



TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II
Institut für Mathematik

Sobolew-Slobodeckij-Räume
Die Theorie der gebrochenen Sobolew-Räume

Ausarbeitung

im Seminar

Differentialgleichungen

(Sommersemester 2014)

vorgelegt von

Martin Genzel (Matr.-Nr. 328207)

Andreas Staab (Matr.-Nr. 331179)

Betreuer: Prof. Dr. Etienne Emmrich und Dr. Hans-Christian Kreuzler

Inhaltsverzeichnis

0	Notationen	3
1	Einleitung	4
2	Sobolew-Slobodeckij-Räume	5
2.1	Die klassischen Sobolew-Räume $W^{m,p}(\Omega)$	5
2.2	Definition und grundlegende Eigenschaften der Räume $W^{s,p}(\Omega)$	5
2.3	Regularität von Sprungstellen	8
2.4	Grenzverhalten für $\sigma \searrow 0$ und $\sigma \nearrow 1$	8
3	Zusammenhang zu gewichteten Lebesgue-Räumen	9
3.1	Fourier-Transformation	9
3.2	Die Räume $H^s(\Omega)$	10
4	Hauptresultate zu gebrochenen Sobolew-Räumen	14
4.1	Dichtheit von glatten Funktionen	14
4.2	Einbettungssätze	14
4.3	Spuoperatoren	16
5	Weiterführende Aspekte	18
5.1	Der Lions-Magenes-Raum $H_{00}^{1/2}(\Omega)$	18
5.2	Sobolew-Slobodeckij-Räume und Interpolation	18
5.3	Gewichtete Lebesgue-Räume für $p \neq 2$	19
6	Zusammenfassung	19
7	Literatur	20

0 Notationen

Wir wollen zunächst einige Notationen und Konventionen festhalten, die wir im Laufe dieser Arbeit benutzen werden:

- ▷ Zu den natürlichen Zahlen \mathbb{N} zählen wir die 0 stets dazu.
- ▷ Für die *Raumdimension* reservieren wir den Buchstaben d und verwenden für die Komponenten eines Vektors $x \in \mathbb{R}^d$ tiefgestellte Indizes, also x_1, \dots, x_d . Für die *euklidische Norm* schreiben wir $|x| = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2}$.
- ▷ Wenn nicht weiter spezifiziert, betrachten wir stets komplexwertige Funktionen auf (Teilmengen des) \mathbb{R}^d , die wir üblicherweise mit u bezeichnen. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge des Definitionsbereichs von u , so schreiben wir $u|_A$ für die *Restriktion* oder *Einschränkung* von u auf A .
- ▷ *Multiindizes* bezeichnen wir mit $\alpha, \beta, \dots \in \mathbb{N}^d$. Wir definieren den *Betrag* $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$, den *Ableitungsoperator* $D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$ für u hinreichend glatt, sowie das *Polynom* $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$.
- ▷ Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ (komplexe) normierte Räume sowie $A \subseteq X$. Dann verwenden wir die folgenden Notationen:
 - Topologischer *Rand* ∂A
 - Topologischer *Abschluss* $\bar{A} = \overline{A}^{\|\cdot\|_X}$
 - *Bälle* $B(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\|_X < r\}$, wobei $x \in X, r > 0$
 - *Dualraum* $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ mit $\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X=1} |f(x)|$
 - *Duale Paarung* $\langle f, x \rangle := f(x)$, wobei $f \in X^*, x \in X$
 - *Stetige Einbettung* $X \hookrightarrow Y$, *kompakte Einbettung* $X \hookrightarrow^c Y$
- ▷ Ein *Gebiet* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine nichtleere, offene und zusammenhängende Menge (nicht notwendigerweise beschränkt).
- ▷ Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $k \in \mathbb{N}$. Dann verwenden wir die folgenden Notationen:
 - *Lebesgue-Räume* $L^p(\Omega)$ mit Norm $\|u\|_{0,p} = (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$
 - *Räume stetig differenzierbarer Funktionen*

$$C^k(\Omega) := C^{k,0}(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid D^\beta u \text{ ex. und ist stetig für alle } |\beta| \leq k\},$$

$$C^k(\bar{\Omega}) := C^{k,0}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^{k,0}(\Omega) \mid D^\beta u \text{ glm. stetig und beschränkt für alle } |\beta| \leq k\},$$
 letztere Menge wird normiert durch $\|u\|_{C^{k,0}} = \sup_{|\beta| \leq k, x \in \Omega} |D^\beta u(x)|$
 - *Hölder-Halbnorm* $|u|_{C^{0,\alpha}} = \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$ für $0 < \alpha \leq 1$
 - *Hölder-Räume* $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^{k,0}(\bar{\Omega}) \mid \|u\|_{C^{k,\alpha}} := \|u\|_{C^{k,0}} + \sup_{|\beta|=k} |D^\beta u|_{C^{0,\alpha}} < \infty\}$
 - *Glatte Funktionen* $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$, $C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\bar{\Omega})$
 - *Testfunktionen* $C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } u := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x) \neq 0\}} \text{ kompakt in } \Omega\}$
- ▷ *Schwache* und *distributionelle Ableitungen* von u bezeichnen wir wieder mit $D^\alpha u$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$.
- ▷ Den *Gradienten* von u bezeichnen wir mit $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d})$ und der *Laplace-Operator* ist durch $\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ gegeben.
- ▷ Wir werden im Laufe dieser Arbeit gelegentlich *generische Konstanten* verwenden. Damit ist gemeint, dass wir in längeren Abschätzungen stets das gleiche Symbol für die Konstante (in der Regel ein C) benutzen, obwohl sich ihr Wert von Schritt zu Schritt ändern kann. Etwaige Abhängigkeiten von Parametern markieren wir zumeist durch tiefgestellte Indizes.

1 Einleitung

In dieser Seminararbeit möchten wir eine Einführung in die Theorie der *Sobolew-Slobodeckij-Räume* geben. Bei dieser Klasse von *Funktionsräumen* handelt es sich um eine Verallgemeinerung der klassischen *Sobolew-Räume* $W^{m,p}(\Omega)$ mit ganzzahliger (Ableitungs-)Ordnung m . Die grundlegende Idee dahinter ist es, die (schwache) *Regularität* einer Funktion nun sogar auf einer *kontinuierlichen* Skala zu messen, d.h. wir werden reelle Ordnungen $s \geq 0$ zulassen und die entsprechenden Räume $W^{s,p}(\Omega)$ einführen. Die ursprünglichen Sobolew-Räume sind dann für $s \in \mathbb{N}$ nur noch ein Spezialfall. Das Hauptziel unserer Darstellung wird es sein, einen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften und Charakterisierungen dieser „gebrochenen“ Funktionsräume zu geben. Dabei werden wir ein besonderes Augenmerk auf die Konsistenz mit den klassischen ganzzahligen Sobolew-Räumen legen und insbesondere untersuchen, inwiefern ein Zusammenhang zu gebrochener Differenzierbarkeit besteht.

Um die Bedeutung der Sobolew-Slobodeckij-Räume zu demonstrieren, beginnen wir zunächst mit einer kurzen Motivation aus der schwachen Lösungstheorie von Differentialgleichungen. Dazu betrachten wir die klassische *Poisson-Gleichung* mit *homogener Dirichlet-Randbedingung* auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \text{für } x \in \Omega, \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Zunächst nehmen wir an, dass $d = 1$ gelte, d.h. $\Omega = (a, b)$ sei ein Intervall. Dann sieht die schwache Formulierung von (1) wie folgt aus:

$$\begin{aligned} &\text{Für } f \in W^{-1,2}(\Omega) \text{ finde } u \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ mit} \\ &a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \langle f, v \rangle \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

Hierbei ist $W^{-1,2}(\Omega)$ der Dualraum von $W_0^{1,2}(\Omega)$, wobei¹

$$W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,2;\Omega}} = \{u \in W^{1,2}(\Omega) = W^{1,2}(a, b) \mid u(a) = 0 = u(b)\}. \quad (2)$$

Die Menge auf der rechten Seite ist wohldefiniert, denn im Fall $d = 1$ gilt die Einbettung $W^{1,2}(a, b) \hookrightarrow C^0([a, b])$. Nehmen wir nun $d > 1$ an, so ist $W^{1,2}(\Omega)$ nicht mehr in den Raum der stetigen Funktionen eingebettet. Da Sobolew-Funktionen nur fast überall definiert sind und $\partial\Omega$ im Allgemeinen eine Nullmenge ist, kann man im Mehrdimensionalen eine einfache Charakterisierung des $W_0^{1,2}(\Omega)$ wie in (2) leider nicht mehr erwarten.

Fordern wir etwas Regularität² für den Rand von Ω , so können wir die punktweise Auswertung durch die Verwendung des *Spuroperators* $S: W^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ ersetzen. Für glatte Funktionen gilt dann wieder $S(u) = u|_{\partial\Omega}$ und man zeigt die Charakterisierung (siehe z.B. [5, Satz 6.18])

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid S(u) = 0 \text{ in } L^2(\partial\Omega)\}.$$

Noch schwieriger wird die Frage nach einer sinnvollen schwachen Formulierung, wenn wir die *inhomogene Poisson-Gleichung*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \text{für } x \in \Omega, \\ u = g \text{ auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

¹Ein Beweis der zweiten Gleichheit ist beispielsweise in [6, Satz 3.2.13] zu finden.

²Was mit „Regularität“ genau gemeint ist, werden wir im Laufe dieser Arbeit natürlich noch präzisieren.

für eine fest vorgegebene „Randfunktion“ g auf $\partial\Omega$ betrachten. Da der Spuroperator S nicht surjektiv ist, ist an dieser Stelle zunächst unklar, was eine sinnvolle Vorgabe für g in der schwachen Formulierung sein soll. Mit anderen Worten suchen wir nach dem Bild $S(W^{1,2}(\Omega))$ des Spuroperators. Später (in Abschnitt 4.3) werden wir sehen, dass $S(W^{1,2}(\Omega)) = W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ gilt. Dies zeigt insbesondere, dass die Sobolew-Slobodeckij-Räume selbst bei klassischen Problemstellungen, wie der Poisson-Gleichung, auf eine ganz natürliche Art und Weise in Erscheinung treten.

2 Sobolew-Slobodeckij-Räume

2.1 Die klassischen Sobolew-Räume $W^{m,p}(\Omega)$

Bevor wir die Sobolew-Slobodeckij-Räume einführen, sei zunächst an die Definition der Sobolew-Räume mit ganzzahliger Ordnung erinnert:

Definition 2.1 *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ definieren wir den Sobolew-Raum der Ordnung m durch*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \text{Schw. Abl. } D^\alpha u \text{ existiert und } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq m\},$$

und versehen diese Menge mit der Sobolew-Norm¹

$$\|u\|_{m,p;\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Im Fall $m = 0$ erhalten wir gerade die klassischen Lebesgue-Räume $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$. Von daher ist es nicht verwunderlich, dass sich viele von deren Eigenschaften auf die Sobolew-Räume übertragen:

Satz 2.2 *Die Paare $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ bilden separable Banach-Räume, die für $1 < p < \infty$ sogar reflexiv sind. Weiterhin wird $W^{m,2}(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt*

$$(u, v)_{m;\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx, \quad u, v \in W^{m,2}(\Omega)$$

zu einem Hilbert-Raum.

Beweis. Siehe z.B. [1, Theorem 3.2, 3.5]. □

2.2 Definition und grundlegende Eigenschaften der Räume $W^{s,p}(\Omega)$

Wir wollen nun die klassischen Sobolew-Räume $W^{m,p}(\Omega)$ auf eine beliebige reelle Ordnung verallgemeinern. Der zugrunde liegende Ansatz ist dabei, den höchsten ganzzahligen Ableitungen einen *gebrochenen* Anteil hinzuzufügen. Diese zusätzliche „Regularität“ messen wir dann mit Hilfe der *Slobodeckij-Halbnorm*.

Definition 2.3 *Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $1 \leq p < \infty$ und $0 < \sigma < 1$. Ist $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, so definieren wir die Slobodeckij-Halbnorm*

$$|u|_{\sigma,p;\Omega} := \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{d+\sigma p}} dx dy \right)^{1/p}.$$

¹Gelegentlich schreiben wir auch $\|\cdot\|_{m,p}$ anstelle von $\|\cdot\|_{m,p;\Omega}$, falls klar ist, über welches Gebiet wir integrieren.

Für $s = m + \sigma$ mit $m \in \mathbb{N}$ definieren wir dann den Sobolew-Slobodeckij-Raum der Ordnung s durch¹

$$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in W^{m,p}(\Omega) \mid |D^\alpha u|_{\sigma,p;\Omega} < \infty \text{ für alle } |\alpha| = m\},$$

und versehen diesen mit der Norm

$$\|u\|_{s,p;\Omega} := \left(\|u\|_{m,p;\Omega}^p + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|_{\sigma,p;\Omega}^p \right)^{1/p}.$$

Bemerkung 2.4 (1) Diese Definition schließt nur $s \notin \mathbb{N}$ ein. Gilt $s = m \in \mathbb{N}$, so verwenden wir natürlich die klassischen Sobolew-Räume aus Definition 2.1.

(2) Die Definition der Slobodeckij-Halbnorm wirkt zunächst etwas unhandlich. Um einen ersten Eindruck davon zu bekommen, dass $|\cdot|_{\sigma,p;\Omega}$ tatsächlich die Regularität von Funktionen misst, macht es durchaus Sinn zunächst den formalen Grenzübergang $p \nearrow \infty$ zu untersuchen (obgleich $p = \infty$ in den obigen Definitionen ausgeschlossen wurde):

$$|u|_{\sigma,p;\Omega} = \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{d/p + \sigma}} \right)^p dx dy \right)^{1/p} \xrightarrow{p \nearrow \infty} \text{esssup}_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\sigma} =: |u|_{\sigma,\infty;\Omega}.$$

Im Grenzfall $p = \infty$ erhalten wir also zumindest formal die Hölder-Räume $C^{0,\sigma}(\overline{\Omega})$. Für Ω beschränkt und $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ kann man nun die kompakte Einbettung $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ zeigen (vgl. [5, Satz 2.42]). In diesem Sinne füllen die Hölder-Räume die „Lücke“ zwischen den stetigen und den Lipschitz-stetigen Funktionen in einer kontinuierlichen Weise auf. Im Zuge von Proposition 2.6 und Satz 4.4 werden wir entsprechende Analogien auch für die Slobodeckij-Räume kennenlernen.

Wir wollen nun einige grundlegende Eigenschaften der Slobodeckij-Räume untersuchen. Das folgende Resultat ist die direkte Verallgemeinerung von Satz 2.2.

Satz 2.5 Für alle $s \geq 0$ und $1 \leq p < \infty$ bildet $(W^{s,p}(\Omega), \|\cdot\|_{s,p})$ einen separablen Banach-Raum, der im Fall $1 < p < \infty$ sogar reflexiv ist.

Gilt $s = m + \sigma$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $0 < \sigma < 1$, so bildet $W^{s,2}(\Omega)$ zusammen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{s;\Omega} := (u, v)_{m;\Omega} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{[D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)][D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)]}{|x - y|^{d+2\sigma}} dx dy$$

wieder einen Hilbert-Raum.

Beweis. Es sei $(u_n)_n \subseteq W^{s,p}(\Omega)$ eine Cauchy-Folge. Dann ist $(u_n)_n$ insbesondere auch eine Cauchy-Folge in $W^{m,p}(\Omega)$ (hier ist wieder $s = m + \sigma$) und wegen Satz 2.2 reicht es somit aus, den Fall $m = 0$ zu betrachten. Die Vollständigkeit von $L^p(\Omega)$ und der Satz von Riesz implizieren die Existenz einer Teilfolge $(u_{n_k})_k$ und $u \in L^p(\Omega)$ mit $u_{n_k} \rightarrow u$ punktweise fast überall. Damit folgt

$$\frac{|(u_{n_k}(x) - u_{n_l}(x)) - (u_{n_k}(y) - u_{n_l}(y))|^p}{|x - y|^{d+\sigma p}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{|(u_{n_k}(x) - u(x)) - (u_{n_k}(y) - u(y))|^p}{|x - y|^{d+\sigma p}}$$

für fast alle $x, y \in \Omega$. Sind nun $k, l \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass $|u_{n_k} - u_{n_l}|_{\sigma,p} \leq \varepsilon$, so folgt mit dem Lemma von Fatou $|u_{n_k} - u|_{\sigma,p} \leq \varepsilon$, wenn $l \rightarrow \infty$. Also gilt $u_{n_k} \rightarrow u$ in $W^{s,p}(\Omega)$. Die Vollständigkeit erhalten wir schließlich aus der Tatsache, dass eine Cauchy-Folge bereits konvergent ist, falls eine Teilfolge konvergiert.

Die Separabilität folgt unmittelbar aus dem Satz von Meyers-Serrin (siehe Satz 4.1) und $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$ (siehe Proposition 2.6), denn wir wissen bereits, dass $W^{m+1,p}(\Omega)$ separabel ist. Die Reflexivität wird beispielsweise in [1, S. 205] bewiesen. \square

¹In Folge werden wir auch kurz von Slobodeckij-Räumen oder gebrochenen Sobolew-Räumen sprechen.

Die Schreibweise $s = m + \sigma$ für $m \in \mathbb{N}$ und $0 < \sigma < 1$ suggeriert bereits, dass die Slobodeckij-Räume in einer gewissen Weise die „Lücke“ zwischen den ganzzahligen Sobolew-Räumen auffüllen. Die folgende Proposition zeigt, dass sich die (gebrochenen) Sobolew-Räume tatsächlich mit Hilfe des Parameters s im Sinne von stetigen Einbettungen anordnen lassen.

Proposition 2.6 *Es seien $1 \leq p < \infty$ und $s = m + \sigma$ mit $m \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma < 1$. Dann gelten die Einbettungen*

$$W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega).$$

Beweis. Die Einbettung $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$ folgt sofort aus den Definitionen. Für die andere Einbettung genügt es,

$$|u|_{\sigma,p} \leq C \|u\|_{1,p} \quad \text{für alle } u \in W^{1,p}(\Omega)$$

zu zeigen, denn ansonsten kann man diese Abschätzung auf die höchsten Ableitungen anwenden.

Dazu setzen wir $\Omega_h := \{x \in \Omega \mid x+h \in \Omega\}$ für $h \in \mathbb{R}^d$ und schreiben die Slobodeckij-Halbnorm um:

$$\begin{aligned} |u|_{\sigma,p;\Omega}^p &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+\sigma p}} dy dx \stackrel{x=y+h}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|h|^{d+\sigma p}} \left[\int_{\Omega_h} |u(y+h) - u(y)|^p dy \right] dh \\ &= \underbrace{\int_{|h|>1} \frac{\|u(\cdot+h) - u(\cdot)\|_{0,p;\Omega_h}^p}{|h|^{d+\sigma p}} dh}_{=:A} + \underbrace{\int_{|h|\leq 1} \frac{\|u(\cdot+h) - u(\cdot)\|_{0,p;\Omega_h}^p}{|h|^{d+\sigma p}} dh}_{=:B}. \end{aligned}$$

Nun schätzen wir beide Teile separat ab. Für A nutzen wir Polarkoordinaten und $\sigma > 0$:

$$\begin{aligned} A &= \int_{|h|>1} \frac{1}{|h|^{d+\sigma p}} \underbrace{\|u(\cdot+h) - u(\cdot)\|_{0,p;\Omega_h}^p}_{\leq C \|u\|_{0,p;\Omega}^p} dh \leq C \|u\|_{0,p;\Omega}^p \int_{|h|>1} \frac{1}{|h|^{d+\sigma p}} dh \\ &= C \|u\|_{0,p;\Omega}^p \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{r^{1+\sigma p}} dr}_{< \infty} \leq C \|u\|_{0,p;\Omega}^p. \end{aligned} \quad (3)$$

Um B abzuschätzen, verwenden wir, dass $\|u(\cdot+h) - u(\cdot)\|_{0,p;\Omega_h} \leq |h| \|\nabla u\|_{0,p;\Omega}$ für alle $h \in \mathbb{R}^d$ gilt.¹ Wegen $\sigma < 1$ folgt dann schließlich

$$\begin{aligned} B &= \int_{|h|\leq 1} \frac{1}{|h|^{d+\sigma p}} \underbrace{\|u(\cdot+h) - u(\cdot)\|_{0,p;\Omega_h}^p}_{\leq |h|^p \|\nabla u\|_{0,p;\Omega}^p} dh \leq \|\nabla u\|_{0,p;\Omega}^p \int_{|h|\leq 1} \frac{1}{|h|^{d+(\sigma-1)p}} dh \\ &= C \|\nabla u\|_{0,p;\Omega}^p \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{r^{1+(\sigma-1)p}} dr}_{< \infty} \leq C \|u\|_{1,p;\Omega}^p. \end{aligned} \quad (4)$$

□

Bemerkung 2.7 Im Beweis von Proposition 2.6 haben wir gesehen, dass

$$|u|_{\sigma,p;\Omega}^p = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|u(\cdot+h) - u(\cdot)\|_{0,p;\Omega_h}^p}{|h|^{d+\sigma p}} dh = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|h|^d} \left\| \frac{u(\cdot+h) - u(\cdot)}{|h|^\sigma} \right\|_{0,p;\Omega_h}^p dh$$

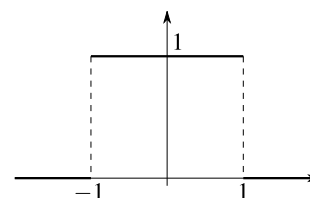
¹Dies ist eine leichte Folgerung aus der Hölderschen Ungleichung und dem Mittelwertsatz, welcher aber im Allgemeinen nur für glatte Funktionen gilt. Von daher muss man hier zunächst den Satz von Meyers-Serrin (Satz 4.1) verwenden. Für Details siehe auch [5, Satz 5.22].

gilt. Diese Darstellung gibt uns einen weiteren Hinweis darauf, dass die Slobodeckij-Halbnorm tatsächlich in Verbindung mit „gebrochener Regularität“ steht: Sie misst, wie sich das L^p -Mittel des Hölder-Quotienten $h \mapsto \frac{u(\cdot+h)-u(\cdot)}{|h|^\sigma}$ in einem integralen Sinne verhält. Dies steht im Einklang mit Bemerkung 2.4 (2), wo der Grenzfall $p = \infty$ gerade die (essentielle) Supremums-Norm von $h \mapsto \frac{u(\cdot+h)-u(\cdot)}{|h|^\sigma}$ lieferte. Weiterhin erkennen wir nun auch eine gewisse Ähnlichkeit zu klassischen Begriffen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit, die im Differenzenquotienten zu den Fällen $\sigma = 0$ bzw. $\sigma = 1$ korrespondieren würden. Überraschenderweise haben wir für die Abschätzung von A in (3) lediglich benötigt, dass $u \in L^p(\Omega)$ gilt. Demnach hätte man diesen Teil in der Definition der Slobodeckij-Halbnorm auch weglassen können und trotzdem eine zu $\|\cdot\|_{\sigma,p}$ äquivalente Norm erhalten. Insbesondere ist nur das Verhalten von $\frac{u(\cdot+h)-u(\cdot)}{|h|^\sigma}$ für kleine $|h|$ von Interesse, was einmal mehr den Zusammenhang zu klassischen Regularitätsbegriffen aufzeigt.

2.3 Regularität von Sprungstellen

Um ein besseres Verständnis für die gebrochenen Sobolew-Räume zu bekommen, wollen wir nun das Verhalten der Slobodeckij-Halbnorm für Funktionen mit Sprungstellen untersuchen. Dazu betrachten wir als einfaches Beispiel die Treppenfunktion

$$u(x) := \chi_{(-1,1)}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad x \in \Omega := \mathbb{R}.$$



Es ist wohlbekannt, dass $u \in L^2(\mathbb{R})$ gilt, andererseits aber u nicht schwach differenzierbar ist, also insbesondere $u \notin W^{1,2}(\mathbb{R})$. Das Problem sind dabei die Sprungstellen bei ± 1 . Nun stellt sich die Frage, ob u dennoch etwas Regularität besitzt und zwar im Sinne von $u \in W^{\sigma,2}(\mathbb{R})$ für ein $0 < \sigma < 1$. Dafür berechnen wir

$$|u|_{\sigma,2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{1+2\sigma}} dx dy = 2 \int_{\mathbb{R} \setminus (-1,1)} \int_{-1}^1 |x - y|^{-1-2\sigma} dx dy = 4 \int_1^\infty \int_{-1}^1 (x - y)^{-1-2\sigma} dy dx. \quad (5)$$

Dieses Integral ist genau im Fall $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ endlich und es gilt

$$|u|_{\sigma,2}^2 = 4 \int_1^\infty \int_{-1}^1 (x - y)^{-1-2\sigma} dy dx = \frac{4}{2\sigma(1-2\sigma)} [(x-1)^{1-2\sigma} - (x+1)^{1-2\sigma}]_1^\infty = \frac{4 \cdot 2^{1-2\sigma}}{2\sigma(1-2\sigma)}.$$

Also gilt $u \in W^{\sigma,2}(\mathbb{R})$ für alle $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$ und $u \notin W^{1/2,2}(\mathbb{R})$, d.h. ab $\sigma = \frac{1}{2}$ sind keine „Sprungstellen“ mehr zugelassen.¹

2.4 Grenzverhalten für $\sigma \searrow 0$ und $\sigma \nearrow 1$

Aus Gründen der Konsistenz würde man erwarten, dass wir die L^2 -Norm von u erhalten, wenn wir in (5) formal $\sigma = 0$ setzen. Allerdings ist dies nicht der Fall:

$$|u|_{\sigma=0,2}^2 := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|} dx dy = 4 \int_1^\infty \ln(x+1) - \ln(x-1) dx = \infty.$$

¹Damit meinen wir eine Sprungstelle im obigen Sinne. In der allgemeinen Situation von fast überall definierten Funktionen ist zunächst nicht klar, wie man Sprungstellen sinnvoll definieren soll. Wir werden auf diesen Aspekt noch einmal in Abschnitt 5.1 eingehen.

Offenbar liegt hier also ein inkonsistentes Verhalten der Slobodeckij-Halbnorm für $\sigma \searrow 0$ vor. Ähnliches scheint auch für $\sigma \nearrow 1$ zu gelten, denn beispielsweise würde die Abschätzung (4) im Beweis von Proposition 2.6 für $\sigma = 1$ nicht mehr funktionieren.

Die Frage nach dem korrekten asymptotischen Verhalten der Slobodeckij-Halbnorm beantwortet das folgende, relativ neue Resultat.

Satz 2.8 *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet.¹ Dann gelten:*

(i) (Bourgain, Brézis, Mironescu '01, [3])

Für $1 < p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt $\lim_{\sigma \nearrow 1} (1 - \sigma) |u|_{\sigma,p;\Omega}^p = C \|\nabla u\|_{0,p;\Omega}^p$.

(ii) (Maz'ya, Shaposhnikova '02, [10])

Für $1 \leq p < \infty$ und $u \in \bigcup_{0 < \sigma < 1} W^{\sigma,p}(\Omega)$ gilt $\lim_{\sigma \searrow 0} \sigma |u|_{\sigma,p;\Omega}^p = C \|u\|_{0,p;\Omega}^p$.

Demnach definiert

$$|u|'_{\sigma,p;\Omega} := [\sigma(1 - \sigma)]^{1/p} |u|_{\sigma,p;\Omega}$$

eine Halbnorm, die (für festes σ) äquivalent zu $|\cdot|_{\sigma,p;\Omega}$ ist, gleichzeitig aber auch die Konsistenz im Grenzfall der ganzzahligen Sobolew-(Halb-)Normen sichert. Aus historischen Gründen wird aber nach wie vor überwiegend die Variante der Slobodeckij-Halbnorm aus Definition 2.3 verwendet.

3 Zusammenhang zu gewichteten Lebesgue-Räumen

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass sich zwar viele Eigenschaften der klassischen Sobolew-Räume auf die gebrochenen übertragen. Jedoch wirkt die Definition über die Slobodeckij-Halbnorm relativ umständlich und das Verhalten in den ganzzahligen Grenzfällen relativ kompliziert (siehe Satz 2.8). Von daher wäre es wünschenswert, eine einheitlichere Charakterisierung der Slobodeckij-Räume zu entwickeln, bei der den ganzzahligen Regularitätsordnungen keine gesonderte Rolle mehr zukommt. Zumindest im Spezialfall $p = 2$ verfügen wir über das wichtige Hilfsmittel der *Fourier-Transformation*, die uns schließlich eine solche Darstellung der Slobodeckij-Räume ermöglichen wird.

3.1 Fourier-Transformation

An dieser Stelle wollen wir eine kurze Zusammenfassung der für uns relevanten Begriffe und Resultate zur Fourier-Transformation geben. Ausführliche Einführungen in die Fourier-Analyse sind zum Beispiel in [5, 8, 11] zu finden. Für unsere Absichten wird sich der Zugang über den *Schwartz-Raum* als besonders vorteilhaft erweisen:

Definition 3.1 *Der Raum der schnell-fallenden Funktionen (oder auch Schwartz-Raum) ist durch*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall k, l \in \mathbb{N}: \sup_{|\alpha| \leq l} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^k |D^\alpha \phi(x)| < \infty \right\}$$

gegeben. Für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definieren wir dann die (inverse) Fourier-Transformation vermittels

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\phi(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \\ \mathcal{F}^{-1}\phi(x) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

¹Wir werden Lipschitz-Gebiete später noch formal in Abschnitt 3.2 einführen.

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, erhalten wir das folgende klassische Fortsetzungsresultat.

Satz 3.2 (1) Die Fourier-Transformation \mathcal{F} ist eine bijektive Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ auf sich selbst und die Umkehrabbildung ist gerade die inverse Fourier-Transformation \mathcal{F}^{-1} .

(2) Die Fourier-Transformation lässt sich eindeutig zu einem isometrischen Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen (diesen bezeichnen wir wieder mit \mathcal{F}). Insbesondere gilt die Identität von Plancherel

$$\|u\|_{0,2} = \|\mathcal{F}u\|_{0,2}, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Beweis. Siehe z.B. [8, Theorem 2.2.14, Corollary 2.2.15]. □

Die Bedeutung der Fourier-Transformation liegt vor allen Dingen in ihrer Eigenschaft, wichtige analytische und algebraische Operationen ineinander zu überführen. Für uns ist ihr Verhalten unter Differenziation und Translation von vorrangigem Interesse:

Proposition 3.3 Es sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann gelten:

- (i) $\mathcal{F}(D^\alpha \phi)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}\phi(\xi), \quad \alpha \in \mathbb{N}^d, \xi \in \mathbb{R}^d.$
- (ii) $\mathcal{F}(\phi(\cdot + h))(\xi) = e^{2\pi i \xi \cdot h} \mathcal{F}\phi(\xi), \quad \xi, h \in \mathbb{R}^d.$

Beweis. Es sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Da sämtliche Ableitungen von ϕ im Unendlichen verschwinden, liefert eine partielle Integration

$$\mathcal{F}(D^\alpha \phi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (D_x^\alpha \phi(x)) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) (D_x^\alpha e^{-2\pi i \xi \cdot x}) dx = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}\phi(\xi).$$

Den zweiten Teil rechnet man ebenfalls leicht nach,

$$\mathcal{F}(\phi(\cdot + h))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x+h) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) e^{-2\pi i \xi \cdot (x-h)} dx = e^{2\pi i \xi \cdot h} \mathcal{F}\phi(\xi). \quad \square$$

3.2 Die Räume $H^s(\Omega)$

Die erste Eigenschaft aus Proposition 3.3 liefert uns einen neuen Zugang zur Regularitätstheorie: Die Fourier-Transformation überführt den komplizierten Vorgang des Differenzierens in eine Polynommultiplikation, welche strukturell viel einfacher zu handhaben ist. Sind nun $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^d$, so erhalten wir mit der Identität von Plancherel¹

$$D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d) \iff \|\mathcal{F}(D^\alpha u)\|_{0,2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |(2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi < \infty. \quad (6)$$

Diese Äquivalenz zeigt uns, dass die Regularität einer Funktion unmittelbar zu einem *polynomiellen Abfall* (mit gleicher Ordnung) im Fourier-Spektrum korrespondiert. Mit dieser Überlegung können wir die ganzzahligen Sobolew-Räume auf eine sehr elegante Weise charakterisieren:

Lemma 3.4 Es sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt²

$$\|u\|_{m,2;\mathbb{R}^d} \sim \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|)^{2m} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \quad (7)$$

für alle $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^d)$.

¹Die hier auftretenden Ausdrücke sind natürlich im *distributionellen* Sinne zu verstehen: Nachdem man auf dem Schwartz-Raum einen Stetigkeitsbegriff eingeführt hat, kann man dessen Dualraum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, die sogenannten *temperierten Distributionen*, betrachten. Die Fourier-Transformation kann dann auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt und die Proposition 3.3 sinngemäß verallgemeinert werden. Funktionen aus $L^2(\mathbb{R}^d)$ lassen sich hierbei stets mit *regulären* Distributionen identifizieren. Da die obige Darstellung lediglich als Motivation dient, verzichten wir an dieser Stelle jedoch auf formale Definitionen.

²Mit „ \sim “ ist gemeint, dass sich beide Ausdrücke jeweils bis auf eine von u unabhängige Konstante gegeneinander abschätzen lassen.

Beweis. Man überlegt sich leicht, dass¹

$$(1 + |\xi|)^{2m} \sim \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt. Dann folgt mit der Identität von Plancherel und Proposition 3.3(i), dass

$$\|u\|_{m,2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{0,2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha| \leq m} |(2\pi i \xi)^\alpha|^2 |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \sim \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|)^{2m} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi. \quad \square$$

Nun muss sich die Forderung nach dem polynomiellen Abfall in (7) aber nicht notwendigerweise auf ganzzahlige Exponenten beschränken. Genau an dieser Stelle liegt der Ausgangspunkt für einen sinnvollen Begriff von *gebrochener Regularität*: Ist $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $s \geq 0$, so kann man $(1 + |\cdot|)^s \mathcal{F}u$ als eine (*gebrochene*) *Fourier-Ableitung* der Ordnung s auffassen. Die Konsistenz mit der klassischen (schwachen) Differenzierbarkeit sichert uns hierbei Lemma 3.4.

Die entscheidende Verbindung zu den Slobodeckij-Räumen liefert uns schließlich das folgende Lemma. Es zeigt, dass die Slobodeckij-Halbnorm tatsächlich die Regularität von Funktionen im Sinne des eben eingeführten, gebrochenen Differenzierbarkeitbegriffs misst.

Lemma 3.5 *Es sei $0 < \sigma < 1$. Dann existiert eine Konstante $C_\sigma > 0$ mit*

$$\|u\|_{\sigma,2;\mathbb{R}^d}^2 = C_\sigma \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\sigma} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi$$

für alle $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Mit der Identität von Plancherel und Proposition 3.3(ii) folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{\sigma,2;\mathbb{R}^d}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|u(\cdot + h) - u(\cdot)\|_{0,2;\mathbb{R}^d}^2}{|h|^{d+2\sigma}} dh = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|h|^{d+2\sigma}} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{2\pi i \xi \cdot h} - 1|^2 |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi dh \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{2\pi i \xi \cdot h} - 1|^2}{|h|^{d+2\sigma}} dh d\xi. \end{aligned}$$

Das innere Integral schreiben wir nun mit Hilfe von Polarkoordinaten um ($\rho = |h|$, $\omega = h/|h|$) und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{2\pi i \xi \cdot h} - 1|^2}{|h|^{d+2\sigma}} dh = \int_0^\infty \int_{|\omega|=1} \frac{|e^{2\pi i \rho \xi \cdot \omega} - 1|^2}{\rho^{1+2\sigma}} d\omega d\rho \stackrel{\rho' = |\xi| \rho}{=} |\xi|^{2\sigma} \underbrace{\int_0^\infty \int_{|\omega|=1} \frac{|e^{2\pi i \rho' \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \omega} - 1|^2}{\rho'^{1+2\sigma}} d\omega d\rho'}_{=C_\sigma < \infty}.$$

Hierbei ist C_σ aufgrund der Radialsymmetrie des inneren Integrals tatsächlich unabhängig von ξ . \square

Nun können wir die obigen Erkenntnisse zu einer Definition von *gewichteten Lebesgue-Räumen* zusammenfassen und anschließend beweisen, dass diese tatsächlich einen äquivalenten Zugang zu den Sobolew-Slobodeckij-Räumen liefern.

Definition 3.6 *Es sei $s \geq 0$. Dann definieren wir den Raum*

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid (1 + |\cdot|)^s \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

und versehen diesen mit der gewichteten L^2 -Norm

$$\|u\|'_{s,2;\mathbb{R}^d} := \|(1 + |\cdot|)^s \mathcal{F}u\|_{0,2;\mathbb{R}^d} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|)^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

¹Hier ist wieder gemeint, dass sich beide Ausdrücke jeweils bis auf eine von ξ unabhängige Konstante gegeneinander abschätzen lassen.

Satz 3.7 Für alle $s \geq 0$ gilt $W^{s,2}(\mathbb{R}^d) = H^s(\mathbb{R}^d)$ mit äquivalenten Normen.

Beweis. Es sei zunächst $u \in W^{s,2}(\mathbb{R}^d)$. Falls $s = m \in \mathbb{N}$, so folgt die Behauptung aus Lemma 3.4. Ist $s = m + \sigma$ mit $0 < \sigma < 1$, so nutzen wir zusätzlich Lemma 3.5:

$$\begin{aligned} \|u\|_{s,2}^2 &= \|u\|_{m,2}^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|_{\sigma,2}^2 \\ &\sim \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|)^{2m} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi + \sum_{|\alpha|=m} C_\sigma \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\sigma} \underbrace{|\mathcal{F}(D^\alpha u)(\xi)|^2}_{=(2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}u(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left[(1 + |\xi|)^{2m} + C_\sigma |\xi|^{2\sigma} \sum_{|\alpha|=m} |(2\pi i \xi)^\alpha|^2 \right]}_{\sim (1 + |\xi|)^{2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \sim (\|u\|'_{s,2})^2. \end{aligned}$$

Damit ist die Äquivalenz der Normen gezeigt und es folgt $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Die Inklusion $H^s(\mathbb{R}^d) \subseteq W^{s,2}(\mathbb{R}^d)$ funktioniert genauso, wobei man zunächst (6) verwendet, um die Existenz der schwachen Ableitungen zu sichern. \square

Bemerkung 3.8 In der Definition von $H^s(\mathbb{R}^d)$ haben wir $(1 + |\cdot|)^s$ als polynomiell Gewicht für die Fourier-Transformation verwendet.¹ Von daher können wir natürlich nicht erwarten, dass die Rücktransformation $\mathcal{F}^{-1}((1 + |\cdot|)^m \mathcal{F}u(\cdot))$ mit einer der schwachen Ableitungen $D^\alpha u$, $|\alpha| = m \in \mathbb{N}$, übereinstimmt. In der Theorie der Sobolew-Räume spielt die konkrete Darstellung von (gebrochenen) Ableitungen aber oftmals nur eine untergeordnete Rolle. Viel mehr interessiert man sich dafür, die Regularität von (generischen) Funktionen *quantitativ*, zum Beispiel mit Hilfe von Normen, zu messen. Man kann also durchaus andere Gewichte verwenden, denn wie der Beweis von Satz 3.7 zeigt, ist für die Äquivalenz der Normen lediglich die höchste polynomielle Ordnung relevant.

Genau diese Tatsache ermöglichte uns letztendlich auch eine einheitliche Charakterisierung der (gebrochenen) Sobolew-Räume. Insbesondere genügt es bei unserer Darstellung, sich lediglich die gewichtete Fourier-Transformation der höchsten Ordnung anzuschauen, denn die Polynome $(1 + |\cdot|)^s$ sind monoton in s .

Schließlich führen wir die gewichteten Räume auch für allgemeine Gebiete $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein, indem wir sämtliche Restriktionen von $H^s(\mathbb{R}^d)$ -Funktionen auf Ω betrachten:

Definition 3.9 Es sei $s \geq 0$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Wir definieren den Raum

$$H^s(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid u = U|_\Omega \text{ für ein } U \in H^s(\mathbb{R}^d)\}$$

mit der Norm

$$\|u\|'_{s,2;\Omega} := \inf_{\substack{u=U|_\Omega \\ U \in H^s(\mathbb{R}^d)}} \|U\|'_{s,2;\mathbb{R}^d}.$$

Es verbleibt natürlich die Frage, unter welchen (hinreichenden) Bedingungen diese Räume tatsächlich mit den Sobolew-Räumen $W^{s,2}(\Omega)$ übereinstimmen. Dazu zeigen wir zunächst ein relativ allgemeines Kriterium, welches eine unmittelbare Folgerung von Satz 3.7 darstellt.

¹Üblicherweise betrachtet man $H^s(\mathbb{R}^d)$ auch für negative s , wo sich der Umgang mit diesem Gewicht als besonders bequem herausstellt.

Satz 3.10 *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $s \geq 0$. Weiterhin existiere ein stetiger, linearer (Fortsetzungs-) Operator $E: W^{s,2}(\Omega) \rightarrow W^{s,2}(\mathbb{R}^d)$ mit $Eu|_{\Omega} = u$ für alle $u \in W^{s,2}(\Omega)$. Dann stimmen die Mengen $H^s(\Omega)$ und $W^{s,2}(\Omega)$ überein und die beiden Normen $\|\cdot\|_{s,2;\Omega}$ und $\|\cdot\|'_{s,2;\Omega}$ sind äquivalent.*

Beweis. Zunächst sei $u \in H^s(\Omega)$. Dann existiert ein $U \in H^s(\mathbb{R}^d)$ mit $U|_{\Omega} = u$. Aufgrund von Satz 3.7 gilt auch $U \in W^{s,2}(\mathbb{R}^d)$, also $u = U|_{\Omega} \in W^{s,2}(\Omega)$. Weiterhin gilt

$$\|u\|_{s,2;\Omega} \leq \|U\|_{s,2;\mathbb{R}^d} \sim \|U\|'_{s,2;\mathbb{R}^d}$$

und Bilden des Infimums über alle $U \in H^s(\mathbb{R}^d)$ mit $U|_{\Omega} = u$ liefert $\|u\|_{s,2;\Omega} \leq C\|u\|'_{s,2;\Omega}$.

Jetzt sei $u \in W^{s,2}(\Omega)$. Dann folgt $Eu \in W^{s,2}(\mathbb{R}^d) = H^s(\mathbb{R}^d)$ und mit Satz 3.7 und der Stetigkeit von E , dass

$$\|u\|'_{s,2;\Omega} = \inf_{\substack{u=U|_{\Omega} \\ U \in H^s(\mathbb{R}^d)}} \|U\|'_{s,2;\mathbb{R}^d} \leq \|Eu\|'_{s,2;\mathbb{R}^d} \sim \|Eu\|_{s,2;\mathbb{R}^d} \leq C\|u\|_{s,2;\Omega},$$

also insbesondere $u \in H^s(\Omega)$. □

Wir haben das ursprüngliche Problem also auf die Frage nach der Existenz eines *Fortsetzungsoperators* zurückgeführt. Üblicherweise lassen sich solche Operatoren konstruieren, wenn der Rand des Gebietes Ω eine gewisse Regularität besitzt.

Definition 3.11 *Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt Lipschitz-Gebiet, falls Ω beschränkt ist und für jedes $x \in \partial\Omega$ ein $r > 0$ sowie eine Lipschitz-stetige Funktion $\gamma: \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, sodass (evtl. nach Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems)*

$$B(x,r) \cap \Omega = \{y \in B(x,r) \mid y_d > \gamma(y_1, \dots, y_{d-1})\}.$$

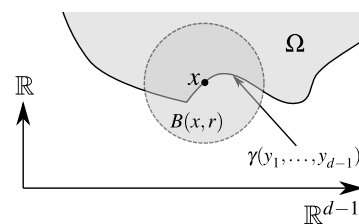


Abbildung 1: Lipschitz-Gebiet

Bemerkung 3.12 *Abbildung 1 illustriert Definition 3.11. Intuitiv ist ein Lipschitz-Gebiet ein Gebiet, dessen Rand sich lokal als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion darstellen lässt und dabei lediglich auf einer Seite dieses Graphen liegt.*

Satz 3.13 (Fortsetzungssatz) *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet und $s \geq 0$. Dann existiert ein stetiger, linearer Operator $E: W^{s,2}(\Omega) \rightarrow W^{s,2}(\mathbb{R}^d)$ mit $Eu|_{\Omega} = u$ für alle $u \in W^{s,2}(\Omega)$.*

Beweis. Die zugrunde liegende Konstruktion ist äußerst technisch. Ein vollständiger Beweis ist zum Beispiel in [11, Appendix A] zu finden. □

Aus den Sätzen 3.10 und 3.13 folgt nun unmittelbar das Hauptresultat dieses Abschnitts. Es zeigt, dass eine Lipschitz-Regularität des Randes von Ω bereits hinreichend für die Äquivalenz der Räume $H^s(\Omega)$ und $W^{s,2}(\Omega)$ ist.

Korollar 3.14 (Äquivalenz der Normen) *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet und $s \geq 0$. Dann stimmen die Mengen $H^s(\Omega)$ und $W^{s,2}(\Omega)$ überein und die beiden Normen $\|\cdot\|_{s,2;\Omega}$ und $\|\cdot\|'_{s,2;\Omega}$ sind äquivalent.*

4 Hauptresultate zu gebrochenen Sobolew-Räumen

Nachdem wir in den vorigen Abschnitten die Sobolew-Räume eingeführt und deren Verbindung zu gebrochener Differenzierbarkeit gesehen haben, wollen wir nun einen Überblick über die wichtigsten Resultate der zugehörigen Funktionenraumtheorie geben. Dabei wird sich insbesondere herausstellen, dass die Aussagen vieler Sätze unmittelbare Verallgemeinerungen der klassischen Ergebnisse für ganzzahlige Sobolew-Räume sind.

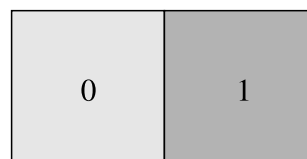
4.1 Dichtheit von glatten Funktionen

Eine Schwierigkeit beim Umgang mit (gebrochenen) Sobolew-Räumen ist die Tatsache, dass deren Elemente lediglich Äquivalenzklassen von fast überall definierten Funktionen sind und somit punktweise Auswertungen zunächst keinen Sinn ergeben. Deswegen können wir viele wichtige Hilfsmittel aus der Analysis, wie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, nicht direkt auf Sobolew-Funktionen anwenden. Einen Ausweg bilden die folgenden beiden *Dichtheitsresultate*, die es uns erlauben, in vielen Beweisen dennoch mit glatten (überall definierten) Funktionen zu arbeiten.

Satz 4.1 (Meyers-Serrin) *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beliebiges Gebiet. Für $s \geq 0$ und $1 \leq p < \infty$ liegt der Unterraum $W^{s,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ bereits dicht in $W^{s,p}(\Omega)$.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum klassischen Resultat für $s \in \mathbb{N}$, siehe auch [5, Satz 6.38]. □

Besonders bemerkenswert an diesem Satz ist, dass keine Forderungen an das Gebiet Ω gemacht werden müssen. Andererseits können wir für Funktionen aus $C^\infty(\Omega)$ im Allgemeinen keine Aussage über das Grenzverhalten am Rand von Ω treffen. Bei vielen Problemstellungen, wie z.B. Randwertaufgaben, ist eine solche Kontrolle am Rand jedoch von essentieller Bedeutung. Von daher würde man sich zusätzlich die Dichtheit von $C^\infty(\overline{\Omega})$ in $W^{s,p}(\Omega)$ wünschen. Leider ist diese Aussage für beliebige Gebiete im Allgemeinen falsch (siehe z.B. Abbildung 2). Setzen wir jedoch etwas Regularität von $\partial\Omega$ voraus, so erhalten wir



$$u = \chi_{(0,1) \times (0,1)}$$

$$\Omega = [(-1, 0) \cup (0, 1)] \times (0, 1)$$

Abbildung 2: Gegenbeispiel zu Satz 4.2, wenn Ω kein Lipschitz-Gebiet ist.

Satz 4.2 (Globale Approximation) *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet. Für $s \geq 0$ und $1 \leq p < \infty$ liegt dann $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{s,p}(\Omega)$.*

Beweis. Auch hier sei auf [5, Satz 6.38] verwiesen. □

4.2 Einbettungssätze

Einen Eckpfeiler der gesamten Funktionenraumtheorie bilden die *Sobolowschen Einbettungssätze*. Die grundsätzliche Idee hinter diesen Resultaten ist es, die schwache Regularität von $W^{s,p}$ -Funktionen gegen andere (qualitative) Eigenschaften, wie Integrierbarkeit oder stetige Differenzierbarkeit, „einzutauschen“. Wir beginnen mit der Einbettungen in die Hölder-Räume $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Um die Vorteile der Fourier-Charakterisierung aus dem vorigen Abschnitt nutzen zu können, beschränken wir uns von nun an stets auf den Fall $p = 2$ und schreiben auch $H^s(\Omega)$ für die Sobolew-Räume (anstelle von $W^{s,2}(\Omega)$).

Satz 4.3 (Morrey) *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet. Ist $s - \frac{d}{2} = k + \alpha$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 < \alpha < 1$, so gilt*

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Gilt $s - \frac{d}{2} > k + \alpha$, so wird die obige Einbettung sogar kompakt.

Bevor wir zum Beweis kommen, wollen wir an der Bedingung $s - \frac{d}{2} = k + \alpha$ noch einmal das „Eintausch-Prinzip“ deutlich machen: Geben wir etwas von der schwachen Regularitätsordnung s (in Form des Strafterms $\frac{d}{2}$) auf, so erhalten wir hierfür klassische Differenzierbarkeit bzw. Hölder-Stetigkeit. Hierbei sehen wir auch den gegenläufigen Einfluss von s und d : Größere s geben mehr Regularität, wohingegen hohe Raumdimensionen die Einbettung in Hölder-Räume großer Ordnung verhindern. An dieser Stelle sei auch angemerkt, dass durch die Verallgemeinerung auf gebrochene Sobolew-Räume die Beziehung $s - \frac{d}{2} = k + \alpha$ nun linear in allen Parametern ist.

Beweis von Satz 4.3. Hierbei folgen wir [5, Satz 9.38]. Zunächst können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $k = 0$ gelte, denn andernfalls wende man die Argumentation auf die Ableitungen $D^\beta u$ mit $|\beta| < k$ an. Es sei also $0 < s - \frac{d}{2} = \alpha < 1$. Da Ω ein Lipschitz-Gebiet ist, können wir nach dem Fortsetzungssatz 3.13 annehmen, dass weiterhin $\Omega = \mathbb{R}^d$ gelte.

Proposition 3.3(ii) liefert uns die Darstellung $u(x+z) - u(x) = \mathcal{F}^{-1}((e^{2\pi iz \cdot (\cdot)} - 1)\mathcal{F}u)(x)$ und mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt für alle $z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, dass

$$\begin{aligned} \frac{|u(x+z) - u(x)|}{|z|^\alpha} &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} |z|^{-s+d/2} e^{2\pi i x \cdot \xi} (e^{2\pi i z \cdot \xi} - 1) \mathcal{F}u(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |z|^{-2s+d} |e^{2\pi i z \cdot \xi} - 1|^2 (1 + |\xi|)^{-2s} d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|)^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mit einer Substitution $\xi = |z|^{-1} \xi'$ schätzen wir den ersten Faktor ab,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |z|^{-2s+d} |e^{2\pi i z \cdot \xi} - 1|^2 (1 + |\xi|)^{-2s} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} |e^{2\pi i \frac{z}{|z|} \cdot \xi'} - 1|^2 (|z| + |\xi'|)^{-2s} d\xi' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \min\{4, C|\xi'|^2\} |\xi'|^{-2s} d\xi', \end{aligned}$$

wobei C unabhängig von z ist. Wegen $2 - 2s > -d$ und $2s > d$ existiert dieses Integral und es folgt $\|u\|_{C^{0,\alpha}} \leq C \|u\|'_{s,2}$. Damit ist u insbesondere auch stetig.

Es verbleibt noch die Beschränktheit von u zu zeigen. Wegen $2s > d$ existiert das Integral $\int (1 + |\xi|)^{-2s} d\xi$ und es folgt schließlich

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= |(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}u))(x)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot \xi} \mathcal{F}u(\xi) d\xi \right|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}u(\xi)| d\xi \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|)^{-2s} d\xi \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|)^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \right) \leq C (\|u\|'_{s,2})^2. \end{aligned}$$

Die Kompaktheit der Einbettung im zweiten Teil des Satzes folgt unmittelbar aus dem ersten Teil und $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow^c C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ für alle $0 \leq \gamma < \beta \leq 1$. \square

Das nächste Einbettungsergebnis geht auf F. Rellich und V. I. Kondrachov zurück und verallgemeinert die Proposition 2.6. Die Aussage des Satzes bestätigt gerade unsere Intuition, dass der Ordnungsparameter s tatsächlich eine „Ordnung“ im Sinne von (kompakten) Einbettungen erzeugt.

Satz 4.4 (Rellich-Kondrachov) Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet. Dann gilt für alle $0 \leq s < t$ die kompakte Einbettung

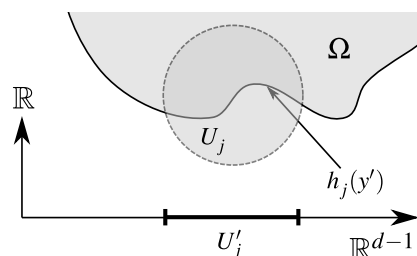
$$H^t(\Omega) \hookrightarrow^c H^s(\Omega).$$

Beweis. Siehe [11, Theorem 3.27]. □

Bemerkung 4.5 Bei der Formulierung der klassischen Einbettungssätze für ganzzahlige Sobolew-Räume betrachtet man üblicherweise auch den Fall $p \neq 2$, wodurch das Zusammenspiel der Parameter natürlich komplizierter wird. Die entsprechenden Aussagen für gebrochene Sobolew-Räume verallgemeinern sich hier ebenfalls im wörtlichen Sinne. Die Beweise lassen sich dabei auf eine besonders elegante Weise mittels *Interpolationsmethoden* in abstrakten Banach-Räumen führen (siehe auch [1, Theorem 7.57, 7.58] und Abschnitt 5.2).

4.3 Spurooperatoren

Wir kommen nun zum motivierenden Problem aus der Einleitung zurück und wollen die Spurräume von (gebrochenen) Sobolew-Räumen bestimmen. Zu diesem Zweck müssen wir natürlich zunächst entsprechende Räume auf Rändern von Gebieten einführen. Die exakte Definition ist leider relativ technisch, wird aber im weiteren Verlaufe nicht mehr explizit benötigt. Von daher beschränken wir uns an dieser Stelle auf eine skizzenhafte Darstellung und verweisen für weitere Details auf [5, Abschnitt 6.6, Definition 9.39].



Es sei $s = m + \sigma$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $0 \leq \sigma < 1$. Weiterhin bezeichne $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein $C^{m,1}$ -Gebiet¹ mit einer *Lokalisierung* $(U_j, \phi_j)_{j=1}^J$. Nach Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems hat $\partial\Omega$ dann lokal die Form $\{(y', h_j(y'))\}$ mit $h_j \in C^{m,1}(U'_j)$, wobei $U'_j \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ offen ist. Wir sagen, $u: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ liege in $H^s(\partial\Omega)$, falls für alle $j = 1, \dots, J$ die Funktionen $u_j(y') := (\phi_j u)(y', h_j(y'))$ in $H^s(U'_j)$ liegen. Nun definieren wir die (Halb-)Normen auf $H^s(\partial\Omega)$ vermittels

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,2;\partial\Omega}^2 &:= \sum_{j=0}^J \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{U'_j} |D^\alpha u_j|^2 d\mu_j, \\ |u|_{\sigma,2;\partial\Omega}^2 &:= \sum_{j=0}^J \int_{U'_j} \int_{U'_j} \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^2}{|x - y|^{d-1+2\sigma}} d\mu_{j,x} d\mu_{j,y}, \\ \|u\|_{s,2;\partial\Omega}^2 &:= \|u\|_{m,2;\partial\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|_{\sigma,2;\partial\Omega}^2, \quad \text{falls } \sigma > 0. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $d\mu_j = \sqrt{1 + |\nabla h_j|^2} dy'$ die lokalen $(d-1)$ -dimensionalen *Oberflächenmaße* auf $\partial\Omega$.

Bemerkung 4.6 Wie in der Differentialgeometrie üblich, führt man mit Hilfe der *Karten* $y' \mapsto (y', h_j(y'))$ das Problem lokal auf eine offene Menge im \mathbb{R}^{d-1} zurück, für die wir die bereits bekannte Theorie verwenden können. Anschließend benutzt man dann eine Partition der Eins $(U_j, \phi_j)_{j=1}^J$, um eine globale Definition zu erhalten. Eine wichtige Fragestellung ist dabei oftmals, ob diese Definition auch unabhängig von den verwendeten Karten ist. Tatsächlich ist das bei uns nicht immer der Fall, denn die oben eingeführten Normen hängen im Allgemeinen von den Mengen U'_j ab. Dennoch kann man sich überlegen,

¹D.h. wir ersetzen die $C^{0,1}$ -Funktionen aus Definition 3.11 durch solche aus der Klasse $C^{m,1}$.

dass die Normen für zwei unterschiedliche Lokalisierungen zumindest äquivalent sind, was für unsere Problemstellung wiederum ausreichend ist (vgl. [5, S. 218]).

Nun sind wir in der Lage, den wichtigen Spursatz zu formulieren:

Satz 4.7 (Spursatz) *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein $C^{m,1}$ -Gebiet und $s = m + \sigma > \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $0 \leq \sigma < 1$. Dann gelten:*

- (i) *Es existiert ein eindeutiger, stetiger Spuroperator $S: H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial\Omega)$, sodass $S(u) = u|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*
- (ii) *Es existiert ein stetiger Fortsetzungsoperator $F: H^{s-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^s(\Omega)$ mit $S \circ F = \text{Id}_{H^{s-1/2}}$, d.h. F ist eine Rechtsinverse von S .*

Beweis. Wie die Formulierung des Satzes nahelegt, definiert man S zunächst nur auf $C^\infty(\overline{\Omega})$ als Restriktionsoperator. Man zeigt nun die Stetigkeit auf dieser Teilmenge und kann anschließend einen Dichteschluss durchführen. Die eigentlichen Beweisschritte basieren hierbei wieder auf Fourier-Techniken. Ein vollständiger Beweis ist in [5, Satz 9.40] zu finden. \square

Bemerkung 4.8 Man kann die Aussage des Spursatzes ebenfalls für den Fall $p \neq 2$ verallgemeinern. In [4, Proposition 3.31] wird zum Beispiel die Existenz, Eindeutigkeit und Surjektivität eines Spuroperators $S': W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ gezeigt.

Satz 4.7 zeigt uns, dass das Verhalten von Funktionen aus $H^s(\Omega)$ am Rand von Ω nicht beliebig ist, sondern tatsächlich etwas Regularität erhalten bleibt. Aus dem zweiten Teil folgt insbesondere, dass der Spuroperator den Raum $H^s(\Omega)$ *surjektiv* auf $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ abbildet. Damit haben wir das Bild des Spuroperators (die sogenannten *Spurräume*) genau durch die Slobodeckij-Räume charakterisiert. Man hätte letztere also auf diesem Wege sogar definieren können.

Mit Hilfe des Spursatzes können wir nun endlich für das inhomogene Randwertproblem aus der Einleitung,

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \text{für } x \in \Omega, \\ u = g \text{ auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

eine sinnvolle schwache Formulierung angeben. Hierbei sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ wieder ein Lipschitz-Gebiet und $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,2;\Omega}}$ (vgl. Einleitung):

Für $f \in H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))^*$ und $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ finde $u \in \{w \in H^1(\Omega) \mid S(w) = g\}$ mit

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \langle f, v \rangle \text{ für alle } v \in H_0^1(\Omega). \quad (8)$$

Nachdem man dieses Problem auf ein homogenes transformiert hat, folgt die eindeutige Lösbarkeit von (8) leicht aus dem Lemma von Lax-Milgram.

Die (schwache) Lösungstheorie von derartigen Randwertaufgaben war auch historisch gesehen die Hauptmotivation für die Einführung von gebrochenen Sobolew-Räumen. Gegen Ende der 50er Jahre interessierte man sich vor allen Dingen dafür, wie sich das Bild des Spuroperators auf Sobolew-Räumen sinnvoll charakterisieren lässt. Dabei entdeckten N. Aronszajn [2], L. N. Slobodeckij [12] und L. Gagliardo [7] etwa zeitgleich, dass bei dieser Problemstellung die Räume $W^{s,p}$ und die zugehörigen Normen in einer natürlichen Art und Weise auftreten. Der Interpretation von Slobodeckij-Räumen über ihr Fourier-Darstellung kam in diesem Zuge zunächst nur eine untergeordnete Rolle zu (siehe auch [14, S. 34]).

5 Weiterführende Aspekte

5.1 Der Lions-Magenes-Raum $H_{00}^{1/2}(\Omega)$

In diesem Abschnitt wollen wir eine besondere Eigenschaft des Raums $H^{1/2}(\Omega)$ untersuchen, die auf den ersten Blick etwas überraschend daher kommen mag. Der Einfachheit halber beschränken wir uns zunächst auf eindimensionale Gebiete, d.h. $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ sei ein nichtleeres, offenes Intervall.¹ Wir werden die folgenden drei Eigenschaften der Räume $H^s(\Omega)$ verwenden:

- (i) Nach Satz 4.3 gilt für $s > \frac{1}{2}$, dass $H^s(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$. Andererseits ist aber $H^{1/2}(\Omega) \not\subseteq C^0(\overline{\Omega})$, denn derartige Funktionen müssen im Inneren von Ω nicht einmal beschränkt sein (vgl. [13, S. 159]).
- (ii) „Sprungstellen“ im Sinne von Abschnitt 2.3 sind für $H^s(\Omega)$ -Funktionen ab $s \geq \frac{1}{2}$ nicht mehr zugelassen.
- (iii) Für $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ gilt $H^s(\Omega) = H_0^s(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{s,2;\Omega}}$ (siehe [11, Theorem 3.40]). Dies ist im Übrigen auch der Grund dafür, warum man keinen nichttrivialen Spuroperator für $s \leq \frac{1}{2}$ definieren kann.

Aus den ersten beiden Punkten ergibt sich die etwas seltsam anmutende Tatsache, dass Funktionen aus $H^{1/2}(\Omega)$ zwar im Allgemeinen nicht stetig sind, andererseits aber auch keine „Sprünge“ machen dürfen. Ist nun $\Omega = (-1, 1)$, so folgt aus (iii), dass $u := 1 \in H^{1/2}(\Omega) = H_0^{1/2}(\Omega)$ gilt. Die triviale Fortsetzung von u auf ganz \mathbb{R} ,

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} = \chi_{(-1,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

liegt dann aber wegen (ii) nicht in $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Der folgende Satz aus [11, Theorem 3.33] zeigt, dass $s = \frac{1}{2}$ hierbei wirklich eine Sonderrolle einnimmt:

Satz 5.1 *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet. Für $0 \leq s \leq 1$ betrachten wir den Raum*

$$\tilde{H}^s(\Omega) := \{u \in H^s(\Omega) \mid \tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^d)\},$$

wobei \tilde{u} die triviale Fortsetzung von u auf \mathbb{R}^d bezeichne. Falls $s \neq \frac{1}{2}$, so gilt $\tilde{H}^s(\Omega) = H_0^s(\Omega)$.

Auch wenn wir hier keinen Beweis dieser Aussage geben wollen, sollte zumindest intuitiv (für $d = 1$) deren Richtigkeit klar sein: Für $\frac{1}{2} < s \leq 1$ gilt nach (i) die Einbettung $H^s(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, womit Punktauswertungen Sinn ergeben. Ist $0 \leq s < \frac{1}{2}$, so sind wiederum „Sprungstellen“ erlaubt. Damit geht durch das triviale Fortsetzen die Regularität auch in diesem Falle nicht verloren. Wie wir oben gesehen haben, funktionieren diese Argumente im Fall $s = \frac{1}{2}$ nicht mehr und es gilt lediglich $\tilde{H}^{1/2}(\Omega) \subsetneq H_0^{1/2}(\Omega)$. Aus diesem Grund wurde der Raum $\tilde{H}^{1/2}(\Omega)$ in der Vergangenheit gesondert studiert. Bedeutende Beiträge gehen dabei auf J.-L. Lions und E. Magenes zurück, weshalb $H_{00}^{1/2}(\Omega) := \tilde{H}^{1/2}(\Omega)$ oft auch als der *Lions-Magenes-Raum* bezeichnet wird. Dieser Raum ist durchaus von Interesse für Differentialgleichungsprobleme, z.B. wenn $\partial\Omega$ in zwei disjunkte Teile zerlegt werden kann, auf denen unterschiedliche Randbedingungen gelten (vgl. [13, S. 159ff]).

5.2 Sobolew-Slobodeckij-Räume und Interpolation

Wir haben im Beweis von Satz 4.3 gesehen, dass sich die Argumentation mit Hilfe der Fourier-Transformation ganz erheblich vereinfachen lässt. Im allgemeineren Fall $p \neq 2$ kann man diese Techniken aber

¹Wir betrachten also im Wesentlichen die Spurräume von $H^1(\tilde{\Omega})$, wobei $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$.

nicht mehr ohne Weiteres verwenden und die Beweise werden äußerst technisch. Nicht zuletzt vor diesem Hintergrund hat man in den 60er Jahren damit begonnen, systematische Methoden zur Konstruktion und Darstellung von (gebrochenen) Sobolew-Räumen zu entwickeln (vgl. [14, S. 35]). Daraus entstand schließlich die abstrakte *Interpolationstheorie* von Banach-Räumen.

Im Rahmen dieses Konzeptes erhält man die Slobodeckij-Räume sowie die zugehörigen Normen durch *Interpolation* zwischen Grenzlösungen (der ganzzahligen Ordnungen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$):

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^d) := (W^{m_1,p}(\mathbb{R}^d), W^{m_2,p}(\mathbb{R}^d))_{\theta,p},$$

wobei $s = (1 - \theta)m_1 + \theta m_2$, $0 < \theta < 1$. Ein wesentlicher Vorteil dieses Zugangs ist, dass man viele Resultate auf elegante Weise herleiten kann, indem man die abstrakten Interpolationsmethoden mit den (bekannten) Aussagen für ganzzahlige Sobolew-Räume kombiniert. Für eine detaillierte Ausführung dieser Theorie sei auf [13] verwiesen.

5.3 Gewichtete Lebesgue-Räume für $p \neq 2$

Üblicherweise verwendet man die Methoden der klassischen Fourier-Analyse im Zusammenhang mit Funktionen aus $L^2(\mathbb{R}^d)$. In Abschnitt 3 wurde aber bereits angedeutet, dass man die Fourier-Transformation auch auf den Raum der *temperierten Distributionen* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ erweitern kann. Insbesondere umfasst $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sämtliche Lebesgue-Räume $L^p(\mathbb{R}^d)$ im Sinne von regulären Distributionen. Dieser Umstand ermöglicht schließlich eine Verallgemeinerung der gewichteten Räume aus Abschnitt 3.2 für $1 < p < \infty$:

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^d) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid \mathcal{F}^{-1}((1 + |\cdot|)^s \mathcal{F}u(\cdot)) \in L^p(\mathbb{R}^d)\}, \quad s \geq 0. \quad (9)$$

Man kann sich nun überlegen, dass im Fall $s = m \in \mathbb{N}$ die Räume $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ und $H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ tatsächlich übereinstimmen (siehe [9, S. 82]). Von daher bilden die Räume $H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ eine *natürliche* Verallgemeinerung der ganzzahligen Sobolew-Räume, sodass deren Ordnung s gerade zum gebrochenen Differenzierbarkeitbegriff korrespondiert, den wir in Abschnitt 3.2 eingeführt haben. Nun drängt sich natürlich die Frage auf, ob $H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ und $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ auch für beliebige $s \geq 0$ übereinstimmen. Leider ist die Antwort negativ (vgl. [9, S. 83]):

Ist $s \notin \mathbb{N}$, so gilt $H^{s,p}(\mathbb{R}^d) = W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn $p = 2$.

Dies zeigt, dass die Slobodeckij-Räume und die gewichteten Lebesgue-Räume aus (9) im Fall $p \neq 2$ zwei verschiedene Ansätze bilden, um die „Lücke“ zwischen den ganzzahligen Sobolew-Räumen aufzufüllen.

6 Zusammenfassung

Die letzten Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts liefern uns gewissermaßen die Quintessenz dieser Arbeit: Die Slobodeckij-Räume $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ stellen eine Möglichkeit dar, die „Lücke“ zwischen den klassischen Sobolew-Räumen auf eine kontinuierliche Weise zu schließen. Dabei haben wir gesehen, dass sich viele bekannte Eigenschaften und Resultate fast wörtlich übertragen lassen. Bei der Untersuchung des Zusammenhangs zu gebrochener Regularität muss man hingegen Vorsicht walten lassen: Im Fall $p = 2$ stimmt die Theorie tatsächlich mit derjenigen für die gewichteten Räume $H^s(\mathbb{R}^d) = H^{s,2}(\mathbb{R}^d)$ überein, doch für $p \neq 2$ wird die Situation komplizierter. Von daher sollte man die Slobodeckij-Räume in ihrer Allgemeinheit vielmehr als eine „Interpolation von Grenzlösungen“ auffassen, die die klassischen Einbettungssätze sinnvoll erweitert und vor allen Dingen die Spurräume korrekt charakterisiert.

7 Literatur

- [1] ADAMS, R. : *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975
- [2] ARONSZAJN, N. : Boundary values of functions with finite Dirichlet integral. *Techn. Report, Univ. of Kansas* 14 (1955), S. 77–94
- [3] BOURGAIN, J. ; BRÉZIS, H. ; MIRONESCU, P. : Another look at Sobolev spaces. In: *Optimal control and partial differential equation. Conference*, 2001, S. 439–455
- [4] DEMENGEL, F. ; DEMENGEL, G. ; ERNÉ, R. : *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations*. Springer, London, 2012
- [5] DOBROWOLSKI, M. : *Angewandte Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006
- [6] EMMRICH, E. : *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2004
- [7] GAGLIARDO, E. : Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. *Ricerche Mat.* 7 (1958), S. 102–137
- [8] GRAFAKOS, L. : *Classical Fourier analysis*. Springer, 2008
- [9] HAROSKE, D. ; TRIEBEL, H. : *Distributions, Sobolev spaces, elliptic equations*. European Mathematical Society, 2008
- [10] MAZ'YA, V. ; SHAPOSHNIKOVA, T. : On the Bourgain, Brezis, and Mironescu theorem concerning limiting embeddings of fractional Sobolev spaces. *Journal of Functional Analysis* 195 (2002), Nr. 2, S. 230–238
- [11] MCLEAN, W. : *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, 2000
- [12] SLOBODECKIJ, L. : Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary value problems of partial differential equations (Russisch). *Gos. Ped. Inst. Ucep. Zap.* 197 (1958), S. 54–112
- [13] TARTAR, L. : *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007
- [14] TRIEBEL, H. : *Theory of function spaces*. Birkhäuser, 1983 (Reprint)