $\left[\binom{f_0}{f_1}, \binom{g_0'}{g_1'}\right]_{\mathcal{K}\times\mathcal{H}} = \left[\binom{f_0'}{f_1'}, \binom{g_0}{g_1}\right]_{\mathcal{K}\times\mathcal{H}}$ für alle $\left\{\binom{g_0}{g_1}, \binom{g_0'}{g_1'}\right\} \in \widetilde{A}$. Wie in (4.10) gilt also

$$[\![\hat{f}_0, \hat{g}_0]\!]_{\mathcal{K}^2} = -[\![\hat{f}_1, \hat{g}_1]\!]_{\mathcal{H}^2} \text{ für alle } \left\{\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0' \\ g_1' \end{pmatrix}\right\} \in \widetilde{A}. \quad (4.11)$$

Es gilt

$$\hat{f}_0 \in A^+.$$

In der Tat, sei $\hat{g}_0 \in A = \ker \Gamma$ beliebig, also $\Gamma\hat{g}_0 = \hat{0}$. Da sicher $\{\hat{0}, \hat{0}\} \in \Gamma'$ gilt, so ist nach der Definition von $\widetilde{A}$ $\left\{\binom{g_0}{0}, \binom{g_0'}{0}\right\} \in \widetilde{A}$ und mit (4.11) also

$$[\![\hat{f}_0, \hat{g}_0]\!]_{\mathcal{K}^2} = -[\![\hat{f}_1, \hat{0}]\!]_{\mathcal{H}^2} = 0.$$

Somit ist $\hat{f}_0 \in A^{[\![\perp]\!]_{\mathcal{K}^2}} = A^+$. Weiterhin gilt

$$\hat{f}_1 \in \operatorname{dom} \Gamma' \text{ und } \left\{\hat{f}_1, \begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{f}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{f}_0 \end{pmatrix}\right\} \in \Gamma'.$$

Wir zeigen dazu

$$\left\{\begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{f}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{f}_0 \end{pmatrix}, \hat{f}_1\right\} \in \Gamma'^{-1} = \Gamma'^{[\![+]\!]}.$$

Sei hierzu $\{\hat{g}_1, \hat{k}\} \in \Gamma'$ beliebig. Dann gibt es, da Γ surjektiv ist, ein $\hat{g}_0 \in A^+$ mit $\hat{k} = \binom{\Gamma_0\hat{g}_0}{-\Gamma_1\hat{g}_0}$. Nach (4.3) ist $\left\{\binom{g_0}{g_1}, \binom{g_0'}{g_1'}\right\} \in \widetilde{A}$ und mit (4.11) folgt

$$\begin{aligned} [\![\hat{f}_1, \hat{g}_1]\!]_{\mathcal{H}^2} &= -[\![\hat{f}_0, \hat{g}_0]\!]_{\mathcal{K}^2} = -[\![\Gamma\hat{f}_0, \Gamma\hat{g}_0]\!]_{H^2} \\ &= \left[\!\!\left[\begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{f}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{f}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{g}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{g}_0 \end{pmatrix}\right]\!\!\right]_{H^2} = \left[\!\!\left[\begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{f}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{f}_0 \end{pmatrix}, \hat{k}\right]\!\!\right]_{H^2}. \end{aligned}$$

Somit ist $\left\{\binom{\Gamma_0\hat{f}_0}{-\Gamma_1\hat{f}_0}, \hat{f}_1\right\} \in \Gamma'^{[\![+]\!]} = \Gamma'^{-1}$.

Nach der Definition von $\widetilde{A}$ ist $\left\{\binom{f_0}{f_1}, \binom{f_0'}{f_1'}\right\} \in \widetilde{A}$. Somit ist $\widetilde{A}$ selbstadjungiert.

(iii) Wie in (a) gilt für ein $\hat{f}_0 \in A$, daß $\left\{\binom{f_0}{0}, \binom{f_0'}{0}\right\} \in \widetilde{A}$ ist, also $A \subset S_0$ und somit ist $\widetilde{A}$ eine Erweiterung von A.Es ist also $\widetilde{A}$ eine selbstadjungierte Erweiterung von A.

(iv) Wir zeigen nun, daß (4.4) gilt. Ist nämlich $\{\hat{f}_1, \hat{h}\} \in \Gamma'$, so gibt es wieder wegen der Surjektivität von Γ ein $\hat{f}_0 \in A^+$ mit $\hat{h} = \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0}$. Also ist $\{\hat{f}_1, \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0}\} \in \Gamma'$ und somit $\{\binom{f_0}{f_1}, \binom{f_0'}{f_1'}\} \in \widetilde{A}$.
Sei nun $\{\hat{f}_1, \hat{h}\} \in \mathcal{H}^2 \times H^2$ und $\hat{f}_0 \in A^+$ derart, daß $\hat{h} = \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0}$ und $\{\binom{f_0}{f_1}, \binom{f_0'}{f_1'}\} \in \widetilde{A}$ gelten. Hieraus erhalten wir, daß $\hat{f}_1 \in \operatorname{dom} \Gamma'$ und $\{\hat{f}_1, \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0}\} \in \Gamma'$ und damit auch $\{\hat{f}_1, \hat{h}\} \in \Gamma'$.

(3) Seien $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \times \mathcal{H})$ eine selbstadjungierte Erweiterung von A und τ die WEYL-Familie einer Randrelation $\Gamma' \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$, so daß (4.3) und (4.4) gelten. Sei $\lambda \in \rho(A_0)$ mit $0 \in \rho((M(\lambda) + \tau(\lambda))^{-1}$. Wir zeigen, daß dann (4.2) gilt und somit $P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ ist.
Es ist nämlich

$$(\widetilde{A}-\lambda)^{-1} = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} f_0' - \lambda f_0 \\ f_1' - \lambda f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \right\} \in (\mathcal{K} \times \mathcal{H})^2 \;\middle|\; \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix} \right\} \in \widetilde{A} \right\}$$

und da für $\hat{f}_1 \in T_1$ die Beziehung $f_1' - \lambda f_1 = 0$ genau dann gilt, wenn $\hat{f}_1 \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T_1)$ ist, so ist nun

$$(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathcal{K}} = \left\{ \left\{ f_0' - \lambda f_0, \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \right\} \;\middle|\; \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix} \right\} \in \widetilde{A}, \hat{f}_1 \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T_1) \right\}. \tag{4.12}$$

Sei nun $g \in \mathcal{K}$ beliebig. Wir definieren

$$f_\lambda := -\gamma(\lambda)\big(M(\lambda) + \tau(\lambda)\big)^{-1}\gamma^+(\overline{\lambda})g.$$

Es sind $\gamma(\lambda) \in \mathcal{L}(H, \mathcal{K})$ und $\gamma^+(\overline{\lambda}) \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, H)$. Da schließlich noch $(M(\lambda) + \tau(\lambda))^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ ist, so ist f_λ wohldefiniert und es gilt $f_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda(A^+)$. Da $\lambda \in \rho(A_0)$, so ist nach (2.6) $\binom{(A_0-\lambda)^{-1}g}{g+\lambda(A_0-\lambda)^{-1}g} \in A_0$ und wir definieren

$$\hat{f}_0 = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_0' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_\lambda \\ \lambda f_\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (A_0 - \lambda)^{-1} g \\ g + \lambda(A_0 - \lambda)^{-1} g \end{pmatrix}.$$

Also ist $\hat{f}_0 \in A^+$ wohldefiniert. Damit gilt nun

$$f_0' - \lambda f_0 = g$$

und

$$f_0 = (A_0 - \lambda)^{-1} g - \gamma(\lambda)\big(M(\lambda) + \tau(\lambda)\big)^{-1}\gamma^+(\overline{\lambda})g.$$

Es bleibt zu zeigen:

$$\text{Es gibt ein } \hat{f}_1 \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T_1) \text{ mit } \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix} \right\} \in \widetilde{A}. \tag{4.13}$$

Denn damit folgt dann $g = f_0' - \lambda f_0 \in \operatorname{dom}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{K}}$, und somit ist $P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{K}} g = f_0 = (A_0-\lambda)^{-1}g - \gamma(\lambda)\big(M(\lambda)+\tau(\lambda)\big)^{-1}\gamma^+(\overline{\lambda})g$. Also gilt (4.2) und es ist $P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$.
Wir zeigen nun also (4.13): Es ist

$$\hat{f}_\lambda = -\hat{\gamma}(\lambda)\big(M(\lambda)+\tau(\lambda)\big)^{-1}\gamma^+(\overline{\lambda})g$$

also folgt

$$\Gamma_0\hat{\gamma}(\lambda) = -\big(M(\lambda)+\tau(\lambda)\big)^{-1}\gamma^+(\overline{\lambda})g$$

und

$$\begin{pmatrix}\gamma^+(\overline{\lambda})g\\ \Gamma_0\hat{f}_\lambda\end{pmatrix} \in -\big(M(\lambda)+\tau(\lambda)\big)^{-1}.$$

Wir erhalten schließlich

$$\begin{pmatrix}\Gamma_0\hat{f}_\lambda\\ \gamma^+(\overline{\lambda})g\end{pmatrix} \in -M(\lambda)-\tau(\lambda) = \left\{\begin{pmatrix}h\\ -M(\lambda)h-h'\end{pmatrix} \;\middle|\; \hat{h}\in\tau(\lambda)\right\}.$$

Somit ist

$$\begin{pmatrix}\Gamma_0\hat{f}_\lambda\\ -\gamma^+(\overline{\lambda})g - M(\lambda)\Gamma_0\hat{f}_\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Gamma_0\hat{f}_\lambda\\ -\gamma^+(\overline{\lambda})g - \Gamma_1\hat{f}_\lambda\end{pmatrix} \in \tau(\lambda) = \Gamma'(\hat{\mathcal{N}}_\lambda(T_1).$$

Es gibt demnach ein $\hat{f}_1 \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T_1)$ mit $\left\{\hat{f}_1, \left(\begin{smallmatrix}\Gamma_0\hat{f}_\lambda\\ -\gamma^+(\overline{\lambda})-\Gamma_1\hat{f}_\lambda\end{smallmatrix}\right)\right\} \in \Gamma'$. Nun ist, da $\left(\begin{smallmatrix}(A_0-\lambda)^{-1}g\\ g+\lambda(A_0-\lambda)^{-1}g\end{smallmatrix}\right) \in A_0 = \ker\Gamma_0$ ist,

$$\Gamma_0\hat{f}_0 = \Gamma_0\hat{f}_\lambda + \Gamma_0\begin{pmatrix}(A_0-\lambda)^{-1}g\\ g+\lambda(A_0-\lambda)^{-1}g\end{pmatrix} = \Gamma_0\hat{f}_\lambda$$

und mit (2.5)

$$\Gamma_1\hat{f}_0 = \Gamma_1\hat{f}_\lambda + \Gamma_1\begin{pmatrix}(A_0-\lambda)^{-1}g\\ g+\lambda(A_0-\lambda)^{-1}g\end{pmatrix} = \Gamma_1\hat{f}_\lambda + \gamma^+(\overline{\lambda})g.$$

Somit ist schließlich

$$\left\{\hat{f}_1, \begin{pmatrix}\Gamma_0\hat{f}_0\\ -\Gamma_1\hat{f}_0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\hat{f}_1, \begin{pmatrix}\Gamma_0\hat{f}_\lambda\\ -\gamma^+(\overline{\lambda})-\Gamma_1\hat{f}_\lambda\end{pmatrix}\right\} \in \Gamma'.$$

Mit (4.3) ist also $\left\{\left(\begin{smallmatrix}f_0\\ f_1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}f_0'\\ f_1'\end{smallmatrix}\right)\right\} \in \widetilde{A}$.

(4) Sei nun $\lambda \in \rho(A_0)$, so daß

$$P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{K}} = \left\{\begin{pmatrix}f_0'-\lambda f_0\\ f_0\end{pmatrix} \in \mathcal{K}^2 \;\middle|\; \left\{\begin{pmatrix}f_0\\ f_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}f_0'\\ f_1'\end{pmatrix}\right\} \in \widetilde{A}\right.$$
$$\left.\text{für ein } \hat{f}_1 \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T_1)\right\} \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$$

gilt. Es ist zu zeigen:

$$\begin{aligned}\big(M(\lambda)+\tau(\lambda)\big)^{-1} &= \left\{ \begin{pmatrix} M(\lambda)h+h' \\ h \end{pmatrix} \in H^2 \;\middle|\; \hat{h}\in\tau(\lambda) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \Gamma_1\hat{f}_\lambda + h' \\ \Gamma_0\hat{f}_\lambda \end{pmatrix} \in H^2 \;\middle|\; \hat{f}_\lambda \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+) \text{ und } \begin{pmatrix} \Gamma_0\hat{f}_\lambda \\ h' \end{pmatrix} \in \tau(\lambda) \right\} \\ &\in \mathcal{L}(H).\end{aligned}$$

(i) Wir zeigen, daß mul $\big(M(\lambda)+\tau(\lambda)\big)^{-1} = \{0\}$ gilt. Sei hierzu $\hat{f}_\lambda \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+)$, $\binom{\Gamma_0\hat{f}_\lambda}{h'} \in \tau(\lambda)$ mit $\Gamma_1\hat{f}_\lambda + h' = 0$, also $h' = -\Gamma_1\hat{f}_\lambda$. Zu zeigen ist nun : $\Gamma_0\hat{f}_\lambda = 0$. Dies gilt, das $\binom{\Gamma_0\hat{f}_\lambda}{-\Gamma_1\hat{f}_\lambda} \in \tau(\lambda)$ ist und es somit ein $\hat{f}_1 \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T_1)$ gibt mit $\big\{\hat{f}_1, \binom{\Gamma_0\hat{f}_\lambda}{-\Gamma_1\hat{f}_\lambda}\big\} \in \Gamma'$. Damit ist $\big\{\binom{f_\lambda}{f_1}, \binom{f'_\lambda}{f'_1}\big\} = \big\{\binom{f_\lambda}{f_1}, \binom{\lambda f_\lambda}{\lambda f_1}\big\} \in \widetilde{A}$ und da $\hat{f}_\lambda \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+)$ ist, also $f'_\lambda - \lambda f_\lambda = 0$, folgt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ f_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_\lambda - \lambda f_\lambda \\ f_\lambda \end{pmatrix} \in P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{K}} .$$

Da $P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ und mithin

$$\operatorname{mul}\big(P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{K}}\big) = \{0\}$$

gilt, so folgt $f_\lambda = 0$, also $\hat{f}_\lambda = \hat{0}$, also $\Gamma_0\hat{f}_\lambda = 0$.

(ii) Es ist dom $\big(M(\lambda)+\tau(\lambda)\big)^{-1} = H$. In der Tat, sei $g \in H$ beliebig. Zu zeigen ist, daß es ein $\hat{f}_\lambda \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+)$ und ein $h' \in H$ gibt mit $\binom{\Gamma_0\hat{f}_\lambda}{h'} \in \tau(\lambda)$ und $h' + \Gamma_1\hat{f}_\lambda = g$. Da Γ surjektiv ist, gibt es ein $\hat{f}_0 \in A^+$ mit $\Gamma\hat{f}_0 = \binom{0}{-g}$. Also ist $\hat{f}_0 \in A_0$. Nach Voraussetzung ist dom $\big(P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\upharpoonright_{\mathcal{K}}\big) = \mathcal{K}$ und damit gibt es ein $\hat{f} \in A^+$ und ein $\hat{f}_1 \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(T_1)$ mit $\big\{\binom{f}{f_1}, \binom{f'}{f'_1}\big\} \in \widetilde{A}$ und $f' - \lambda f = f'_0 - \lambda f_0 \in \mathcal{K}$. Wir definieren $\hat{f}_\lambda := \hat{f} - \hat{f}_0$. Dann ist

$$f'_\lambda - \lambda f_\lambda = f' - f'_0 - \lambda f + \lambda f_0 = 0,$$

und wir erhalten $\hat{f}_\lambda \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+)$. Da $\big\{\binom{f}{f_1}, \binom{f'}{f'_1}\big\} \in \widetilde{A}$ ist, folgt $\big\{\hat{f}_1, \binom{\Gamma_0\hat{f}}{-\Gamma_1\hat{f}}\big\} \in \Gamma'$, also $\binom{\Gamma_0\hat{f}}{-\Gamma_1\hat{f}} \in \tau(\lambda)$. Es ist $\Gamma_0\hat{f} = \Gamma_0(\hat{f}_\lambda + \hat{f}_0) = \Gamma_0\hat{f}_\lambda$ und mit $h' := -\Gamma_1\hat{f}$ ist also $\binom{\Gamma_0\hat{f}_\lambda}{h'} \in \tau(\lambda)$ und

$$h' + \Gamma_1\hat{f}_\lambda = -\Gamma_1\hat{f} + \Gamma_1\hat{f}_\lambda = \Gamma_1(\hat{f}_\lambda - \hat{f}) = \Gamma_1(-\hat{f}_0) = g.$$

(iii) Wir zeigen, daß $\big(M(\lambda)+\tau(\lambda)\big)^{-1}$ abgeschlossen ist. Seien dazu $x, y \in H$ und $\binom{h}{h'} : \mathbb{N} \to \tau(\lambda)$ eine Folge mit

$$M(\lambda)h_n + h'_n \to y \text{ und } h_n \to x$$

für $n \to \infty$. Da $M(\lambda)$ stetig ist, gilt $h'_n \to y - M(\lambda)x$ und da $\tau(\lambda)$ abgeschlossen ist, $\tau(\lambda) \supset \binom{h_n}{h'_n} \to \binom{x}{y-M(\lambda)x}$, folgt

$$\begin{pmatrix} x \\ y - M(\lambda)x \end{pmatrix} \in \tau(\lambda),$$

also $\binom{x}{y} \in \tau(\lambda) + M(\lambda)$, also $\binom{y}{x} \in (M(\lambda)+\tau(\lambda))^{-1}$ und somit ist $(M(\lambda)+\tau(\lambda))^{-1}$ abgeschlossen.

(iv) Somit gilt $(M(\lambda)+\tau(\lambda))^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Satz 4.1 ist bewiesen. □

Wir bemerken zuerst folgendes: Ist in (1) $\widetilde{A}$ kanonisch, also $\mathcal{H} = \{0\}$, dann ist $S_1 = T_1 = \operatorname{dom}\Gamma' = \{0\}$ und $S_0 = T_0 = S_0^+$. Somit ist $\Gamma' = \left\{\{\hat{0}, \binom{\Gamma_0\hat{f}_0}{-\Gamma_1\hat{f}_0}\} \,\middle|\, \hat{f}_0 \in S_0 = S_0^+\right\}$ und die WEYL-Familie τ ist konstant, genauer gilt $\tau(\lambda) = \Gamma'(0) = \Gamma(-S_0) =: -\Theta$. Nun ist hier (bis auf die Identifizierung $\mathcal{K} \cong \mathcal{K} \times \{0\}$) $\widetilde{A} = S_0$ und die Formel (4.2) reduziert sich also zur Resolventenformel (2.11)

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1} &= (A_0-\lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)\big(M(\lambda)-\Theta\big)^{-1}\gamma^+(\overline{\lambda}) \\ &= (A_0-\lambda)^{-1} + \gamma(\lambda)\big(\Theta - M(\lambda)\big)^{-1}\gamma^+(\overline{\lambda}),\end{aligned}$$

mit $-\Theta = \Gamma(-S_0)$, also $\Theta = \Gamma(\widetilde{A})$ (vgl. (2.2)).
Ist τ eine konstante WEYL-Funktion einer Randrelation, dann ist wegen (3.21) $\tau \equiv \Theta = \Theta^* \subset H^2$. Ist nun $\Gamma' \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ eine minimale Randrelation mit WEYL-Familie Θ, so ist nach Korollar 3.24 dann $\mathcal{H} = \{0\}$ und somit ist $\widetilde{A}$ (bis auf Identifizierung $\mathcal{K} \cong \mathcal{K} \times \{0\}$) kanonische Erweiterung von A und wieder wird (4.2) zu (2.11). Es folgt somit Lemma 2.3 aus Satz 4.1.

Hilbert-Raum. Wir wollen nun den Fall genauer untersuchen, daß der Raum $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum ist.
Es sei $\mathcal{K}$ ein KREIN-Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ eine symmetrische Relation, $A_0 \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung von A mit nichtleerer Resolventenmenge und (H, Γ_0, Γ_1) ein Randtripel für A^+ mit $\ker \Gamma_0 = A_0$, WEYL-Familie M und γ-Feld γ.
Dann wird zu jeder Erweiterung $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \times \mathcal{H})$ von A, wobei $\mathcal{H}$ ein (möglicherweise trivialer) HILBERT-Raum ist, nach Satz 4.1 durch (4.4) eine Randrelation $\Gamma' \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ definiert, deren WEYL-Familie mit τ bezeichnet sei.

Da $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum ist, so ist nach Satz 3.21 τ eine NEVANLINNA-Familie.
Umgekehrt wird durch (4.3) zu jeder NEVANLINNA-Familie, welche nach Satz 3.21 WEYL-Familie einer Randrelation $\Gamma' \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$ ist, wobei $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum ist, eine selbstadjungierte Erweiterung $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \times \mathcal{H})$ von A definiert. Somit besteht eine bijektive Beziehung zwischen NEVANLINNA-Familien und den komprimierten Resolventen von selbstadjungierten Erweiterungen von A, wobei im Fall einer Austrittserweiterung der Austrittsraum ein HILBERT-Raum ist. Diese Beziehung soll nun genauer untersucht werden.
Sei zuerst $\mathcal{K}$ ein HILBERT-Raum. Dann erhalten wir durch (4.2) gerade die KREIN-NAIMARK-Formel für symmetrische Relationen mit gleichen, endlichen oder unendlichen Defektzahlen. Satz 4.1 liest sich unter Verwendung obiger Überlegungen nun folgendermaßen:

Korollar 4.2. (KREIN-NAIMARK-Formel) *Sei $\mathcal{K}$ ein* HILBERT-*Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ eine symmetrische Relation mit gleichen Defektzahlen. Sei (H, Γ_0, Γ_1) ein Randtripel für A^* mit* WEYL-*Funktion M, γ-Feld γ und $A_0 := \ker \Gamma_0$.*
Dann gibt es zu jeder selbstadjungierten Erweiterung $\widetilde{A}$ von A eine NEVANLINNA-*Familie $\tau \in \widetilde{\mathcal{R}}(H)$ und für jede* NEVANLINNA-*Familie τ eine selbstadjungierte Erweiterung $\widetilde{A}$, so daß*

$$P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction_{\mathcal{K}} = (A_0 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)\big(M(\lambda) + \tau(\lambda)\big)^{-1}\gamma^*(\overline{\lambda}) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$$

gilt.

Wir lassen nun zu, daß $\mathcal{K}$ ein KREIN-Raum ist, fordern aber, daß A endlichen Defekt hat und es eine selbstadjungierte kanonische Erweiterung A_0 von A gibt, die lokal definisierbar ist. Wir betrachten Erweiterungen, deren Austrittsraum (im Fall einer Austrittserweiterung) ein HILBERT-Raum ist und untersuchen deren lokale Spektraleigenschaften.

Satz 4.3. *Es sei $\mathcal{K}$ ein* KREIN-*Raum und $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ eine symmetrische Relation mit endlichem Defekt. Sei $A_0 \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung von A, die definisierbar über Ω ist, Ω ein Gebiet wie in Definition 1.15, und für die gilt, daß $\sigma_{--}(A_0)$ diskret in Ω ist. Es sei (H, Γ_0, Γ_1) ein Randtripel für A^+ mit $\ker \Gamma_0 = A_0$,* WEYL-*Familie M und γ-Feld γ.*

(i) *Es sei $\mathcal{H}$ ein* HILBERT-*Raum und $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \times \mathcal{H})$ eine selbstadjungierte Erweiterung von A, so daß $\rho(\widetilde{A}) \cap \Omega \neq \emptyset$ gilt. Dann ist $\widetilde{A}$ definisierbar über Ω und $\sigma_{--}(\widetilde{A})$ diskret in Ω. Weiterhin gibt es eine* NEVANLINNA-*Familie $\tau \in \widetilde{R}(H)$ mit*

(a) *für* $\lambda \in \rho(A_0) \cap (\Omega \backslash \overline{\mathbb{R}})$ *gilt*

$$\lambda \in \rho(\widetilde{A}) \iff \lambda \in \mathfrak{h}\big((M+\tau)^{-1}\big)$$

und

(b) *für alle* $\lambda \in \rho(A_0) \cap \mathfrak{h}\big((M+\tau)^{-1}\big)$ *gilt*

$$P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1} \restriction_{\mathcal{K}} = (A_0-\lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)\big(M(\lambda)+\tau(\lambda)\big)^{-1}\gamma^+(\overline{\lambda}).$$

(ii) *Es sei* $\tau \in \widetilde{R}(H)$ *und es gelte* $\rho(A_0) \cap \mathfrak{h}\big((M+\tau)^{-1}\big) \cap (\Omega \backslash \overline{\mathbb{R}}) \neq \emptyset$. *Dann gibt es einen* HILBERT-*Raum* $\mathcal{H}$ *und eine selbstadjungierte Erweiterung* $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \times \mathcal{H})$ *von* A, *die definisierbar über* Ω *ist, so daß* $\sigma_{--}(\widetilde{A})$ *diskret in* Ω *ist und* (a) *und* (b) *gelten.*

Beweis. (i) Sei $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum und $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \times \mathcal{H})$ eine selbstadjungierte Erweiterung von A mit $\rho(\widetilde{A}) \cap \Omega \neq \emptyset$. Da $\rho(\widetilde{A})$ offen ist, so ist auch $(\rho(\widetilde{A}) \cap \Omega) \backslash \overline{\mathbb{R}} \neq \emptyset$. Nun ist A_0 über Ω definisierbar, also ist insbesondere $(\sigma(A_0) \cap \Omega) \backslash \overline{\mathbb{R}}$ diskret und damit ist $(\rho(\widetilde{A}) \cap \rho(A_0) \cap \Omega) \backslash \overline{\mathbb{R}} \neq \emptyset$. Nach dem ersten Teil von Satz 4.1 gibt es nun eine WEYL-Familie einer Randrelation $\Gamma' \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$, so daß (b) gilt. Da $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum ist, so ist τ eine NEVANLINNA-Familie.
Wir zeigen nun, daß $\widetilde{A}$ definisierbar über Ω ist und $\sigma_{--}(\widetilde{A})$ diskret in Ω. Seien hierzu S_0, S_1 wie in (4.5) definiert. Da S_0 eine abgeschlossene, symmetrische Erweiterung von A ist und A endlichen Defekt n hat, so hat S_0 endlichen Defekt $m \leq n$ und nach Lemma 3.4 hat auch S_1 Defekt m und somit hat die abgeschlossene, symmetrische Relation

$$\begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix} \right\} \in (\mathcal{K} \times \mathcal{H})^2 \;\middle|\; \hat{f}_0 \in S_0 \text{ und } \hat{f}_1 \in S_1 \right\}$$

Defekt $2m$. Es gilt $\widetilde{A} \supset \left(\begin{smallmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_1 \end{smallmatrix}\right)$. Sei $B = B^* \subset \mathcal{H}^2$ eine beliebige kanonische selbstadjungierte Erweiterung von S_1. Da A_0 eine selbstadjungierte Erweiterung von S_0 ist, so ist

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \end{pmatrix} \right\} \in (\mathcal{K} \times \mathcal{H})^2 \;\middle|\; \hat{f}_0 \in A_0 \text{ und } \hat{f}_1 \in B \right\}$$

ebenfalls eine selbstadjungierte Erweiterung von $\left(\begin{smallmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_1 \end{smallmatrix}\right)$.
Sei nun $\lambda \in (\rho(\widetilde{A}) \cap \rho(A_0) \cap \Omega) \backslash \overline{\mathbb{R}}$. Da B selbstadjungiert im HILBERT-Raum $\mathcal{H}$ ist, so ist auch $\lambda \in (\rho\left(\begin{smallmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) \cap \Omega) \backslash \overline{\mathbb{R}}$ und nach Lemma 1.21 ist auch $\sigma_{--}(\left(\begin{smallmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right))$ diskret in Ω. Die symmetrische Relation $\left(\begin{smallmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_1 \end{smallmatrix}\right)$ hat endlichen Defekt $2m$ und somit gibt es ein Randtripel $(\mathbb{C}^{2m}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ für $\left(\begin{smallmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_1 \end{smallmatrix}\right)^+$ mit $\ker \Gamma_0 = \widetilde{A}$, WEYL-Funktion M_1 und γ-Feld γ_1. Nach Lemma 2.3 gibt es eine selbstadjungierte Relation $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathbb{C}^{2m})$, so daß

$$(\left(\begin{smallmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) - \lambda)^{-1} = (\widetilde{A}-\lambda)^{-1} + \gamma(\lambda)(M(\lambda)-\Theta)^{-1}\gamma^+(\overline{\lambda})$$

gilt. Insbesondere ist $\left(\begin{smallmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ eine endlichdimensionale Störung von $\widetilde{A}$ im Resolventensinne. Aus [6, Theorem 2.3] folgt nun, daß auch $\widetilde{A}$ definisierbar über Ω ist und weiter: Ist $\mu \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$, so gibt es nach Voraussetzung eine offene, zusammenhängende Umgebung $I_\mu \subset \overline{\mathbb{R}}$ von μ, so daß beide Komponenten von $I_\mu \backslash \{\mu\}$ von positivem Typ bezüglich $\left(\begin{smallmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ sind. Nach [6] gibt es dann eine offene, zusammenhängende (im allgemeinen kleinere) Umgebung von μ mit derselben Eigenschaft. Also ist auch $\sigma_{--}(\widetilde{A})$ diskret in Ω.

Es verbleibt, (a) zu zeigen. Sei hierzu $\lambda \in \rho(\widetilde{A}) \cap \rho(A_0) \cap (\Omega \backslash \overline{\mathbb{R}})$. Insbesondere ist dann $P_{\mathcal{K}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\restriction_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ und damit ist nach Satz 4.1 $\lambda \in \mathfrak{h}\big((M+\tau)^{-1}\big)$. Sei nun $\lambda \in \rho(A_0) \cap \mathfrak{h}\big((M+\tau)^{-1}\big) \cap (\Omega \backslash \overline{\mathbb{R}})$. Wir zeigen, daß $\lambda \in \rho(\widetilde{A})$ ist, also daß (mit (4.3))

$$\widetilde{A}-\lambda = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0' - \lambda f_0 \\ f_1' - \lambda f_1 \end{pmatrix} \right\} \in (\mathcal{K} \times \mathcal{H})^2 \;\middle|\; \hat{f}_0 \in A^+ \right. \\ \left. \text{und } \left\{ \hat{f}_1, \begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{f}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{f}_0 \end{pmatrix} \right\} \in \Gamma' \right\}$$

injektiv, surjektiv und abgeschlossen ist. Die Abgeschlossenheit ist klar, da $\widetilde{A}$ abgeschlossen ist.
Wir zeigen nun die Injektivität. Sei $f_0' - \lambda f_0 = 0, f_1' - \lambda f_1 = 0$ und $\left\{\binom{f_0}{f_1}, \binom{f_0'}{f_1'}\right\} \in \widetilde{A}$. Somit ist $\hat{f}_0 \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+)$ und $\hat{f}_1 \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(\operatorname{dom}\Gamma')$ und $\left\{\hat{f}_1, \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0}\right\} \in \Gamma'$. Mit $h := \Gamma_0 \hat{f}_0$ ist $\binom{h}{M(\lambda)h} \in M(\lambda)$. Es ist aber $\binom{h}{-M(\lambda)h} = \binom{\Gamma_0 \hat{f}_0}{-\Gamma_1 \hat{f}_0} \in \Gamma'\big(\hat{\mathcal{N}}_\lambda(\operatorname{dom}\Gamma')\big) = \tau(\lambda)$. Somit folgt

$$\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ M(\lambda)h - M(\lambda)h \end{pmatrix} \in M(\lambda) + \tau(\lambda).$$

Da $\lambda \in \mathfrak{h}\big((M+\tau)^{-1}\big)$ ist, so ist $M(\lambda)+\tau(\lambda)$ injektiv, also $h=0$. Sei γ' das γ-Feld der Randrelation Γ'. Da $\gamma(\lambda)$ und $\gamma'(\lambda)$ nach (2.5) und (3.25) Operatoren sind ($\mathcal{H}$ ist ein Hilbert-Raum), so ist $f_0 = \gamma(\lambda)h = 0$ und $f_1 = \gamma'(\lambda)h = 0$, also auch $\binom{f_0}{f_1} = 0$ und somit ist $\widetilde{A}-\lambda$ injektiv.

Wir zeigen nun die Surjektivität von $\widetilde{A}-\lambda$.
Es sei $\binom{g_0}{g_1} \in (\mathcal{K} \times \mathcal{H})$ beliebig. Zu zeigen ist, daß es Elemente $\hat{\mathfrak{f}}_0 \in A^+$ und $\hat{\mathfrak{f}}_1 \in \operatorname{dom}\Gamma'$ gibt mit $\left\{\hat{\mathfrak{f}}_1, \binom{\Gamma_0 \hat{\mathfrak{f}}_0}{-\Gamma_1 \hat{\mathfrak{f}}_0}\right\} \in \Gamma'$ und $\binom{\mathfrak{f}_0' - \lambda \mathfrak{f}_0}{\mathfrak{f}_1' - \lambda \mathfrak{f}_1} = \binom{g_0}{g_1}$.

(1) Da nach Voraussetzung $\lambda \in \rho(A_0)$ ist, gibt es ein $\hat{f}_0 \in A_0$, so daß $f_0' - \lambda f_0 = g_0$ ist. Sei $x := \Gamma_1 \hat{f}_0$.

(2) Es ist $\mathcal{J}(\Gamma') \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H} \times H)$ selbstadjungiert und $\mathcal{H} \times H$ ein Hilbert-Raum, also ist $\lambda \in \rho(\mathcal{J}(\Gamma')$ und es gibt ein $\left\{\binom{f_1}{h}, \binom{f_1'}{-h'}\right\} \in \mathcal{J}(\Gamma')$, also ein $\{\hat{f}_1, \hat{h}\} \in \Gamma'$, so daß

$$f_1' - \lambda f_1 = g_1 \quad \text{und} \quad -h' - \lambda h = y \in H \text{ beliebig}$$

gilt.

(3) Es ist dom $M = H$, und es gibt daher ein $\hat{f}_\lambda \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+)$, so daß $\Gamma \hat{f}_\lambda = \binom{h}{M(\lambda)h}$ ist. Nach Voraussetzung ist auch $M(\lambda) + \tau(\lambda)$ surjektiv und somit gibt es ein $\hat{l} \in \tau(\lambda)$, so daß

$$\text{ran}\,(M(\lambda) + \tau(\lambda)) \ni M(\lambda)l + l' = -(h' + M(\lambda)h + x) \qquad (4.14)$$

gilt. Es seien nun $\hat{f}_{0\lambda} \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(A^+)$ und $\hat{f}_{1\lambda} \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda(\text{dom}\,\Gamma')$ mit $\{\hat{f}_{1\lambda}, \hat{l}\} \in \Gamma'$ und $l = \Gamma_0 \hat{f}_{0\lambda}$.

Wir setzen

$$\hat{\mathfrak{f}}_0 := \hat{f}_0 + \hat{f}_\lambda + \hat{f}_{0\lambda} \in A^+$$

und

$$\hat{\mathfrak{f}}_1 := \hat{f}_1 + \hat{f}_{1\lambda} \in \text{dom}\,\Gamma'.$$

Mit dieser Definition ist

$$\mathfrak{f}_0' - \lambda \mathfrak{f}_0 = f_0' - \lambda f_0 + 0 + 0 = g_0$$

und

$$\mathfrak{f}_1' - \lambda \mathfrak{f}_1 = f_1' - \lambda f_1 + 0 = g_1.$$

Zu zeigen bleibt, daß $\left\{\hat{\mathfrak{f}}_1, \binom{\Gamma_0 \hat{\mathfrak{f}}_0}{-\Gamma_1 \hat{\mathfrak{f}}_0}\right\} \in \Gamma'$ ist: Es ist mit (4.14)

$$\begin{pmatrix} \Gamma_0 \hat{\mathfrak{f}}_0 \\ -\Gamma_1 \hat{\mathfrak{f}}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + h + l \\ -(x + M(\lambda)h + M(\lambda)l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h + l \\ h' + l' \end{pmatrix}.$$

Da $\{\hat{f}_1, \hat{h}\}, \{\hat{f}_{1\lambda}, \hat{l}\} \in \Gamma'$ sind, so ist auch

$$\{\hat{f}_1 + \hat{f}_{1\lambda}, \hat{h} + \hat{l}\} = \left\{\hat{\mathfrak{f}}_1, \begin{pmatrix} h + l \\ h' + l' \end{pmatrix}\right\} \in \Gamma'$$

und somit ist $\left\{\binom{\mathfrak{f}_0}{\mathfrak{f}_1}, \binom{\mathfrak{f}_0'}{\mathfrak{f}_1'}\right\} \in \widetilde{A}$, also $\widetilde{A} - \lambda$ surjektiv. Somit ist schließlich $\lambda \in \rho(\widetilde{A})$ und es folgt (i).

(ii) Sei $\tau \in \widetilde{R}(H)$ und sei $\rho(A_0) \cap \mathfrak{h}\big((M+\tau)^{-1}\big) \cap (\Omega \backslash \mathbb{R}) \neq \emptyset$. Nach Satz 3.21 gibt es einen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ und eine Randrelation $\Gamma' \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^2, H^2)$, deren Weyl-Familie gerade τ ist. Nach Satz 4.1 gibt es eine selbstadjungierte Erweiterung $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \times \mathcal{H})$ von A, so daß (b) gilt. Wie im ersten Teil folgt auch (a), und insbesondere ist also $\rho(\widetilde{A}) \cap \Omega) \neq \emptyset$ und ebenso wie im ersten Teil folgt, daß $\widetilde{A}$ definisierbar über Ω und $\sigma_{--}(\widetilde{A})$ diskret in Ω ist.

□

Symbolverzeichnis und Notationen

$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$	reelle bzw. komplexe Zahlen
$\mathbb{C}^+$	obere Halbebene
$\mathbb{R}^+$,$\mathbb{R}_0^+$	reelle Zahlen >0 bzw. ≥ 0
$\overline{\mathbb{R}}$,$\overline{\mathbb{C}}$	Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}$ bzw.$\mathbb{C}$
$[\cdot,\cdot]$	indefinites inneres Produkt, S. 5
$(\cdot,\cdot)$	inneres Produkt im HILBERT-Raum
$A^{[\perp]}$	Orthogonalraum zu A im KREIN-Raum $(\mathcal{H},[\cdot,\cdot])$, S. 5
$A^{\perp}$	Orthogonalraum zu A im HILBERT-Raum $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$
$\|\cdot\|$	Norm im Raum $\mathcal{H}$, S. 6
$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, H	KREIN- bzw. HILBERT-Räume, S. 6
$\mathcal{H}[\dot{+}]\mathcal{K}$	direkte, orthogonale Summe von Unterräumen $\mathcal{H},\mathcal{K}$
$\mathcal{H}\times\mathcal{K}$	kartesisches Produkt der Räume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$
J, $\mathfrak{J}$	Fundamentalzerlegung eines KREIN-Raumes, S. 6
$\hat{f}$	siehe S. 7
$\left\{\binom{f}{g},\binom{h}{k}\right\}$	siehe S. 7
$\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$	Menge der abgeschlossenen Relationen, S. 7
dom A	Definitionsbereich der Relation A, S. 7
ran A	Bild der Relation A, S. 7
ker A	Kern der Relation A, S. 7
mul A	$A(0)$, S. 7
clos A	Abschlus von A
clsp M	Abschlus der linearen Hülle von M
$A+B$	Addition von Relationen als Zuordnungen, S. 8
$A\hat{+}B$	Addition von Relationen als Unterräume, S. 8
A^{-1}	Inverse von A, S. 8
$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$	Blockdiagonalrelation, S. 8
$A(X)$	Bild von X unter A, S. 8
$\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$	Menge der stetigen, überall definierten Operatoren, S. 8
$\mathcal{C}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $\mathcal{C}(\mathcal{H})$	Menge der abgeschlossenen Operatoren, S. 8
$[\![\cdot,\cdot]\!]$	siehe S. 9
A^+, A^*	Adjungierte im KREIN- bzw. HILBERT- Raum, S. 9

$\mathcal{N}_\lambda(A)$ $\hat{\mathcal{N}}_\lambda(A)$	siehe S. 9
$n_\pm(A)$	Defektzahlen von A, S. 9
Re A, Im A	Real- und Imaginärteil von A, S. 10
$\rho(A)$	Resolventenmenge von A, S. 11
$\sigma(A)$, $((\widetilde{\sigma}(A))$	(erweitertes) Spektrum von A, S. 11
$\sigma_{ap}(A)$, $(\widetilde{\sigma}_{ap}(A))$	(erweitertes) approximatives Punktspektrum, S. 12
$\sigma_{++}(A)$, $\sigma_{--}(A)$	Spektrum positiven (negativen) Typs, S. 12
Ω	Gebiet in $\overline{\mathbb{C}}$, siehe z.B. Definition 1.15
π_+, π_-	siehe S. 18
$\widetilde{N}_\kappa(\mathcal{H})$, $N_\kappa(\mathcal{H})$	Menge der verallgemeinerten Nevanlinna-Familien bzw. Funktionen, S. 22
$\widetilde{\mathcal{R}}(\mathcal{H})$	Menge der Nevanlinna-Familien, S. 23
$\mathcal{R}(\mathcal{H})$	Menge der Nevanlinna-Funktionen, S. 23
$\mathcal{R}[\mathcal{H}]$	Menge der $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertigen Nevanlinna-Funktionen, S. 23
$\mathcal{R}_0(\mathcal{H})$	siehe S. 24
$\mathfrak{h}$	Holomorphiegebiet einer Funktion, S. 21
(H, Γ_0, Γ_1)	Randtripel, S. 27
Γ_0, Γ_1	siehe S. 36 (Randrelation), S. 27 (Randtripel)
A_0, A_1	Kerne von Γ_0 bzw. Γ_1, S. 27
$\gamma(\lambda)$	Gamma-Feld eines Randtripels oder einer Randrelation, S. 28, S. 37
$M(\lambda)$	Weyl-Funktion eines Randtripels, S. 28
$\mathcal{J}_C$, $\mathcal{J}$	Die Transformation $\mathcal{J}$, S. 32
S_0, S_1, T_0, T_1	siehe S. 32
$P_\mathcal{H}$	Orthogonalprojektion auf einen Unterraum $\mathcal{H}$
$\restriction_\mathcal{H}$	Einschränkung einer Funktion auf einen Unterraum $\mathcal{H}$
Γ	Randrelation, S. 36, oder Randtripel, S. 27
T	Definitionsbereich einer Randrelation, S. 36
$\tau(\lambda)$	Weyl-Familie einer Randrelation, S. 37

Literatur

[1] Achieser, N. und Glasmann, I. : *Theorie der linearen Operatoren im* Hilbert-*Raum*. Bd. 4 der Reihe *Mathematische Lehrbücher*. Akademie-Verlag Berlin, 5. Auflage, 1968

[2] Azizov, T. und Jonas, P. : *On locally definitizable matrix functions.* – eingereicht

[3] Azizov, T., Jonas, P. und Trunk, C. : *Spectral points of type* π_+ *and* π_- *of selfadjoint operators in* Krein *Spaces.* – erscheint in : *J. Funct. Anal.*

[4] Azizov, T. und Iohvidov, I. : *Linear Operators in Spaces with an Indefinite Metric* aus der Reihe *Pure and Applied Mathematics* John Wiley & Sons, 1989

[5] Behrndt, J. : *A Class of abstract boundary value problems with locally definitizable functions in the boundary condition.* 2005. – erscheint in: *Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel*

[6] Behrndt, J. : *Compact and finite rank pertubations of selfadjoint operators in* Krein *spaces with applications to boundary eigenvalue problems*, TU Berlin, Dissertation, 2005.

[7] Bognár, J. : *Indefinite Inner Product Spaces*. Bd. 78 der Reihe *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974

[8] Bruk, V. : On a class of boundary value problems with spectral parameters in the boundary conditions. In: *Math. USSR-Sb.* 29(2) (1976), S. 186–192

[9] Cross, R. : *Multivalued Linear Operators*. Bd. 213 der Reihe *Monographs and textbooks in pure and applied mathematics.* Marcel Dekker, New York-Basel-Hong Kong, 1998

[10] Derkach, V. , Hassi, S. , Malamud, M. und de Snoo, H. : *Boundary relations and their* Weyl *families.* Juni 2004. – Preprint der University of Vaasa

[11] Derkach, V. : On generalized resolvents of Hermitian operators in Krein spaces. In: *J. Math. Sci. (New York)* 97 (1999), S. 4420–4460

[12] Derkach, V. , Hassi, S. , Malamud, M. und de Snoo, H. : Generalized resolvents of symmetric operators and admissibility. In: *Methods Funct. Anal. Topology* 6(3) (2000), S. 24–55

[13] Derkach, V. und Malamud, M. : Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps. In: *J. Funct. Anal.* 95 (1991), S. 1–95

[14] Derkach, V. und Malamud, M. : The extension theory of hermitian operators and the moment problem. In: *J. Math. Sci.* 73 (1995), S. 141–242

[15] Dijksma, A. und de Snoo, H. : Selfadjoint Extensions of Symmetric Subspaces. In: *Pacific J. Math.* 54 (1974), S. 71–99

[16] Dijksma, A. und de Snoo, H. : Symmetric and selfadjoint relations in Krein Spaces I. In: *Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel* 24 (1987), S. 145–166

[17] Dijksma, A. und de Snoo, H. : Symmetric and selfadjoint relations in Krein Spaces II. In: *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I Math.* 12 (1987), S. 199–216

[18] Dijksma, A. , Langer, H. , Luger, A. und Shondin, Y. : A factorization result for generalized Nevanlinna functions of the class N_κ. In: *Integr. equ. oper. theory* 36 (2000), S. 121–125

[19] Gorbachuk, V. und Gorbachuk, M. : *Boundary Value Problems for Operator Differential Equations*. Bd. 48 der Reihe *Mathematics and Its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publisher Group, Dordrecht, 1991

[20] Hassi, S. , de Snoo, H. und Woracek, H. : Some interpolation problems of the Nevanlinna-Pick type. The Krein-Langer method. In: *Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel* 106 (1998), S. 201–216

[21] Iohvidov, I. , Krein, M. und Langer, H. : *Introduction to the Spektral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric*. Bd. 9 der Reihe *Mathematical Research*. Akademie-Verlag, Berlin, 1982

[22] Istrăţescu, V. I.: *Inner Product Structures, Theory and Applications* aus der Reihe *Mathematics and its applications* D.Reidel, Dordrecht, 1987

[23] Jonas, P. : *Minimal representations of locally definitizable functions.* – in Vorbereitung

[24] Jonas, P. : *On operator representations of locally definitizable functions.* – erscheint in: *Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel*

[25] Jonas, P. : On a class of unitary operators in Krein space. In: *Oper. Theory Adv. Appl.,Birkhäuser Verlag, Basel* 17 (1986), S. 151–172

[26] JONAS, P. : A class of operator-valued meromorphic functions on the unit disc. In: *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A I Math.* 17 (1992), S. 257–284

[27] JONAS, P. : On locally definite operators in KREIN spaces. In: *Spektral Theory and Its Applications, Theta Ser. Adv. Math.,* 2 (2003), S. 95–127

[28] JONAS, P. und LANGER, H. : *On the spectra of selfadjoint extensions of a nonnegative linear relation of defect one in a* KREIN *space.* – in Vorbereitung

[29] KAC, I. und KREIN, M. : R-functions - analytic functions mapping the upper halfplane into itself. In: *Amer. Math. Soc. Transl.(2)* 103 (1974), S. 1–18

[30] KATO, T. : *Pertubation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2. korr. Auflage, 1995

[31] KOCHUBEI, A. : On extensions of symmetric operators and symmetric binary relations. In: *Math. Notes* 17 (1975), S. 25–28

[32] KREIN, M. und LANGER, H. : Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raum Π_κ zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen. In: *Math. Nachr.* 77 (1977), S. 187–236

[33] LANGER, H. und B.TEXTORIUS: On generalized resolvents and Q-functions of symmetric linear relations (subspaces) in HILBERT spaces. In: *Pacific J. Math.* 72 (1977), S. 135–165

[34] LANGER, H. , MARKUS, A. und MATSAEV, V. : Locally definite operators in indefinite inner product spaces. In: *Math. Ann.* 308 (3) (1997), S. 405–424

[35] LANGER, H. : *Spektraltheorie linearer Operatoren in J-Räumen und einige Anwendungen auf die Schar* $L(\lambda) = \lambda^2 + \lambda B + C$, Habilitationsschrift, Dresden, 1965

[36] LANGER, H. : A characterization of generalized zeros of negative type of functions of the class N_κ. In: *Oper. Theory: Adv. and Appl., Birkhäuser Verlag, Basel* 17 (1986), S. 201–212

[37] LUGER, A. : *A characterization of generalized poles of generalized* NEVANLINNA *functions.* – eingereicht

[38] LUGER, A. : A factorization of regular generalized Nevanlinna Functions. In: *Integr. equ. oper. theory* 43 (3) (2002), S. 326–345