



Konstruktion von stetigen und diskreten  
Wavelet-Transformationen  
auf der  $n$ -dimensionalen Sphäre  
mittels quadrat-integrierbarer Darstellungen

Diplomarbeit

von

Gitta Kutyniok

Paderborn, März 1996

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Grundlegende Definitionen und Sätze</b>                             | <b>4</b>  |
| 2.1      | Harmonische Analysis . . . . .   | 4         |
| 2.2      | Darstellungstheorie . . . . .  | 11        |
| 2.3      | Wavelet-Theorie . . . . .  | 16        |
| 2.3.1    | Stetige Wavelet-Transformation . . . . .                               | 16        |
| 2.3.2    | Diskrete Wavelet-Transformation . . . . .                              | 19        |
| <b>3</b> | <b>Stetige Wavelet-Transformationen auf <math>S^{n-1}</math></b>       | <b>22</b> |
| 3.1      | Bestimmung der Darstellungen für die Transformation . . . . .          | 22        |
| 3.2      | Zur Quadrat-Integrierbarkeit der Darstellungen . . . . .               | 24        |
| 3.3      | Die Transformation . . . . .   | 26        |
| <b>4</b> | <b>Frames auf <math>S^{n-1}</math></b>                                 | <b>34</b> |
| 4.1      | Konstruktion von festen Frames . . . . .                               | 34        |
| 4.2      | Konstruktion von allgemeineren Frames . . . . .                        | 38        |
| 4.3      | Beispiele . . . . .  | 39        |
| <b>5</b> | <b>Algorithmen zur Wavelet-Transformation auf der <math>S^1</math></b> | <b>44</b> |
| 5.1      | Praktisch orientierter Ansatz . . . . .                                | 45        |
| 5.1.1    | Der Algorithmus . . . . .  | 45        |
| 5.1.2    | Analyse . . . . .  | 51        |
| 5.2      | Theoretisch orientierter Ansatz . . . . .                              | 56        |
| 5.2.1    | Die Algorithmen . . . . .  | 56        |
| 5.2.2    | Analyse . . . . .  | 59        |
| 5.3      | Experimente und Vergleich . . . . .                                    | 59        |
| <b>A</b> | <b>Invariante Maße auf <math>SO(n)</math> und <math>S^{n-1}</math></b> | <b>71</b> |
| A.1      | Beschreibung der $SO(n)$ und Beziehung zur $S^{n-1}$ . . . . .         | 71        |
| A.2      | Bestimmung der invarianten Maße auf $SO(n)$ und $S^{n-1}$ . . . . .    | 83        |
| <b>B</b> | <b>Projektion der oberen Halbsphäre auf die Ebene</b>                  | <b>91</b> |
| <b>C</b> | <b>Notationen</b>  | <b>95</b> |

# Kapitel 1

## Einleitung

Wavelets haben in den letzten Jahren eine stürmische Entwicklung in Forschung und Anwendung genommen. Der erste Anstoß zur Entwicklung der Wavelet-Theorie ist den Ingenieurwissenschaften zuzuschreiben. Es entstand das Problem, daß die Analyse geophysikalischer Daten mit herkömmlichen Methoden nicht zufriedenstellend durchgeführt werden konnte. Das war der Anlaß, neue Analysemethoden zu entwickeln. Bald wurde festgestellt, daß die gefundenen Methoden ihre Wurzeln in mathematischen Arbeiten haben. Erst als die mathematische Theorie eingebracht wurde, entstand die heutige Wavelet-Theorie, die sowohl auf anwendungsorientierter als auch auf theoretischer Seite große Bedeutung erlangt hat. Sie findet Anwendung in der Analyse und Synthese von Signalen, in der Mustererkennung sowie Datenkompression, in der Numerik, in der Quantenfeldtheorie, in der Akustik und in vielen anderen Gebieten.

Der Ursprung der Wavelet-Theorie ist in der Signaltheorie zu suchen. Im Jahre 1984 veröffentlichten Goupillaud, Grossmann und Morlet eine Arbeit [GoGrMo 84], in der sie eine neue Transformation, die mittlerweile Wavelet-Transformation genannt wird, zur Frequenzanalyse von Signalen vorstellten, da die Fourier-Transformation aus signaltheoretischer Sicht große Nachteile aufweist. Ein Mangel liegt in dem Fehlen einer Lokalisierungseigenschaft. Durch die Fourier-Transformation werden Signale in trigonometrische Funktionen zerlegt, die keinerlei lokalen Charakter haben, da sie unendlich lang mit derselben Periode schwingen.

Der eben genannte Nachteil der Fourier-Transformation wird bei der Wavelet-Transformation dadurch behoben, daß eine fast beliebig wählbare Funktion, das Wavelet, zur Analyse eines Signals verschoben (Translation) und gestaucht (Dilatation) wird. Im Gegensatz zur Fourier-Transformation treten bei der Wavelet-Transformation zwei Variablen auf, der Ort und die Breite des Wavelets. Die Transformierte von  $f$ , wobei das Wavelet  $\psi$  an den Ort  $a$  geschoben und auf die Breite  $b$  gestaucht wird, berechnet sich mittels der Formel

$$T_\psi(f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx.$$

$T_\psi(f)$  ist also das Skalarprodukt von der zu untersuchenden Funktion  $f$  und dem verschobenen und gestauchten Wavelet  $\psi$ . Durch die Faktoren  $c_\psi^{-\frac{1}{2}}$  und  $|a|^{-\frac{1}{2}}$  hat der Operator angenehme Eigenschaften. Bei geeigneter Wahl von  $c_\psi$  ist er eine Isometrie zwischen gewichteten  $L^2$ -Räumen. Daraus ergibt sich die Inversionsformel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} T_\psi(f)(a, b) |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{da}{a^2} db,$$

d.h. es ist möglich, aus der transformierten Funktion die ursprüngliche zurückzugewinnen. Die Harmonische Analysis und Darstellungstheorie ermöglichen es, diese Transformation in einem allgemeineren Rahmen zu betrachten. Für die sogenannte affine Gruppe

$$\mathcal{A} = \{(a, b) : (a, b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}\}$$

und die quadrat-integrierbare unitäre Darstellung

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R})), \quad (\pi(a, b)f)(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

zeigt sich der Zusammenhang

$$T_\psi(f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \langle f, \pi(a, b)\psi \rangle.$$

Hierdurch erklärt sich auch der Faktor  $|a|^{-\frac{1}{2}}$ . Diese Betrachtungsweise bietet die Möglichkeit, die Wavelet-Transformation auf andere Hilberträume zu übertragen. Mit Hilfe des Satzes von Duflo und Moore [DuMo 76] lassen sich auf einfache Weise sogar isometrische Transformationen bestimmen.

In dieser Arbeit werden stetige Wavelet-Transformationen für Funktionen auf der  $n$ -dimensionalen Sphäre konstruiert. Diese werden anschließend diskretisiert und ihre Effizienz mit einem Ansatz verglichen, der eine andere Definition von Wavelet-Transformation benutzt, die sogenannte Multi-Skalen-Analyse.

Dazu enthält zunächst Kapitel 2 Definitionen und im weiteren Verlauf verwendete Sätze aus den Bereichen Harmonische Analysis und Darstellungstheorie, da mit der allgemeinen Definition von Wavelet-Transformation gearbeitet wird. Diese wird im nächsten Abschnitt zusammen mit ihrer diskreten Variante vorgestellt, die auf dem Konzept der Frames, einer Verallgemeinerung des Begriffs der Orthonormalbasis, beruht.

Stetige Wavelet-Transformationen auf der Sphäre wurden schon von Toressani [Tor 93] studiert. Er hat dazu gewisse irreduzible unitäre Darstellungen der Bewegungsgruppe  $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$  herangezogen. Diese Darstellungen sind jedoch nicht quadrat-integrierbar. Durch Übergang zu einem geeigneten homogenen Raum verlieren diese zwar die Eigenschaft, Darstellungen zu sein, sie werden jedoch quadrat-integrierbar. In Kapitel 3 werde ich die Hauptergebnisse aus [Tor 93] vorstellen und dahingehend verallgemeinern, daß ich beliebige Darstellungen des semi-direkten Produktes  $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$  zulasse. Die Konstruktion dieser Darstellungen geschieht mit Hilfe der sogenannten Mackey-Theorie.

Für die Anwendung wichtig sind vor allem diskrete Varianten der Wavelet-Transformation. Kapitel 4 beschäftigt sich mit den Ergebnissen, die ich aus der Diskretisierung der in [Tor 93] entwickelten stetigen Wavelet-Transformation erhalten habe.

Die so konstruierten Frames werden in Kapitel 5 für Funktionen auf der  $S^1$  untersucht. Da diese Algorithmen für höherdimensionale Sphären sehr rechenintensiv sind, habe ich mich hier auf die  $S^1$  beschränkt. Dabei werden zunächst Ergebnisse einer Arbeit von Chui und Mhaskar [ChMha 93] vorgestellt, die Wavelets basierend auf dem Konzept der Multi-Skalen-Analyse konstruieren. Diesen Ansatz werde ich im folgenden als den praktisch orientierten Ansatz bezeichnen. Die von ihnen beschriebenen Rekonstruktions- und Analyse-Algorithmen wurden implementiert und mit dem sich aus den konstruierten Frames ergebenden, ebenfalls implementierten

Rekonstruktionsalgorithmus verglichen. Dabei wurden insbesondere die Laufzeit und die Normabweichung der Approximation, d.h. der rekonstruierten Funktion, theoretisch und praktisch bestimmt, verglichen und bewertet. Somit läßt sich auch allgemein etwas über die Effizienz von praktischen und theoretischen Ansätzen aussagen.

Im Anhang A werden die für die Konstruktion der stetigen Wavelet-Transformation auf  $S^{n-1}$  in Kapitel 3 benötigten invarianten Maße auf  $SO(n)$  und  $S^{n-1}$  konstruiert. Das Grobgerüst dieser Konstruktion findet sich im Buch von Vilenkin [Vil 68].

Die für den Beweis des Hauptsatzes von Kapitel 3 benötigte Projektion der oberen Halbsphäre der  $S^{n-1}$  auf die Halbkugel im Raum  $\mathbb{R}^{n-1}$  wird im Anhang B diskutiert.

Ich benutze in dieser Arbeit im wesentlichen gebräuchliche Bezeichnungen. Die von mir verwendeten Symbole, die nicht allgemein üblich sind oder über die keine einheitliche Konvention besteht, werde ich im Anhang C zusammenstellen.

Ganz herzlich möchte ich mich bei Herrn Prof. Eberhard Kaniuth für die zahlreichen wertvollen Diskussionen bedanken. Außerdem möchte ich Prof. Keith F. Taylor Dank sagen, der mich zur Bearbeitung des Themas angeregt hat, und den Herrn Professoren Rupert Lasser und Manfred Tasche, die mir hilfreiche Denkanstöße gegeben haben.

## Kapitel 2

# Grundlegende Definitionen und Sätze

In diesem Kapitel werden Definitionen und Sätze zusammengestellt, auf denen der zweite Teil der Arbeit aufbaut.

In dem Abschnitt über Harmonische Analysis werden insbesondere Haar-Integral und Haarmaß für lokalkompakte  $T_2$ -Gruppen und semi-direkte Produkte betrachtet, da später sogenannte Bewegungsgruppen  $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$  auf  $L^2(S^{n-1}, \mathcal{H})$  wirken werden, wobei  $\mathcal{H}$  ein noch näher zu spezifizierender Hilbertraum ist. Außerdem werden die Fourier-Transformation und allgemeine Sätze wie Plancherel und die Umkehrformel formuliert, die essentielle Hilfsmittel zur Konstruktion von Wavelet-Transformationen sind. Die hier vorkommenden Aussagen findet man z.B. in [HeRo 63] oder [Rei 68].

Im darauffolgenden Abschnitt werden zunächst quadrat-integrierbare, unitäre Darstellungen definiert. Daran anschließend werden Darstellungen semi-direkter Produkte besprochen aus Gründen, die eben schon dargelegt wurden. Zuletzt wird die Mackey-Theorie skizziert, die es ermöglicht, alle irreduziblen unitären Darstellungen der Gruppe  $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$  anzugeben. Die ersten Definitionen findet man in [Rob 83], die Mackey-Theorie ist entnommen aus dem sehr umfassenden Werk von A.O. Barut und R. Rączka [BaRa 80].

Den Abschluß bildet ein Abschnitt über Wavelet-Theorie. Hierbei wird zuerst die abstrakte Definition von Wavelet-Transformation angegeben. Anschließend werden Verbindungen zur Darstellungstheorie aufgezeigt, und abschließend wird der für die Anwendungen so wichtige Aspekt der Diskretisierung, d.h. Frames, vorgestellt. Eine umfassende Betrachtung, insbesondere auch der Anwendungen, findet sich in [LoMaRi 94]. Außerdem wurden die Artikel [GrMoPa 85], [HeWa 63] und [Tor 93] benutzt.

### 2.1 Harmonische Analysis

#### Definition 2.1.1

Ist  $G$  eine Gruppe zusammen mit einer Topologie  $\tau$  auf  $G$ , so heißt  $G$  *topologische Gruppe*, falls die Abbildung

$$(x, y) \longmapsto xy^{-1}, \quad (G \times G, \tau \times \tau) \longrightarrow (G, \tau)$$

stetig ist.

**Bemerkung 2.1.2**

Gleichwertig mit der Stetigkeit von  $(x, y) \mapsto xy^{-1}$  ist die Stetigkeit der beiden Abbildungen  $(x, y) \mapsto xy$  und  $x \mapsto x^{-1}$ .

**Beispiele 2.1.3**

(i) Die affine Gruppe

$$\mathcal{A} = \{(a, b) : (a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}\},$$

eine lokalkompakte topologische Gruppe, ist die wirkende Gruppe bei Wavelet-Transformationen auf dem  $L^2(\mathbb{R})$ .

(ii) Die Gruppe  $SO(n)$ ,

$$SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^{-1} = A^t \wedge \det(A) = 1\},$$

die später eine große Rolle spielen wird, da ihre Elemente Rotationen auf  $S^{n-1}$  darstellen, ist mit der Matrizenmultiplikation und der vom  $\mathbb{R}^{n^2}$  induzierten Topologie eine kompakte topologische Gruppe.

**Definition 2.1.4**

Seien  $E$  ein topologischer Raum und  $G$  eine topologische Gruppe.

(i)  $G$  operiert (wirkt) auf  $E$ , falls es einen Homomorphismus  $\Phi : g \mapsto \tilde{g}$  von  $G$  in die Gruppe der Homöomorphismen von  $E$  in sich gibt.

$$\text{Bez.: } gp := \Phi(g)(p), \quad g \in G, p \in E$$

(ii)  $G$  operiert *transitiv* auf  $E$ , falls es für alle  $p_1, p_2 \in E$  ein  $g \in G$  gibt, so daß

$$gp_1 = p_2$$

gilt.

(iii)  $G$  operiert *stetig* auf  $E$ , falls  $G \times E \rightarrow E$ ,  $(g, p) \mapsto gp$  stetig ist.

Falls  $G$  stetig auf  $E$  operiert, nennt man das Paar  $(E, \Phi)$  *links-topologischer  $G$ -Raum*.

**Bemerkung 2.1.5**

Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $H$  eine Untergruppe von  $G$ . Dann ist  $H$  mit der induzierten Topologie eine topologische Gruppe.

**Bezeichnung 2.1.6**

Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $H$  eine Untergruppe von  $G$ . Dann sei

$$G/H = \{xH : x \in G\}$$

die Menge der Links-Nebenklassen von  $H$ . Im folgenden werden immer Links-Nebenklassen betrachtet.

Als weitere Bezeichnung für die Links-Nebenklasse  $xH$  wollen wir  $\dot{x}$  benutzen.

**Lemma 2.1.7**

(i)  $H$  sei eine Untergruppe der topologischen Gruppe  $G$ . Dann ist die Abbildung

$$G \times G/H \rightarrow G/H, \quad (a, xH) \mapsto axH \text{ stetig.}$$

Ein  $x \in G$  wirkt im folgenden immer auf  $G/H$  durch  $x \cdot yH = (xy)H$ .

- (ii) Ist  $H$  Normalteiler einer topologischen Gruppe  $G$ , so ist auch  $G/H$  eine topologische Gruppe mit der Verknüpfung

$$(xH, yH) \mapsto (xy)H.$$

Im folgenden werden Integration und Maße auf lokalkompakten hausdorffschen Gruppen behandelt.

**Bezeichnung 2.1.8**

Sei  $G$  eine lokalkompakte  $T_2$ -Gruppe. Die Links- bzw. Rechtstranslationen von  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit einem Element  $a \in G$  seien definiert durch

$$L_a f(x) = f(ax) \text{ und } R_a f(x) = f(xa) \quad \text{für alle } x \in G.$$

Außerdem sei

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in G : f(x) \neq 0\}}$$

der Träger von  $f$ . Weiterhin setzen wir

$$\begin{aligned} C(G) &= \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist stetig}\}, \\ C_0(G) &= \{f \in C(G) : f \text{ verschwindet im Unendlichen}\}, \\ C_c(G) &= \{f \in C(G) : \text{supp } f \text{ ist kompakt}\}. \end{aligned}$$

**Satz 2.1.9**

Zu jeder lokalkompakten  $T_2$ -Gruppe  $G$  existiert ein nichttriviales, lineares komplexwertiges Funktional  $I$  auf  $C_c(G)$  mit den Eigenschaften

- (i)  $I(f) \geq 0$ , falls  $f \geq 0$ , und  
(ii)  $I(L_a f) = I(f)$  für alle  $a \in G$ .

$I$  heißt linksinvariantes Haarsches Integral und ist bis auf einen positiven Faktor eindeutig, d.h. ist  $J : C_c(G) \rightarrow \mathbb{C}$  ein linksinvariantes Haarsches Integral, so existiert ein  $c > 0$  mit  $J(f) = cI(f)$  für alle  $f \in C_c(G)$ . (Rechtsinvariantes Haarsches Integral wird analog definiert.)

**Definition 2.1.10**

- (i) Seien  $G$  eine lokalkompakte  $T_2$ -Gruppe und  $I$  ein linksinvariantes Haar-Integral auf  $C_c(G)$ . Zu  $a \in G$  sei  $J_a : C_c(G) \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $J_a(f) = I(R_a f)$ . Dann ist auch  $J_a$  ein linksinvariantes Haar-Integral. Also existiert genau ein  $\Delta(a) > 0$  mit

$$\Delta(a) J_a(f) = I(f) \quad \text{für alle } f \in C_c(G).$$

$\Delta : G \rightarrow (0, \infty)$  hängt nicht von der Wahl von  $I$  ab.  $\Delta$  heißt *Modularfunktion* von  $G$ , und  $G$  heißt *unimodular*, wenn  $\Delta(a) \equiv 1$  gilt, d.h. wenn jedes linksinvariante Haar-Integral auch rechtsinvariant ist und umgekehrt.

- (ii) Ein Maß  $\mu$  auf  $G/H$  heißt *quasi-invariant*, falls  $\mu \neq 0$  und

$$x\mu \sim \mu \quad \text{für alle } x \in G,$$

wobei  $x\mu$  das  $x$ -Translat  $\mu(x^{-1}\cdot)$  von  $\mu$  bezeichnet. Ferner gilt  $\nu \sim \mu$ , falls die Menge der  $\nu$ -Nullmengen gleich der Menge der  $\mu$ -Nullmengen ist. Dadurch wird eine Äquivalenzrelation auf den Maßen auf  $G/H$  definiert.



**Lemma 2.1.11**

Jede abelsche und jede kompakte Gruppe ist unimodular.

**Bemerkung 2.1.12**

Mit dem vorangegangenen Lemma ist  $SO(n)$  unimodular. Jedes Haar-Integral darauf ist also rechts- und linksinvariant.

**Definition 2.1.13 (Haarsches Maß)**

Seien  $G$  eine lokalkompakte  $T_2$ -Gruppe und  $I$  ein linksinvariantes Haar-Integral auf  $G$ .  $\mu$  eingeschränkt auf den  $\sigma$ -Körper der  $\mu$ -meßbaren Mengen heißt *Haarsches Maß* (zu  $I$ ) auf  $G$ .

Von der folgenden Ungleichung wird später der Spezialfall, daß das Produkt von zwei  $L^2$ -Funktionen in  $L^1$  ist, benutzt.

**Satz 2.1.14 (Höldersche Ungleichung)**

Seien  $f \in L^p(G)$  und  $g \in L^q(G)$  mit  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , dann gilt

$$fg \in L^1(G) \quad \text{und} \quad \|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Als nächstes werden semi-direkte Produkte von Gruppen und Haar-Integrale darauf betrachtet. Die später entwickelten Wavelet-Transformationen werden von Darstellungen dieses Gruppentyps stammen.

**Definition 2.1.15**

Seien  $(A, \cdot)$  und  $(N, +)$  lokalkompakte Gruppen und  $\text{Aut}(N)$  die Automorphismengruppe von  $N$ . Sei ferner  $\tau$  ein Homomorphismus von  $A$  nach  $\text{Aut}(N)$  mit der Eigenschaft, daß die Abbildung

$$A \times N \longrightarrow N, \quad (a, n) \longmapsto \tau_a(n) =: an$$

stetig ist. Dann wird  $A \times N$ , versehen mit der Multiplikation

$$(a, n)(a', n') = (aa', n + \tau_a(n')),$$

zu einer lokalkompakten Gruppe. Diese nennt man *semi-direktes Produkt* von  $A$  und  $N$  und bezeichnet sie mit

$$A \ltimes N.$$

Die Inverse eines Elementes  $(a, n)$  wird dann durch

$$(a, n)^{-1} = (a^{-1}, -\tau_{a^{-1}}(n)) = (a^{-1}, -a^{-1}n)$$

berechnet.

**Definition 2.1.16**

Die Gruppen  $K \ltimes N$ , wobei  $K$  kompakt und  $N$  abelsch ist, heißen *Bewegungsgruppen*. In dieser Arbeit wird in der Hauptsache der Spezialfall  $K = SO(n)$  und  $N = \mathbb{R}^n$  betrachtet. Der Homomorphismus  $\tau_A$  aus Definition 2.1.15 sieht in diesem Fall  $(SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n)$  für ein beliebiges  $A \in SO(n)$  folgendermaßen aus:

$$\tau_A(x) = Ax \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

also die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor. Mit Lemma 2.1.11 sind die Bewegungsgruppen unimodular, außerdem sind sie *separabel*, d.h. es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge.

**Lemma 2.1.17**

Seien  $A$  und  $N$  lokalkompakte Gruppen und  $J$  bzw.  $K$  sei das linksinvariante Haar-Integral auf  $A$  bzw.  $N$ .

- (i) Das Produktintegral  $J \times K$  ist ein linksinvariantes Haar-Integral auf  $A \times N$ .
- (ii) Sei  $\Delta_A$  bzw.  $\Delta_N$  die Modularfunktion der Gruppe  $A$  bzw.  $N$ . Die Modularfunktion des semi-direkten Produktes  $A \rtimes N$  ist dann  $\Delta(a, n) = \Delta_A(a)\Delta_N(n)$ .

Der folgende Satz wird später dazu benutzt, ein Haar-Integral auf einer lokalkompakten  $T_2$ -Gruppe  $G$  zu definieren, wenn ein invariantes Maß auf  $G/H$ , wobei  $H$  eine Untergruppe von  $G$  ist, bekannt ist.

**Satz 2.1.18**

Sei  $H$  Untergruppe einer lokalkompakten  $T_2$ -Gruppe und sei  $T_H : C_c(G) \rightarrow C_c(G/H)$  definiert durch

$$T_H(f)(xH) = \int_H f(xh) dh.$$

Ferner sei  $\mu$  ein invariantes Maß auf  $G/H$ , d.h. für eine beliebige Borel-Menge  $E \subseteq G/H$  gilt  $\mu(E) = \mu(xE)$  für alle  $x \in G$ . Dann ist das Funktional  $I : C_c(G) \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch

$$I(f) = \int_{G/H} T_H(f)(\dot{x}) d\mu(\dot{x}),$$

ein Haar-Integral auf  $G$ .

Die Zuordnung einer dualen Gruppe zu einer lokalkompakten abelschen ist in der Harmonischen Analysis von zentraler Bedeutung, insbesondere auch für die Darstellungstheorie. Fast alle Sätze, die aus diesem Abschnitt im späteren Teil der Arbeit benutzt werden, bauen auf diesem Konzept auf.

**Definition 2.1.19**

Sei  $G$  eine lokalkompakte abelsche Gruppe.  $\widehat{G}$  sei die Menge aller stetigen Homomorphismen von  $G$  in die multiplikative Gruppe  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Die Elemente aus  $\widehat{G}$  heißen *Charaktere* von  $G$ .  $\widehat{G}$  wird, versehen mit der punktweisen Multiplikation, zu einer Gruppe, der *dualen Gruppe* von  $G$ .

**Bemerkung 2.1.20**

$\widehat{G}$ , versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen, ist eine lokalkompakte abelsche Gruppe.

**Beispiele 2.1.21**

- (i)  $G = \mathbb{R}$ :

Sei  $\chi_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$  die Abbildung, die definiert ist durch

$$\chi_y(x) = e^{iyx}.$$

Es gilt  $\chi_y \in \widehat{\mathbb{R}}$ . Da außerdem die Abbildung  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ ,  $y \mapsto \chi_y$  ein Homöomorphismus ist, folgt

$$\widehat{\widehat{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}.$$

(ii)  $G = \mathbb{T}$ :Zu  $n \in \mathbb{Z}$  sei  $\alpha_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  definiert durch

$$\alpha_n(z) = z^n.$$

Es gilt  $\alpha_n \in \widehat{\mathbb{T}}$ . Man überlegt sich leicht, daß die Abbildung  $\Phi : \mathbb{Z} \rightarrow \widehat{\mathbb{T}}$ ,  $n \mapsto \alpha_n$  ein Homöomorphismus ist. Also gilt

$$\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}.$$

(iii)  $G = \mathbb{Z}$ :Sei  $\alpha_z : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$  definiert durch

$$\alpha_z(n) = z^n,$$

wobei  $z \in \mathbb{T}$  beliebig gewählt war. Es gilt wieder  $\alpha_z \in \widehat{\mathbb{Z}}$  und die Abbildung  $\Phi : \mathbb{T} \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ ,  $z \mapsto \alpha_z$  ist ein Homöomorphismus. D.h.

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}.$$

**Lemma 2.1.22**

Seien  $G_1, \dots, G_n$  lokalkompakte abelsche Gruppen und  $G = \prod_{i=1}^n G_i$  ihr direktes Produkt. Dann ist die Abbildung

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \xrightarrow{\Phi} \alpha \text{ mit } \alpha(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \alpha_i(x_i), \quad x_i \in G, \alpha_i \in \widehat{G}_i$$

ein topologischer Isomorphismus zwischen  $\widehat{G}_1 \times \dots \times \widehat{G}_n$  und  $\widehat{G}$ .

**Beispiele 2.1.23**Für den Fall  $G = \mathbb{R}^n$  gilt also

$$\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$$

mittels des topologischen Isomorphismus  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^n}$ ,  $y \mapsto \chi_y$  und mit folgender Definition von  $\chi_y$ :

$$\chi_y(x) = e^{i\langle y, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Für den Rest des Abschnittes über Harmonische Analysis sei  $G$  eine lokalkompakte abelsche hausdorffsche Gruppe. Die abstrakte Fourier-Transformation ist von großer Bedeutung für die Wavelet-Transformationen, da diese ja nahe Verwandte von ihr sind.

**Definition 2.1.24**Ist  $f \in L^1(G)$ , so heißt

$$\widehat{f} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \alpha \mapsto \int_G f(x) \overline{\alpha(x)} dx$$

die *Fourier-Transformierte* zu  $f$  und

$$\widehat{f} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \alpha \mapsto \int_G f(x) \alpha(x) dx$$

die *inverse Fourier-Transformierte* zu  $f$ .

**Satz 2.1.25**

Die Abbildung

$$\wedge : L^1(G) \longrightarrow C_0(\widehat{G}), \quad f \longmapsto \widehat{f}$$

ist ein injektiver  $*$ -Homomorphismus von  $L^1(G)$  auf eine dichte Unteralgebra von  $C_0(\widehat{G})$ .

$*$ -Homomorphismus bedeutet hier:  $(\widehat{f})^* = \widehat{f^*}$ .

Als nächstes folgen die beiden wichtigsten Sätze dieses Abschnitts, die später ständig Anwendung finden werden.

**Satz 2.1.26 (Umkehrformel)**

Bei geeigneter Normierung des Haarschen Integrals auf  $\widehat{G}$  gilt für alle stetigen Funktionen  $f \in L^1(G)$  mit  $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$  und alle  $x \in G$

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\alpha) \alpha(x) d\alpha.$$

**Satz 2.1.27 (Plancherel)**

Seien die Haarmaße auf  $G$  und  $\widehat{G}$  so normiert, daß die Umkehrformel (Satz 2.1.26) gilt. Dann existiert eine bijektive lineare Abbildung  $\Phi : L^2(G) \longrightarrow L^2(\widehat{G})$ ,  $f \mapsto \widehat{f}$  mit den folgenden Eigenschaften:

(i)  $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ ,

(ii) falls  $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ , dann gilt

$$\widehat{f}(\alpha) = \int_G f(x) \overline{\alpha(x)} dx \text{ fast überall auf } \widehat{G}$$

und falls  $f \in L^1(\widehat{G}) \cap L^2(\widehat{G})$ , dann gilt

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\alpha) \alpha(x) d\alpha \text{ fast überall auf } G.$$

Der Vollständigkeit halber sei auch der Dualitätssatz aufgeführt, da er sehr oft indirekt eingeht.

**Satz 2.1.28 (Dualitätssatz)**

Zu  $x \in G$  sei  $\omega_x : \widehat{G} \longrightarrow \mathbb{T}$  definiert durch

$$\omega_x(\alpha) := \alpha(x) \text{ für alle } \alpha \in \widehat{G}.$$

Dann ist  $\Omega : x \longmapsto \omega_x$  ein topologischer Isomorphismus von  $G$  auf  $\widehat{\widehat{G}}$ .

**Folgerung 2.1.29**

Es gelten folgende Aussagen:

(i)  $G$  kompakt  $\iff \widehat{G}$  diskret    und     $G$  diskret  $\iff \widehat{G}$  kompakt.

(ii) Jede kompakte (diskrete) abelsche Gruppe ist duale Gruppe einer diskreten (kompakten) abelschen Gruppe.

## 2.2 Darstellungstheorie

Zunächst werden Darstellungen und induzierte Darstellungen allgemein auf lokalkompakten Gruppen betrachtet und Formeln für induzierte Darstellungen vorgestellt. Anschließend werden speziell induzierte Darstellungen semi-direkter Produkte behandelt. Als Literatur wurden, insbesondere für die Theorie der induzierten Darstellungen und die sogenannte Mackey-Theorie, die Bücher von A.O. Barut, R. Rączka [BaRa 80] und J.M.G. Fell, R.S. Doran [FeDo 88] verwendet.

### Definition 2.2.1

Seien  $G$  eine topologische Gruppe und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Ein Homomorphismus  $\pi : G \longrightarrow L(\mathcal{H})$ ,  $L(\mathcal{H})$  die Menge der beschränkten linearen Operatoren in  $\mathcal{H}$ , heißt *Darstellung* von  $G$ , falls

$$x \longmapsto \pi(x)\xi, \quad G \longrightarrow \mathcal{H}$$

stetig ist für alle  $\xi \in \mathcal{H}$  ( $\pi$  ist *stark stetig*). Eine Darstellung heißt *unitär*, falls  $\pi(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  ist, wobei  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  die Gruppe der unitären Operatoren in  $\mathcal{H}$  sei.  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\pi$  wird *Darstellungsraum* von  $\pi$  genannt.

Unitäre Darstellungen  $\pi$  und  $\rho$  heißen *äquivalent* (*unitär äquivalent*),  $\pi \simeq \rho$ , falls ein isometrischer Isomorphismus  $T : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_\rho$  existiert mit

$$T\pi(x) = \rho(x)T \quad \text{für alle } x \in G.$$

Ist  $\pi$  eine unitäre Darstellung von  $G$  in  $\mathcal{H}$  und  $L$  ein abgeschlossener linearer Teilraum, so nennt man  $L$   *$\pi$ -invariant*, falls  $\pi(x)L \subseteq L$  für alle  $x \in G$ .

$$\pi_L : x \longmapsto \pi_L(x) := \pi(x)|_L : L \longrightarrow L$$

ist dann eine unitäre Darstellung von  $G$ .  $\pi_L$  wird als *Teildarstellung* bezeichnet.  $\pi$  heißt (*topologisch*) *irreduzibel*, falls  $\mathcal{H}$  und  $\{0\}$  die einzigen abgeschlossenen  $\pi$ -invarianten Teilräume sind.  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$  heißt *zyklischer Vektor* für  $\pi$ , falls die Vektoren  $\pi(x)\xi$ ,  $x \in G$ , einen dichten linearen Teilraum von  $\mathcal{H}_\pi$  erzeugen.  $\pi$  wird *zyklisch* genannt, falls in  $\mathcal{H}_\pi$  ein zyklischer Vektor für  $\pi$  existiert.

Sei  $G$  lokalkompakt, dann heißt ein Vektor  $\xi \in \mathcal{H}$  *zulässig*, falls

$$\int_G |\langle \xi, \pi(x)\xi \rangle|^2 d\mu(x) < \infty,$$

wobei  $\mu$  ein linksinvariantes Haarmaß auf  $G$  ist. Falls  $\pi$  irreduzibel ist und ein zulässiger Vektor  $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  existiert, so heißt  $\pi$  *quadrat-integrierbar*.

### Bemerkung 2.2.2

Die Bedingung der starken Stetigkeit ist äquivalent zu der Forderung, daß die Abbildung

$$(\xi, x) \longmapsto \pi(x)\xi, \quad \mathcal{H} \times G \longrightarrow \mathcal{H} \text{ stetig ist.}$$

Die folgenden Aussagen wie auch eine genaue Betrachtung quadrat-integrierbarer Darstellungen finden sich im Buch von J. Dixmier [Dix 77].

**Bemerkung 2.2.3**

- (i) Seien  $G$  eine topologische Gruppe,  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\pi$  eine unitäre Darstellung von  $G$  in  $\mathcal{H}$ .  $\pi$  ist irreduzibel genau dann, wenn jeder Vektor  $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  zyklisch ist für  $\pi$ .
- (ii) Jede irreduzible unitäre Darstellung einer abelschen Gruppe  $G$  ist eindimensional.
- (iii) Jede Darstellung, die unitär äquivalent zu einer quadrat-integrierbaren ist, ist ebenfalls quadrat-integrierbar.
- (iv) Ist  $G$  kompakt, so ist jede irreduzible Darstellung von  $G$  endlich-dimensional und natürlich auch quadrat-integrierbar.
- (v) Ist  $G$  unimodular und  $\pi$  eine quadrat-integrierbare Darstellung von  $G$  in  $\mathcal{H}$ , dann ist jeder Vektor in  $\mathcal{H}$  zulässig.

**Beispiele 2.2.4**

Seien  $G = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}$  ein beliebiger Hilbertraum und  $I$  die Identität hierauf. Dann ist die Abbildung

$$x \longmapsto e^{i\langle u, x \rangle} I, \quad u \in \mathbb{R}^n$$

eine irreduzible unitäre Darstellung von  $\mathbb{R}^n$  auf  $\mathcal{H}$ .

Im folgenden wird das Konzept der induzierten Darstellungen vorgestellt, das uns die Möglichkeit gibt, aus einer unitären Darstellung einer abgeschlossenen Untergruppe einer lokalkompakten, separablen Gruppe  $G$  eine unitäre Darstellung der Gruppe  $G$  selbst zu gewinnen. Außerdem wird die Mackey-Theorie erläutert. Insgesamt bieten diese Konzepte uns häufig die Möglichkeit, alle irreduziblen unitären Darstellungen eines semi-direkten Produktes anzugeben.

**Satz 2.2.5**

Seien  $G$  eine separable lokalkompakte Gruppe und  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ . Dann existiert eine Borelmenge  $S$  in  $G$ , so daß sich jedes Element  $x \in G$  eindeutig in der Form

$$x = sh, \quad s \in S, h \in H$$

darstellen läßt.

**Bemerkung 2.2.6**

Seien  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe einer separablen lokalkompakten Gruppe  $G$  und  $\pi$  eine unitäre Darstellung von  $H$  in einem separablen Hilbertraum  $\mathcal{H}_\pi$ . Sei außerdem  $\mu$  ein quasi-invariantes Maß auf dem Raum  $G/H$ . Definiere  $\mathcal{H}$  als Menge aller Funktionen  $\xi : G \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\langle \xi(x), \eta \rangle$  ist meßbar (bzgl.  $d\mu$ ) für alle  $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ ,
- (ii)  $\xi(xh) = \pi(h)^{-1}\xi(x)$  für alle  $h \in H$  und alle  $x \in G$ ,
- (iii)  $\int_{G/H} \|\xi(x)\|^2 d\mu(x) < \infty$ , wobei  $\|\xi(x)\|$  die Norm im Raum  $\mathcal{H}_\pi$  ist.

Der definierte Raum  $\mathcal{H}$  ist ein Hilbertraum. Zu der dritten Bedingung ist folgendes zu sagen: Es gilt  $\|\xi(xh)\| = \|\pi(h)^{-1}\xi(x)\| = \|\xi(x)\|$ , da  $\pi$  unitär ist.  $\|\xi(x)\|$  ist also eine Funktion auf den Links-Nebenklassen von  $H$ , d.h. auf dem Raum  $G/H$ .

**Satz 2.2.7**

Die Abbildung  $\text{ind}_H^G \pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ , die gegeben ist durch

$$(\text{ind}_H^G \pi(x_0)\xi)(x) = (\varrho_{x_0}(x))^{\frac{1}{2}} \xi(x_0^{-1}x),$$

wobei  $\varrho_{x_0}(x) = d\mu(x_0^{-1}\dot{x})/d\mu(\dot{x})$  die Radon-Nikodym-Ableitung des quasi-invarianten Maßes  $d\mu$  in  $G/H$  ist, definiert eine unitäre Darstellung von  $G$  in  $\mathcal{H}$ .

**Definition 2.2.8**

Die im vorherigen Satz gefundene Darstellung  $\text{ind}_H^G \pi$  heißt *von  $\pi$  auf  $G$  induzierte Darstellung*.

**Lemma 2.2.9**

Der Hilbertraum  $L^2(G/H, \mu, \mathcal{H}_\pi)$  ist isomorph zu dem Raum  $\mathcal{H}$  mittels der Abbildung

$$\tilde{\xi} \longmapsto \xi, \quad \xi(x) = (\pi(h_x))^{-1} \tilde{\xi}(\dot{x}),$$

wobei  $h_x$  der Faktor einer Zerlegung von  $x$  der Form  $x = s_x h_x$  sei (vergleiche Satz 2.2.5).

**Satz 2.2.10**

Seien  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe einer separablen lokalkompakten Gruppe  $G$  und  $\pi$  eine unitäre Darstellung von  $H$  in  $\mathcal{H}_\pi$ . Seien ferner  $s_x$  das eindeutige Element aus  $G$ , das die Nebenklasse  $\dot{x} = xH = s_x h_x H = s_x H$  charakterisiert und  $h_{x_0^{-1}s_x}$  der Faktor einer Zerlegung des Elementes  $x_0^{-1}s_x$  analog zu Satz 2.2.5). Dann ist die Abbildung  $\text{ind}_H^G \pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(G/H, \mu, \mathcal{H}_\pi))$ , die definiert ist durch

$$\left( \text{ind}_H^G \pi(x_0)\tilde{\xi} \right)(\dot{x}) = (d\mu(x_0^{-1}\dot{x})/d\mu(\dot{x}))^{\frac{1}{2}} (\pi(h_{x_0^{-1}s_x}))^{-1} \tilde{\xi}(x_0^{-1}\dot{x}), \quad (2.1)$$

eine unitäre Darstellung von  $G$  in  $L^2(G/H, \mu, \mathcal{H}_\pi)$ .

Den Faktor  $h_{x_0^{-1}s_x}$  zu bestimmen, kann in konkreten Fällen schwierig sein. Deshalb wird als nächstes ein Verfahren zur Bestimmung dieser Faktoren vorgestellt. Das folgende Lemma ist einer Arbeit von Mackey [Mac 52] entnommen.

**Lemma 2.2.11**

Seien  $G$  eine separable lokalkompakte Gruppe und  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ . Dann existiert ein Borel-Schnitt  $c : G/H \longrightarrow G$ , d.h.  $c$  ist Borel-meßbar und es gilt  $qc = 1_{G/H}$ , wobei  $q$  die Quotientenabbildung ist. Ist zusätzlich  $G/H$  kompakt, so kann die Abbildung  $c$  so gewählt werden, daß  $\overline{c(G/H)}$  kompakt ist.

**Bemerkung 2.2.12**

Seien wieder  $G$  eine separable lokalkompakte Gruppe,  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$  und  $c : G/H \longrightarrow G$  ein Borel-Schnitt. Dann gilt mit den Bezeichnungen von Satz 2.2.10 für  $s_x, x \in G$ ,

$$\dot{x} = c(\dot{x})H \implies s_x = c(\dot{x})$$

und für den Faktor der Mackey-Zerlegung  $h_{x_0^{-1}s_x}$  folgt

$$x_0^{-1}s_x = x_0^{-1}c(\dot{x}) = c(x_0^{-1}\dot{x})h_{x_0^{-1}s_x}$$

$$\implies h_{x_0^{-1}s_x} = c(x_0^{-1}\dot{x})^{-1}x_0^{-1}c(\dot{x}) = c(x_0^{-1}\dot{x})^{-1}x_0^{-1}c(\dot{x}).$$

Jetzt können wir die Formel (2.1) vereinfachen.

**Folgerung 2.2.13**

Seien  $G$  eine separable lokalkompakte Gruppe,  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$  und  $\pi$  eine unitäre Darstellung von  $H$  in  $\mathcal{H}_\pi$ . Sei außerdem  $c : G/H \rightarrow G$  der Borel-Schnitt aus Lemma 2.2.11. Dann kann die Abbildung  $\text{ind}_H^G \pi : G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(G/H, \mu, \mathcal{H}_\pi))$  aus Satz 2.2.10 in der Form

$$\left( \text{ind}_H^G \pi(x_0) \tilde{\xi} \right) (\dot{x}) = (d\mu(x_0^{-1}\dot{x})/d\mu(\dot{x}))^{\frac{1}{2}} (\pi(c(\dot{x})^{-1}x_0c(x_0^{-1}\dot{x}))\tilde{\xi})(x_0^{-1}\dot{x}) \quad (2.2)$$

geschrieben werden. Falls  $\mu$  sogar invariant ist, so lautet die Formel für die induzierte Darstellung

$$\left( \text{ind}_H^G \pi(x_0) \tilde{\xi} \right) (\dot{x}) = (\pi(c(\dot{x})^{-1}x_0c(x_0^{-1}\dot{x}))\tilde{\xi})(x_0^{-1}\dot{x}), \quad (2.3)$$

da in diesem Fall  $d\mu(x_0^{-1}\dot{x})/d\mu(\dot{x}) = 1$  gilt.

Im folgenden werden induzierte Darstellungen von sogenannten regulären semi-direkten Produkten  $G = A \ltimes N$  behandelt, wobei  $N$  abelsch ist. Man kann zeigen, daß in diesem Fall jede irreduzible unitäre Darstellung von  $G$  von einer irreduziblen unitären Darstellung einer nicht-trivialen Untergruppe von  $G$  induziert ist.

**Bemerkung 2.2.14**

Eine unitäre Darstellung  $\pi$  eines semi-direkten Produktes  $G = A \ltimes N$  ist eindeutig bestimmt durch die Einschränkungen auf  $A$  und  $N$ , also durch die Teildarstellungen  $\pi_A$  und  $\pi_N$ .

**Definition 2.2.15**

- (i) Sei  $\lambda \in \widehat{N}$  gegeben. Die Menge aller  $\lambda a := \lambda \circ \tau_a$  für alle  $a \in A$ , wobei  $\tau_a$  der Automorphismus von  $N$  ist, der zu  $a \in A$  gehört (vgl. Definition 2.1.15), heißt *A-Orbit* (oder kurz: *Orbit*) des Charakters  $\lambda$  und wird mit  $A(\lambda)$  bezeichnet.
- (ii) Sei  $\lambda$  ein Punkt aus  $\widehat{N}$ . Die Menge aller  $a \in A$ , für die  $\lambda a = \lambda$  erfüllt ist, heißt *Stabilitätsgruppe* von  $\lambda$ . Wir bezeichnen sie im folgenden mit  $A_\lambda$ .
- (iii)  $G$  ist ein *reguläres semi-direktes Produkt* von  $A$  und  $N$ , falls  $\widehat{N}$  eine abzählbare Familie  $Z_1, Z_2, \dots$  von Borelmengen enthält, wobei jede eine Vereinigung von Orbits von  $G$  ist, so daß jeder Orbit in  $\widehat{N}$  der Durchschnitt aller Mitglieder der Teilfamilie  $Z_{n_1}, Z_{n_2}, \dots$  ist, die diesen Orbit enthalten.

Der entscheidende Satz für die Mackey-Theorie ist der sogenannte Imprimitivitätssatz, der im folgenden vorgestellt wird. Er ist aus dem Buch von Folland [Fol 95] entnommen.

**Definition 2.2.16**

- (i) Seien  $G$  eine lokalkompakte Gruppe und  $\Omega$  ein lokalkompakter links-topologischer  $G$ -Raum. Ein *Imprimitivitätssystem* von  $G$  über  $\Omega$  ist ein Paar  $(\sigma, P)$ , wobei  $\sigma$  eine unitäre Darstellung von  $G$  auf einen Hilbertraum  $\mathcal{H}$  ist und  $P$  ein \*-Homomorphismus von  $C_0(\Omega)$  nach  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , so daß
  - (a)  $P[C_0(G)]\mathcal{H}$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist und
  - (b)  $\sigma(x)P(\varphi)\sigma(x^{-1}) = P(L_x\varphi)$  für alle  $\varphi \in C_0(\Omega)$  und  $x \in G$ .



(ii) Seien  $(\sigma_1, P_1)$  und  $(\sigma_2, P_2)$  Imprimitivitätssysteme von  $G$  über einem lokalkompakten links-topologischen  $G$ -Raum  $\Omega$ .  $(\sigma_1, P_1)$  und  $(\sigma_2, P_2)$  heißen *äquivalent über  $\Omega$* , falls ein unitärer Operator  $U : \mathcal{H}(\sigma_1) \rightarrow \mathcal{H}(\sigma_2)$  existiert mit den folgenden Eigenschaften:

- (a)  $U\sigma_1(x) = \sigma_2(x)U$  für alle  $x \in G$  und
- (b)  $UP_1(\varphi) = P_2(\varphi)U$  für alle  $\varphi \in C_0(\Omega)$ .

(iii) Seien  $G$  eine lokalkompakte Gruppe,  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ ,  $\Omega$  ein lokalkompakter links-topologischer  $G$ -Raum und  $\pi$  eine unitäre Darstellung von  $H$ . Seien ferner  $\mathcal{H}$  der Hilbertraum der induzierten Darstellung  $\text{ind}_H^G =: U^\pi$  und  $P^\pi$  der  $*$ -Homomorphismus von  $C_0(G/H)$  nach  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , der gegeben ist durch

$$P^\pi(\varphi)f = (\varphi \circ q)f,$$

wobei  $q : G \rightarrow G/H$  die Quotientenabbildung ist. Dann heißt das Paar  $(U^\pi, P^\pi)$  *das von  $\pi$  induzierte Imprimitivitätssystem von  $G$  über  $G/H$* .

**Satz 2.2.17 (Imprimitivitätssatz)**

Seien  $G$  eine lokalkompakte Gruppe,  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$  und  $(\sigma, P)$  ein Imprimitivitätssystem von  $G$  über  $G/H$ . Dann existiert eine unitäre Darstellung  $\pi$  von  $H$ , so daß  $(\sigma, P)$  zu  $(U^\pi, P^\pi)$ , dem von  $\pi$  induzierten Imprimitivitätssystem, äquivalent ist über  $G/H$ .

Mit Hilfe der sogenannten Mackey-Maschine können alle irreduziblen unitären Darstellungen eines regulären semi-direkten Produktes  $A \rtimes N$ ,  $N$  abelsch, bestimmt werden. Zuerst wird die Mackey-Maschine und anschließend der Satz vorgestellt, der aussagt, daß die so erhaltenen Darstellungen bis auf Äquivalenz alle Darstellungen sind. Der Satz ist eine Folgerung des Imprimitivitätssatzes.

**Mackey-Maschine 2.2.18**

Sei  $G = A \rtimes N$  ein reguläres semi-direktes Produkt und  $N$  abelsch. Wir können eine Charakterisierung aller irreduziblen unitären Darstellungen eines regulären semi-direkten Produktes  $A \rtimes N$  durch folgende Schritte bestimmen:

- (1) Bestimme  $\widehat{N}$ .
- (2) Bestimme zu jedem  $\lambda \in \widehat{N}$  den Orbit  $A(\lambda)$ .
- (3) Wähle ein Element  $\lambda_0$  aus jedem Orbit aus und bestimme zu  $\lambda_0$  die Stabilitätsgruppe  $A_{\lambda_0} \subseteq A$ .
- (4) Nimm einen Charakter  $\lambda$  von  $N$  und eine irreduzible unitäre Darstellung  $\pi$  von  $A_\lambda$  und betrachte

$$\sigma : A_\lambda \rtimes N \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi), \quad \sigma(a, n) = \pi(a)\lambda(n).$$

Dann ist  $\sigma$  eine irreduzible unitäre Darstellung.

- (5) Berechne  $\text{ind}_{A_\lambda \rtimes N}^{A \rtimes N} \sigma$  mit Hilfe der Formel (2.2).

**Satz 2.2.19**

Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus der eben vorgestellten Mackey-Maschine (2.2.18). Dann sind folgende Aussagen richtig:

- (i) Jede der Darstellungen  $\text{ind}_{A_\lambda \times N}^G(\pi \cdot \lambda)$  ist irreduzibel.
- (ii) Jede irreduzible Darstellung von  $G = A \times N$  ist äquivalent zu einer von der Gestalt in (i).
- (iii) Nimmt man in Schritt (4) nur genau einen Charakter aus jedem Orbit, so erhält man mit der Mackey-Maschine aus jeder Äquivalenzklasse der irreduziblen Darstellungen von  $G = A \times N$  genau eine Darstellung.

Nach den Schritten aus der Mackey-Maschine (2.2.18) werden in Kapitel 3 alle irreduziblen unitären Darstellungen des semi-direkten Produktes  $SO(n) \times \mathbb{R}^n$  bestimmt, da diese zur Bestimmung von Wavelet-Transformationen für Funktionen  $f \in L^2(S^{n-1}, \mathcal{H}_\pi)$  benötigt werden.

## 2.3 Wavelet-Theorie

Ziel ist es, eine Funktion  $f$  so zu transformieren, daß man aus der Transformierten z.B. bestimmte Informationen über  $f$  besser ablesen kann oder die Transformierte platzsparender abspeichern kann als die Funktion  $f$  selber. Dieses ist z.B. für die Bildverarbeitung von Bedeutung. Betrachtet man die Anwendungen in der Bildverarbeitung, so ist es außerdem wichtig, die Funktion  $f$  möglichst gut aus ihrer Transformierten rekonstruieren zu können, d.h. die Transformation sollte auch invertierbar sein. Zuerst werden im allgemeinen immer stetige Transformationen betrachtet, anschließend wird versucht, diskrete Varianten zu finden, da diese besser zu berechnen sind. An Literatur für die stetige Wavelet-Transformation wurden insbesondere [LoMaRi 94], [GrMoPa 85] und [Tor 93] benutzt. Die Vorstellung der diskreten Variante orientiert sich an einem Übersichtsartikel von [HeWa 63].

### 2.3.1 Stetige Wavelet-Transformation

Die Wavelet-Transformation wird natürlich in erster Linie von dem Funktionenraum abhängen, zu dem die Funktion  $f$  gehört. Zuerst möchte ich die am meisten verbreitete Definition der Wavelet-Transformation auf dem  $L^2(\mathbb{R})$  vorstellen.

#### Definition 2.3.1

Eine Funktion  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , die die Zulässigkeitsbedingung

$$0 < c_\psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

erfüllt, heißt *Wavelet*. Die *Wavelet-Transformierte* einer Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  zum Wavelet  $\psi$  ist durch

$$T_\psi(f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R},$$

definiert.

Bei geeigneter Wahl von  $c_\psi$  ergibt sich eine Inversionsformel, die aus [LoMaRi 94] entnommen ist.

**Lemma 2.3.2**

Seien  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und  $c_\psi$  wie in Definition 2.3.1 gewählt. Dann gilt die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} T_\psi(f)(a, b) |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{da}{a^2} db.$$

Die Definition der Wavelet-Transformation auf dem  $L^2(\mathbb{R})$  soll jetzt in einen allgemeineren Rahmen gestellt werden.

**Bemerkung 2.3.3**

Man betrachte die quadrat-integrierbare unitäre Darstellung der affinen Gruppe

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R})), \quad (\pi(a, b)f)(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Damit läßt sich die Wavelet-Transformation auf dem  $L^2(\mathbb{R})$  in der Form

$$T_\psi(f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \langle f, \pi(a, b)\psi \rangle$$

schreiben. Die Inversionsformel kann auch mit Hilfe der Darstellung  $\pi$  zu

$$f(x) = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathcal{A}} \langle f, \pi(a, b)\psi \rangle (\pi(a, b)\psi)(x) d\mu(a, b)$$

vereinfacht werden, wobei  $\mu$  das kanonische Haarmaß auf  $\mathcal{A}$  ist.

Mit Hilfe dieser Bemerkung können wir jetzt versuchen, eine allgemeinere Definition für Wavelet-Transformationen zu finden. Dabei werden wir den Normierungsfaktor  $\frac{1}{\sqrt{c_\psi}}$  aus der Definition herauslassen, um diesen gesondert betrachten zu können.

**Definition 2.3.4**

Seien  $G$  eine lokalkompakte topologische Gruppe,  $\pi$  eine quadrat-integrierbare unitäre Darstellung von  $G$  in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Sei ferner  $f \in \mathcal{H}$ . Ein  $\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  heißt *Wavelet*, falls es ein zulässiger Vektor ist. Die *linke Wavelet-Transformation* von  $f$  zum Wavelet  $\psi$  ist definiert durch

$$L_\psi : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(G), \quad L_\psi(f)(g) = \langle f, \pi(g)\psi \rangle.$$

Die *rechte Wavelet-Transformation* von  $f$  zum Wavelet  $\psi$  ist analog durch

$$R_\psi : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(G), \quad R_\psi(f)(g) = \langle \pi(g)f, \psi \rangle$$

definiert. Es besteht der einfache Zusammenhang  $R_\psi(f)(g) = L_\psi(f)(g^{-1})$ .

**Bemerkung 2.3.5**

Seien  $G, \mathcal{H}, \pi$  und  $\psi$  wie in Definition 2.3.4. Die Definition der Abbildung  $L_\psi$  ist sinnvoll, da die sogenannten Koordinatenfunktionen

$$g \longmapsto \langle f, \pi(g)\psi \rangle, \quad f \in \mathcal{H},$$

in  $L^2(G)$  sind (vgl. [Dix 77]). Analoges gilt für  $R_\psi$ .

Der folgende Satz ist sozusagen das Schlüsselresultat zur Benutzung von quadrat-integrierbaren unitären Darstellungen. Dieser Satz wurde in allgemeinerer Form in Arbeiten von Duflo und Moore [DuMo 76] und Carey [Car 76] vorgestellt.

**Satz 2.3.6**

Seien  $\pi$  eine quadrat-integrierbare unitäre Darstellung einer lokalkompakten Gruppe  $G$  (mit linksinvariantem Haarmaß  $d\mu_L$ ) auf den Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und  $D$  die Menge aller zulässigen Vektoren  $\psi \in \mathcal{H}$ . Seien außerdem  $\psi_1, \psi_2 \in D$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmter, i.a. unbeschränkter, positiver Operator  $C : D \rightarrow \mathcal{H}$ , so daß für je zwei beliebige Vektoren  $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$  gilt

$$\int_G L_{\psi_1}(f_1)(g) \overline{L_{\psi_2}(f_2)(g)} d\mu_L(g) = \overline{\langle C\psi_1, C\psi_2 \rangle} \langle f_1, f_2 \rangle.$$

Sei  $d\mu_R$  ein rechtsinvariantes Haarmaß auf  $G$ , dann gilt für die rechte Wavelet-Transformation

$$\int_G R_{\psi_1}(f_1)(g) \overline{R_{\psi_2}(f_2)(g)} d\mu_R(g) = \overline{\langle C\psi_1, C\psi_2 \rangle} \langle f_1, f_2 \rangle.$$

Ist die Gruppe  $G$  unimodular, so ist der Operator  $C$  ein Vielfaches der Identität.

**Bemerkung 2.3.7**

Setzen wir in Satz 2.3.6  $\psi_1 = \psi_2 = f_1 = f_2 =: \psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  so folgt für die linke Wavelet-Transformation

$$\langle C\psi, C\psi \rangle = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_G |L_\psi(\psi)(g)|^2 d\mu_L(g).$$

Damit gilt im Fall  $\psi_1 = \psi_2 =: \psi$

$$\int_G L_\psi(f_1)(g) \overline{L_\psi(f_2)(g)} d\mu_L(g) = \frac{\|L_\psi(\psi)\|^2}{\|\psi\|^2} \langle f_1, f_2 \rangle \quad \text{für alle } f_1, f_2 \in \mathcal{H}.$$

Für die rechte Wavelet-Transformation muß nur das linksinvariante durch das rechtsinvariante Haarmaß ersetzt werden.

**Folgerung 2.3.8**

Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in Satz 2.3.6. Sei  $\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  ein zulässiger Vektor. Definiere

$$c_\psi := \frac{\|L_\psi(\psi)\|^2}{\|\psi\|^2}.$$

Dann ist  $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} L_\psi(f)$  eine isometrische Abbildung von  $\mathcal{H}$  nach  $L^2(G, d\mu_L)$ , d.h. für  $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$  gilt

$$\frac{1}{c_\psi} \int_G L_\psi(f_1)(g) \overline{L_\psi(f_2)(g)} d\mu_L(g) = \langle f_1, f_2 \rangle.$$

Auch  $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} R_\psi(f)$  ist eine isometrische Abbildung von  $\mathcal{H}$  nach  $L^2(G, d\mu_R)$ , d.h. es gilt für beliebige  $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$

$$\frac{1}{c_\psi} \int_G R_\psi(f_1)(g) \overline{R_\psi(f_2)(g)} d\mu_R(g) = \langle f_1, f_2 \rangle.$$

Der nächste Satz zeigt, daß man auch in der allgemeinen Situation eine Inversionsformel hat. Dieser Satz folgt direkt aus der Folgerung 2.3.8.

**Satz 2.3.9**

Seien  $G$  eine separable lokalkompakte Gruppe (mit linksinvariantem Haarmaß  $d\mu_L$  und rechtsinvariantem Haarmaß  $d\mu_R$ ),  $\pi$  eine quadrat-integrierbare unitäre Darstellung von  $G$  auf den Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und  $\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  zulässig. Sei  $c_\psi$  definiert wie in Folgerung 2.3.8. Dann gilt für alle  $f \in \mathcal{H}$  die folgende Zerlegung

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_G L_\psi(f)(g) \pi(g)\psi d\mu_L(g).$$

Für die rechte Wavelet-Transformation gilt analog

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_G R_\psi(f)(g) \pi(g)^{-1}\psi d\mu_R(g),$$

wobei die Integrale schwach konvergieren, d.h.

$$\langle f, v \rangle = \frac{1}{c_\psi} \int_G L_\psi(f)(g) \langle \pi(g)\psi, v \rangle d\mu_L(g)$$

für alle  $v \in \mathcal{H}$ . (Analog für die rechte Wavelet-Transformation.)

Es zeigt sich durch Anwendung auf die affine Gruppe und die quadrat-integrierbare unitäre Darstellung

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R})), \quad (\pi(a, b)f)(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

daß die Wavelet-Transformation auf dem  $L^2(\mathbb{R})$  tatsächlich ein Spezialfall der hier vorgestellten allgemeinen Theorie ist.

### 2.3.2 Diskrete Wavelet-Transformation

Wir möchten die stetige Transformation des vorherigen Abschnitts in gewisser Weise diskretisieren. D.h., wenn wir einen Hilbertraum  $\mathcal{H}$  gegeben haben, suchen wir eine feste Menge, deren Elemente  $\eta_j$  Vektoren aus  $\mathcal{H}$  sind, so daß sich jeder Vektor des Hilbertraumes in der Form  $\xi = \sum_{j \in J} c_j \eta_j$  mit eindeutig bestimmten Skalaren  $c_j$  schreiben läßt. In einem Hilbertraum findet man natürlich immer eine Orthonormalbasis. Allerdings stellt das Konzept der Orthonormalbasen aus der Sicht der Wavelet-Theorie eine zu große Einschränkung dar. Deshalb wird für die diskrete Wavelet-Transformation eine allgemeinere Definition als die der Orthonormalbasen genommen.

**Definition 2.3.10**

Eine Familie von Vektoren  $(\eta_j)_{j \in J}$  in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  heißt *Frame*, falls es Konstanten  $A, B > 0$  gibt, so daß für alle  $\xi \in \mathcal{H}$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle \xi, \eta_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

gilt. Die Konstanten  $A$  und  $B$  nennt man *Frame-Schranken*. Der Frame heißt *fest*, falls  $A = B$  gilt. Sei  $(\eta_j)_{j \in J}$  ein Frame. Falls für jedes  $k \in J$  die Familie  $(\eta_j)_{j \in J \setminus \{k\}}$  die Eigenschaft eines Frames nicht erfüllt, heißt der Frame  $(\eta_j)_{j \in J}$  *exakt*.

**Bemerkung 2.3.11**

Der Satz von Plancherel zeigt, daß jede Orthonormalbasis ein fester, exakter Frame ist. Also ist die Definition eines Frames in der Tat eine Verallgemeinerung der Definition einer Orthonormalbasis.

**Definition 2.3.12**

Seien  $(\eta_j)_{j \in J}$  eine Familie von Vektoren in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ ,  $D$  der lineare Teilraum der Elemente  $\xi$  von  $\mathcal{H}$ , für die die Summe  $\sum_{j \in J} \langle \xi, \eta_j \rangle \eta_j$  in  $\mathcal{H}$  konvergiert, und  $S : D \rightarrow \mathcal{H}$  der Operator, der durch

$$S(\xi) = \sum_{j \in J} \langle \xi, \eta_j \rangle \eta_j$$

definiert wird.  $S$  heißt *Frame-Operator* der Familie  $(\eta_j)_{j \in J}$ , falls  $D = \mathcal{H}$  gilt.

**Satz 2.3.13**

Sei  $(\eta_j)_{j \in J}$  eine Familie von Vektoren in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $(\eta_j)_{j \in J}$  ist ein Frame mit Schranken  $A$  und  $B$ .
- (ii) Der Operator  $S - S$  sei definiert wie in Definition 2.3.12 – von  $(\eta_j)_{j \in J}$  ist ein beschränkter linearer Operator, es gilt  $D = \mathcal{H}$  und

$$AI \leq S \leq BI,$$

wobei  $I$  die Identität auf  $\mathcal{H}$  ist.

**Folgerung 2.3.14**

Sei  $(\eta_j)_{j \in J}$  ein Frame in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit Frame-Schranken  $A$  und  $B$ . Dann gelten folgende Aussagen:

- (i)  $S$  ist invertierbar und es gilt  $B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$ .
- (ii)  $(S^{-1}(\eta_j))_{j \in J}$  ist ein Frame mit Frame-Schranken  $B^{-1}$  und  $A^{-1}$ .
- (iii) Jedes  $\xi \in \mathcal{H}$  kann man in der Form

$$\xi = \sum_{j \in J} \langle \xi, S^{-1}(\eta_j) \rangle \eta_j = \sum_{j \in J} \langle \xi, \eta_j \rangle S^{-1}(\eta_j) \quad (2.4)$$

schreiben.

**Definition 2.3.15**

Sei  $(\eta_j)_{j \in J}$  ein Frame in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Dann nennt man  $(S^{-1}(\eta_j))_{j \in J}$  den *dualen Frame* von  $(\eta_j)_{j \in J}$ .

Einen gegebenen Vektor  $\xi$  aus einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  kann man also durch Kenntnis der Skalarprodukte von  $\xi$  mit einem Frame  $(\eta_j)_{j \in J}$  und Kenntnis der Elemente des dualen Frames mit Hilfe der Formel (2.4) zurückgewinnen.

## Kapitel 3

# Stetige Wavelet-Transformationen auf $S^{n-1}$

Basierend auf der allgemeinen Definition einer rechten Wavelet-Transformation wird hier als Hilbertraum  $L^2(S^{n-1}, \mathcal{H})$  betrachtet, wobei  $\mathcal{H}$  im folgenden näher bestimmt wird. Es ist also eine lokalkompakte Gruppe  $G$  zu wählen, eine quadrat-integrierbare unitäre Darstellung von  $G$  auf  $L^2(S^{n-1}, \mathcal{H})$  und die Menge der zulässigen Vektoren.

Wir werden als Gruppe  $G$  das semi-direkte Produkt  $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$  nehmen, da  $SO(n)$  durch Rotationen – das Analogon zu Translationen auf  $\mathbb{R}^n$  – auf  $S^{n-1}$  wirkt. Betrachtet man Modulationen, d.h. Abbildungen der Form  $f \mapsto E_a(f)$  mit  $E_a(f)(x) = e^{2\pi a x} f(x)$  für  $a \in \mathbb{R}$ , auf  $\mathbb{R}^n$ , so erkennt man, daß sie Translationen im Fourierraum sind. Für jeden Punkt der Sphäre kann der zugehörige Fourierraum mit dem Kotangentenraum, der isomorph zu  $\mathbb{R}^{n-1}$  ist, identifiziert werden. Die Translate aller solcher Fourierraume bilden eine Teilmenge der Translationsgruppe  $\mathbb{R}^n$ . Somit ist unsere Wahl gerechtfertigt. Außerdem können mittels der Schritte der Mackey-Maschine (2.2.18) alle irreduziblen unitären Darstellungen von  $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$  auf sehr elegante Art bestimmt werden. Diese sind jedoch nicht quadrat-integrierbar, aber durch Einschränkung auf einen geeigneten homogenen Raum werden sie quadrat-integrierbar. Dabei verlieren sie jedoch die Eigenschaft, Darstellungen zu sein. Anschließend werden mit Hilfe dieser darstellungsähnlichen Abbildungen Wavelet-Transformationen von  $\mathcal{H}_\pi$ -wertigen, quadrat-integrierbaren Funktionen auf  $S^{n-1}$  konstruiert.

Ein Spezialfall dieser Betrachtungen ist in einer Arbeit von Toressani [Tor 93] zu finden.

### 3.1 Bestimmung der Darstellungen für die Transformation

Anhand der in 2.2.18 beschriebenen Schritte der Mackey-Maschine können wir eine Beschreibung aller irreduziblen unitären Darstellungen (bis auf Äquivalenz) des semi-direkten Produktes  $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$  auf  $L^2(S^{n-1}, \mathcal{H})$ ,  $\mathcal{H}$  ein im folgenden näher spezifizierter Hilbertraum, angeben.

#### **Bemerkung 3.1.1**

*Die benötigte Voraussetzung, daß  $G$  ein reguläres semi-direktes Produkt ist, ist hier erfüllt (siehe [BaRä 80]).*

- (i) *Es gilt  $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$  nach Beispiel 2.1.23.*



(ii) Sei  $u \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} \{\widehat{u}A : A \in SO(n)\} &= \{\widehat{u} \circ \tau_A : A \in SO(n)\} \\ &\stackrel{\text{Bsp. 2.1.23}}{=} \{e^{i\langle u, A \cdot \rangle} : A \in SO(n)\} \\ &= \{e^{i\langle A^t u, \cdot \rangle} : A \in SO(n)\} \\ &= \{\widehat{A^t u} : A \in SO(n)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \|u\|\}. \end{aligned}$$

Hier sind die Orbits also Oberflächen von Kugeln um den Nullpunkt mit Radius  $r := \|u\|$ .

(iii) Wir betrachten die Fälle  $r = 0$  und  $r > 0$  gesondert.

(a)  $r > 0$ :

Wähle  $\widehat{u} = (0, \dots, 0, r) \in \mathbb{R}^n$  als Punkt des Orbits, der gleich der Oberfläche der Kugel um 0 vom Radius  $r$  ist. Für die Stabilitätsgruppe  $SO(n)_{\widehat{u}} \subseteq SO(n)$  des Punktes  $\widehat{u}$  gilt

$$\begin{aligned} \widehat{u}A &= \widehat{u} \\ \iff e^{i\langle u, A \cdot \rangle} &= e^{i\langle u, \cdot \rangle} \\ \iff e^{i\langle A^t u, \cdot \rangle} &= e^{i\langle u, \cdot \rangle} \\ \iff A^t u &= u \\ \iff A &\in SO(n-1) \text{ für beliebiges } A \in SO(n). \end{aligned}$$

Die Stabilitätsgruppe des Punktes  $\widehat{u}$  ist also isomorph zu  $SO(n-1)$ . Zur Einbettung von  $SO(n-1)$  in  $SO(n)$  vergleiche Bemerkung A.1.1 (i).

(b)  $r = 0$ :

Wähle  $\widehat{u} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Trivialerweise ist die Stabilitätsgruppe des Punktes  $\widehat{u}$   $SO(n)$ .

(iv) Nach Beispiel 2.2.4 sind

$$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto e^{i\langle u, x \rangle} I, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

die irreduziblen unitären Darstellungen von  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $I$  die Identität auf  $\mathcal{H}_\pi$  ist. Wähle also  $u = (0, \dots, 0, t) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  beliebig. (Es genügt, diese zu betrachten.) Sei  $\pi$  irreduzible Darstellung von  $SO(n)_{\widehat{u}} = SO(n-1)$  auf  $\mathcal{H}_\pi$ . Dann ist

$$\sigma(A, x) = e^{i\langle u, x \rangle} \pi(A), \quad A \in SO(n-1), x \in \mathbb{R}^n$$

eine irreduzible unitäre Darstellung von  $SO(n-1) \times \mathbb{R}^n$  auf den Hilbertraum  $\mathcal{H}_\pi$ .

(v) Um die Formel für die induzierte Darstellung (2.2) aus Folgerung 2.2.13 anwenden zu können, müssen noch die Voraussetzungen verifiziert werden.  $SO(n) \times \mathbb{R}^n$  ist eine separable lokalkompakte Gruppe und  $SO(n-1) \times \mathbb{R}^n$  eine abgeschlossene Untergruppe. Sei  $c'$  der Borel-Schnitt aus Lemma A.1.16. Wir müssen einen Borel-Schnitt

$$c : SO(n) \times \mathbb{R}^n / SO(n-1) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow SO(n) \times \mathbb{R}^n$$

definieren. Als erstes ist festzustellen, daß

$$SO(n) \times \mathbb{R}^n / SO(n-1) \times \mathbb{R}^n \cong SO(n) / SO(n-1) \stackrel{\text{Lemma A.1.6}}{\cong} S^{n-1} \quad (3.1)$$

gilt. Es genügt also, die Abbildung  $c$  auf  $S^{n-1}$  zu definieren. Wir setzen

$$c(\xi) = (c'(R_\xi SO(n-1)), 0) = (R_{R_\xi e_n}, 0) \stackrel{\text{Lemma A.1.13}}{=} (R_\xi, 0).$$

Nach Lemma A.1.16 ist  $c$  ein Borel-Schnitt. Damit sind die Voraussetzungen von Folgerung 2.2.13 erfüllt. Da außerdem das Maß  $\mu_{n-1}$  invariant ist (vgl. Satz A.2.3), können wir Formel (2.3) anwenden. Damit gilt

$$\begin{aligned} & \left( \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(A, x) f \right) (\xi) \\ &= (\sigma(c(\xi)^{-1}(A, x) c((A, x)^{-1}\xi))) (f((A, x)^{-1}\xi)) \\ &= (\sigma((R_\xi, 0)^{-1}(A, x) c((A^{-1}, -A^{-1}x)(R_\xi, 0) SO(n-1) \times \mathbb{R}^n))) \\ & \quad (f((A^{-1}, -A^{-1}x)(R_\xi, 0) SO(n-1) \times \mathbb{R}^n)) \\ &= (\sigma((R_\xi^{-1}, 0)(A, x) c((A^{-1}R_\xi, -A^{-1}x) SO(n-1) \times \mathbb{R}^n))) \\ & \quad (f((A^{-1}R_\xi, -A^{-1}x) SO(n-1) \times \mathbb{R}^n)) \\ &= (\sigma((R_\xi^{-1}A, R_\xi^{-1}x) c(A^{-1}R_\xi e_n))) (f(A^{-1}R_\xi e_n)) \\ &= (\sigma((R_\xi^{-1}A, R_\xi^{-1}x) c(A^{-1}\xi))) (f(A^{-1}\xi)) \\ &= (\sigma((R_\xi^{-1}AR_{A^{-1}\xi}, R_\xi^{-1}x))) (f(A^{-1}\xi)) \\ &= e^{i\langle u, R_\xi^{-1}x \rangle} (\pi(R_\xi^{-1}AR_{A^{-1}\xi})) (f(A^{-1}\xi)). \end{aligned}$$

## 3.2 Zur Quadrat-Integrierbarkeit der Darstellungen

Die in Bemerkung 3.1.1 gefundenen irreduziblen unitären Darstellungen müßten, um sie für eine Wavelet-Transformation benutzen zu können, quadrat-integrierbar sein. Der nächste Satz zeigt aber, daß das Gegenteil der Fall ist. Der Beweis hierzu ist kurz gehalten. Die benutzte Theorie kann in [Dix 77] und [KILi 72] nachgelesen werden.

### Satz 3.2.1

Sei  $G$  ein semi-direktes Produkt  $G = K \times \mathbb{R}^n$ , wobei  $K$  kompakt ist. Dann ist jede irreduzible unitäre Darstellung von  $G$  nicht quadrat-integrierbar.

### Beweis:

Sei  $\pi$  eine irreduzible Darstellung von  $G$ . Wir nehmen an,  $\pi$  sei quadrat-integrierbar. Dann folgt, daß  $\pi$  eine Teildarstellung der linksregulären Darstellung  $\lambda$  ist. Sei  $\lambda'$  die Einschränkung von  $\lambda$  auf  $\mathcal{H}_\pi^\perp \subseteq L^2(G)$ , wobei  $\mathcal{H}_\pi$  der Hilbertraum von  $\pi$  sei. Dann gilt

$$\lambda = \pi \oplus \lambda'.$$

Im folgenden benötigen wir den Begriff des Plancherel-Maßes.

Sei  $m_G$  ein festes Haarmaß auf  $G$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß  $\mu_G$  auf  $\widehat{G}$ , das sogenannte *Plancherel-Maß*, so daß für alle  $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$  gilt

$$\int_G |f(x)|^2 dm_G(x) = \int_{\widehat{G}} \text{tr}(\pi(f)\pi(f)^*) d\mu_G(\pi).$$

Für das so definierte Maß gilt außerdem

$$\lambda = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\mu_G(\pi),$$

wobei  $m(\pi) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ .

Sei im folgenden  $\mu_G$  das Plancherel-Maß. Außerdem existiert ein Maß  $\mu'_G$ , bezüglich dessen sich  $\lambda'$  als direktes Integral darstellen läßt (siehe [Dix 77]). Ferner können wir  $\pi$  trivialerweise bezüglich des Dirac-Maßes  $\delta_\pi$  zerlegen. Damit gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \lambda & = & \pi & \oplus & \lambda' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mu_G & \leftrightarrow & (\delta_\pi + \mu'_G) & & \end{array}$$

Wegen der Eindeutigkeit des Plancherel-Maßes sind die Maße  $\mu_G$  und  $(\delta_\pi + \mu'_G)$  äquivalent, d.h. die Nullmengen sind gleich. Damit gilt

$$(\delta_\pi + \mu'_G)(\{\pi\}) > 0 \implies \mu_G(\{\pi\}) > 0.$$

Kleppner und Lipsman haben eine Formel für das Plancherel-Maß entwickelt [KLi 72]. Für eine meßbare Teilmenge  $E$  von  $\widehat{G}$  gilt damit

$$\mu_G(E) = \int_{\widehat{\mathbb{R}^n}/K} \left( \sum_{\rho \in \widehat{K_\alpha}} \chi_E(\text{ind}_{K_\alpha \times \mathbb{R}^n}^G(\rho \otimes \alpha)) \dim \rho \right) d\tilde{\nu}(\tilde{\alpha}).$$

Dabei ist  $\chi_E$  die charakteristische Funktion von  $E$  und  $\tilde{\nu}$  das Bild des Lebesgue Maßes  $\nu$  unter der Quotientenabbildung  $\widehat{\mathbb{R}^n} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^n}/K$ ,  $\alpha \mapsto \tilde{\alpha} = K(\alpha)$ . Mit Hilfe dieser Formel können wir jetzt  $\mu_G$  im Punkt  $\{\pi\}$  ausrechnen.

$$\begin{aligned} \mu_G(\{\pi\}) &= \int_{\widehat{\mathbb{R}^n}/K} \left( \sum_{\rho \in \widehat{K_\alpha}} \chi_{\{\pi\}}(\text{ind}_{K_\alpha \times \mathbb{R}^n}^G(\rho \otimes \alpha)) \dim \rho \right) d\tilde{\nu}(\tilde{\alpha}) \\ &= \int_{\widehat{\mathbb{R}^n}/K} \chi_{\{\pi\}}(\text{ind}_{K_\alpha \times \mathbb{R}^n}^G(\rho_0 \otimes \alpha)) \dim \rho_0 d\tilde{\nu}(\tilde{\alpha}) \\ &= \int_{\widehat{\mathbb{R}^n}/K} \chi_{\{\tilde{\alpha}_0\}}(\tilde{\alpha}) \dim \rho_0 d\tilde{\nu}(\tilde{\alpha}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, daß genau ein Orbit  $K(\alpha_0) \in \widehat{\mathbb{R}^n}/K$  und eine irreduzible unitäre Darstellung  $\rho_0 \in \widehat{K_{\alpha_0}}$  mit  $\pi = \text{ind}_{K_{\alpha_0} \times \mathbb{R}^n}^G(\rho_0 \otimes \alpha_0)$  existieren. Die Rechnung ergibt einen Widerspruch zu  $\mu_G(\{\pi\}) > 0$ , d.h.  $\pi$  kann nicht quadrat-integrierbar gewesen sein. ■

### Bezeichnung 3.2.2

Im folgenden sei

$$x \mapsto \tilde{x} = (x, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1},$$

die Einbettung von  $\mathbb{R}^{n-1}$  in den  $\mathbb{R}^n$  (vgl. Bemerkung A.1.1 (ii)).

### Bemerkung 3.2.3

Definiere die Abbildung  $c : SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow SO(n) \times \mathbb{R}^n$  durch

$$c(A, x) \mapsto (A, \tilde{x}).$$

$c$  ist trivialerweise stetig. Wir betrachten die folgende darstellungsähnliche Abbildung – eine Darstellung ist es nicht mehr, da  $SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1}$  keine Gruppe ist – von  $SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1}$  auf  $\mathcal{H}_\pi$ :

$$\text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A, x)).$$

Diese „Darstellung“ ist wieder unitär, da  $\sigma$  unitär ist. Daß sie jetzt auch quadrat-integrierbar ist, wird sich im nächsten Abschnitt zeigen.

Im folgenden wird  $SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1}$  mit dem Produktmaß versehen. Wir bezeichnen die Transformationen im folgenden immer mit  $T_\psi$ , wobei  $\psi$  das zugehörige Wavelet ist, egal ob es rechte oder linke Wavelet-Transformationen sind, wegen des in Definition 2.3.4 genannten einfachen Zusammenhanges zwischen den beiden Definitionen.

## 3.3 Die Transformation

### Satz 3.3.1

Seien  $\psi \in L^2(S^{n-1}, \mathcal{H}_\pi)$  mit  $\text{supp } \psi \subseteq \Omega$ ,  $\text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(\cdot))$  die „Darstellung“ aus Bemerkung 3.2.3 von  $SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1}$  in dem Hilbertraum  $L^2(S^{n-1}, \mathcal{H}_\pi)$  und

$$0 \neq c_\psi := \frac{(2\pi)^{n-1}}{|t^n|} \text{vol}(SO(n-1)) \int_{\Omega} \frac{\|\psi(\Lambda(\theta))\|^2}{\cos(\theta_{n-1})} \prod_{j=1}^{n-1} d\theta_j < \infty.$$

Für die Wavelet-Transformation

$$L^2(S^{n-1}, \mathcal{H}_\pi) \ni f \mapsto \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} T_\psi(f) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \langle \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(\cdot)) f, \psi \rangle \in L^2(SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1})$$

gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Die Abbildung  $\frac{1}{\sqrt{c_\psi}} T_\psi$  ist normfallend, also ist  $\text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(\cdot))$  quadrat-integrierbar.
- (ii) Falls  $\pi$  eindimensional ist, d.h. der Hilbertraum  $\mathcal{H}_\pi$  die Dimension 1 hat, ist  $\frac{1}{\sqrt{c_\psi}} T_\psi$  eine Isometrie.

**Beweis:**

Sei  $f \in L^2(S^{n-1}, \mathcal{H}_\pi)$ . Vor dem Hauptbeweis werden erst einzelne Teilaussagen bewiesen.

- (a) Seien im folgenden die Abbildungen  $\varphi$  und  $\Lambda$  wie in Bemerkung A.1.12 bzw. Bezeichnung A.1.4 und die Maße  $\mu_n$  und  $\nu_n$  wie in Satz A.2.3 bzw. Satz A.2.6 definiert. Mit der Tatsache, daß  $\nu_n$  rotationsinvariant ist (\*), gilt für beliebiges, aber festes  $\Lambda(\theta) \in S^{n-1}$ ,  $D \in SO(n)$  und  $h \in C(S^{n-1})$

$$\begin{aligned}
& \int_{SO(n-1)} \left( \int_{S^{n-1}} h(D\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta)) d\mu_{n-1}(\xi) \right) d\nu_{n-1}(B) \\
&= \int_{S^{n-1} \times SO(n-1)} h(D\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta)) d(\mu_{n-1} \otimes \nu_{n-1})(\xi, B) \\
&\stackrel{\text{Satz A.2.6}}{=} \int_{SO(n)} h(DA^{-1}\Lambda(\theta)) d\nu_n(A) \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_{SO(n)} h(A^{-1}\Lambda(\theta)) d\nu_n(A) \\
&= \int_{SO(n-1)} \left( \int_{S^{n-1}} h(\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta)) d\mu_{n-1}(\xi) \right) d\nu_{n-1}(B). \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß das durch Formel (3.2) definierte Maß rotationsinvariant ist. Sei  $B_0 \in SO(n-1)$  beliebig, aber fest gewählt und  $V \subseteq SO(n-1)$  eine genügend kleine Umgebung von  $B_0$ . Sei ferner  $g \in C(S^{n-1})$ , so daß  $g(\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta)) = 0$ , falls  $B \notin V$ . Wir haben eben gezeigt, daß folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_V \left( \int_{S^{n-1}} g(\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta)) d\mu_{n-1}(\xi) \right) d\nu_{n-1}(B) \\
&= \int_V \left( \int_{S^{n-1}} g(D\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta)) d\mu_{n-1}(\xi) \right) d\nu_{n-1}(B).
\end{aligned}$$

Da  $g(\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta))$  gleichmäßig gegen  $g(\varphi(\xi, B_0)^{-1}\Lambda(\theta))$  für  $B$  gegen  $B_0$  konvergiert, gilt

$$\int_{S^{n-1}} g(\varphi(\xi, B_0)^{-1}\Lambda(\theta)) d\mu_{n-1}(\xi) = \int_{S^{n-1}} g(D\varphi(\xi, B_0)^{-1}\Lambda(\theta)) d\mu_{n-1}(\xi).$$

Wegen der Eindeutigkeit eines normierten rotationsinvarianten Maßes auf  $S^{n-1}$  folgt

$$\int_{S^{n-1}} g(\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta)) d\mu_{n-1}(\xi) = \int_{S^{n-1}} g(\xi) d\mu_{n-1}(\xi).$$

(b) Sei  $\Lambda(\theta) \in S^{n-1}$  beliebig, aber fest. Da  $\pi(\cdot)$  ein unitärer Operator ist (\*), gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{SO(n)} \|(\pi(R_{\Lambda(\theta)}^{-1} A R_{A^{-1}\Lambda(\theta)})) (f(A^{-1}\Lambda(\theta)))\|^2 d\nu_n(A) \\
& \stackrel{\text{Satz A.2.6}}{=} \int_{S^{n-1} \times SO(n-1)} \|(\pi(R_{\Lambda(\theta)}^{-1} \varphi(\xi, B) R_{\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta)})) (f(\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta)))\|^2 \\
& \quad d(\mu_{n-1} \otimes \nu_{n-1})(\xi, B) \\
& = \int_{SO(n-1)} \left( \int_{S^{n-1}} \|(\pi(R_{\Lambda(\theta)}^{-1} \varphi(\xi, B) R_{\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta)})) (f(\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta)))\|^2 d\mu_{n-1}(\xi) \right) \\
& \quad d\nu_{n-1}(B) \\
& \stackrel{(*)}{=} \int_{SO(n-1)} \left( \int_{S^{n-1}} \|f(\varphi(\xi, B)^{-1}\Lambda(\theta))\|^2 d\mu_{n-1}(\xi) \right) d\nu_{n-1}(B) \\
& \stackrel{\text{Teil (a)}}{=} \|f\|_2^2 \int_{SO(n-1)} 1 d\nu_{n-1}(B) \\
& = \text{vol}(SO(n-1)) \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

(c) Seien  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$  beliebig, aber fest. Ferner seien  $R_\xi$  und die Abbildung  $\omega$  wie in Bemerkung A.1.12 bzw. Lemma B.2 definiert. Setze  $u := te_n$ . In der folgenden Gleichung wird benutzt, daß  $R_{\Lambda(\omega^{-1}(y))}$  unitär ist. Dann gilt für  $y \in U(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$

$$\begin{aligned}
e^{i\langle u, R_{\Lambda(\omega^{-1}(y))}^{-1} \tilde{x} \rangle} &= e^{it\langle e_n, R_{\Lambda(\omega^{-1}(y))}^{-1} \tilde{x} \rangle} \\
&= e^{it\langle R_{\Lambda(\omega^{-1}(y))} e_n, \tilde{x} \rangle} \\
&\stackrel{\text{Lemma A.1.13}}{=} e^{it\langle \Lambda(\omega^{-1}(y)), \tilde{x} \rangle} \\
&= e^{it\langle y, x \rangle} \\
&= e^{i\langle ty, x \rangle}.
\end{aligned}$$

(d) Seien  $A \in SO(n)$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$  und  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  beliebig. Setze außerdem wieder  $u := te_n$ . Zum Beweis ist zu sagen, daß  $\theta$  in  $\omega^{-1}(y)$  transformiert werden darf, da  $\text{supp } \psi \subseteq \Omega$  gilt. Siehe außerdem Bemerkung B.3 zu den Integrationsräumen und Lemma B.2 zur Berechnung der Funktionaldeterminante der Abbildung  $\omega$ .

$$\begin{aligned}
T_\psi(f)(A, x) &= \langle \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A, x)) f, \psi \rangle \\
&= \int_{S^{n-1}} \langle \left( \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A, x)) f \right) (\Lambda(\theta)), \psi(\Lambda(\theta)) \rangle d\mu_{n-1}(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{S^{n-1}} e^{i\langle u, R_{\Lambda(\theta)}^{-1} \tilde{x} \rangle} \langle (\pi(R_{\Lambda(\theta)}^{-1}) AR_{A^{-1}\Lambda(\theta)}) (f(A^{-1}\Lambda(\theta))), \psi(\Lambda(\theta)) \rangle d\mu_{n-1}(\theta) \\
&\stackrel{\theta \mapsto \omega^{-1}(y)}{=} \int_{U(0,1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}} e^{i\langle u, R_{\Lambda(\omega^{-1}(y))}^{-1} \tilde{x} \rangle} \langle (\pi(R_{\Lambda(\omega^{-1}(y))}^{-1}) AR_{A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(y))}) (f(A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(y))))), \\
&\quad \psi(\Lambda(\omega^{-1}(y))) \rangle |\det J_{\omega^{-1}}(y)| dy \\
&\stackrel{\text{Teil (c)}}{=} \int_{U(0,1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}} e^{i\langle ty, x \rangle} \langle (\pi(R_{\Lambda(\omega^{-1}(y))}^{-1}) AR_{A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(y))}) (f(A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(y))))), \\
&\quad \psi(\Lambda(\omega^{-1}(y))) \rangle \frac{1}{|\det J_{\omega}(\omega^{-1}(y))|} dy \\
&\stackrel{y \mapsto \frac{1}{t}y}{=} \int_{tU(0,1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}} e^{i\langle y, x \rangle} \langle (\pi(R_{\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))}^{-1}) AR_{A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))}) (f(A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))))), \\
&\quad \psi(\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))) \rangle \frac{1}{|\det J_{\omega}(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))t^n|} dy \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Definiere  $g_A : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$g_A(y) = \begin{cases} \langle (\pi(R_{\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))}^{-1}) AR_{A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))}) (f(A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))))), \\ \quad \psi(\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))) \rangle \frac{1}{|\det J_{\omega}(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))t^n|} & , \text{ falls } y \in tU(0,1) \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Da  $\psi$  zulässig ist, gilt  $c_\psi < \infty$ . Damit gilt auch

$$\int_{tU(0,1)} \frac{\|\psi(\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t})))\|^2}{|\det J_{\omega}(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))t^n|^2} dy < \infty.$$

Bei der folgenden Abschätzung zum Beweis der Integrierbarkeit von  $g_A$  wird außerdem die Tatsache benutzt, daß  $\pi$  unitär und  $f$  quadrat-integrierbar ist.

$$\begin{aligned}
&\|g_A\|_1 \\
&\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \int_{tU(0,1)} \|(\pi(R_{\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))}^{-1}) AR_{A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))}) (f(A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))))\| \frac{\|\psi(\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t})))\|}{|\det J_{\omega}(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))t^n|} dy \\
&= \int_{tU(0,1)} \|f(A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t})))\| \frac{\|\psi(\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t})))\|}{|\det J_{\omega}(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))t^n|} dy \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \int_{tU(0,1)} \|f(A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t})))\|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{tU(0,1)} \frac{\|\psi(\Lambda(\omega^{-1}(\frac{y}{t})))\|^2}{|\det J_{\omega}(\omega^{-1}(\frac{y}{t}))t^n|^2} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Daraus folgt  $g_A \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$  und damit gilt

$$(3.3) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_A(y) e^{i\langle y, x \rangle} dy = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} g_A^\vee(x).$$

Jetzt können wir den eigentlichen Beweis führen:

$$\begin{aligned}
& \frac{(2\pi)^{n-1}}{|t^n|} \text{vol}(SO(n-1)) \|f\|_2^2 \int_{\Omega} \frac{\|\psi(\Lambda(\theta))\|^2}{\cos(\theta_{n-1})} \prod_{j=1}^{n-1} d\theta_j \\
\stackrel{\text{Teil (b)}}{=} & \frac{(2\pi)^{n-1}}{|t^n|} \int_{SO(n)} \left( \int_{SO(n)} \|(\pi(R_{\Lambda(\theta)}^{-1} A R_{A^{-1}\Lambda(\theta)}) (f(A^{-1}\Lambda(\theta))))\|^2 d\nu_n(A) \right) \\
& \frac{\|\psi(\Lambda(\theta))\|^2}{\cos(\theta_{n-1})} \prod_{j=1}^{n-1} d\theta_j \\
= & (2\pi)^{n-1} \int_{SO(n)} \left( \int_{S^{n-1}} \|\psi(\Lambda(\theta))\|^2 \|(\pi(R_{\Lambda(\theta)}^{-1} A R_{A^{-1}\Lambda(\theta)}) (f(A^{-1}\Lambda(\theta))))\|^2 \right. \\
& \left. \frac{1}{|\det J_\omega(\theta)t^n|} d\mu_{n-1}(\theta) \right) d\nu_n(A) \\
\stackrel{\theta \mapsto \omega^{-1}(\frac{x}{t})}{=} & (2\pi)^{n-1} \int_{SO(n)} \left( \int_{tU(0,1)} \left\| (\pi(R_{\Lambda(\omega^{-1}(\frac{x}{t}))}^{-1} A R_{A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(\frac{x}{t}))}) (f(A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(\frac{x}{t})))) \right\|^2 \right. \\
& \left. \|\psi(\Lambda(\omega^{-1}(\frac{x}{t})))\|^2 \frac{1}{|\det J_\omega(\omega^{-1}(\frac{x}{t}))t^n|^2} dx \right) d\nu_n(A) \\
\stackrel{(\diamond)}{\geq} & (2\pi)^{n-1} \int_{SO(n)} \left( \int_{tU(0,1)} \left| \langle (\pi(R_{\Lambda(\omega^{-1}(\frac{x}{t}))}^{-1} A R_{A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(\frac{x}{t}))}) (f(A^{-1}\Lambda(\omega^{-1}(\frac{x}{t})))) \right. \right. \\
& \left. \left. \psi(\Lambda(\omega^{-1}(\frac{x}{t}))) \rangle \frac{1}{|\det J_\omega(\omega^{-1}(\frac{x}{t}))t^n|} \right|^2 dx \right) d\nu_n(A) \\
= & (2\pi)^{n-1} \int_{SO(n)} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |g_A(x)|^2 dx \right) d\nu_n(A). \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Da  $\psi$  die Zulässigkeitsbedingung erfüllt, gilt (3.4)  $< \infty$ . Daraus folgt, daß  $g_A \in L^2(\mathbb{R}^n)$  für  $\nu_n$ -fast alle  $A \in SO(n)$  gilt. Somit kann im nächsten Schritt Plancherel angewandt werden.

$$(3.4) \stackrel{\text{Plancherel}}{=} \int_{SO(n)} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} g_A^\vee(x)|^2 dx \right) d\nu_n(A)$$



$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{Teil (d)}}{=} \int_{SO(n)} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\langle \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A, x)) f, \psi \rangle|^2 dx \right) d\nu_n(A) \\ & = \|T_\psi(f)\|^2. \end{aligned}$$

Falls  $\pi$  eine eindimensionale Darstellung auf  $\mathcal{H}_\pi$  ist, kann der Hilbertraum  $\mathcal{H}_\pi$  mit  $\mathbb{C}$  identifiziert werden. Also wird bei  $(\diamond)$  anstatt mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung mit „ $=$ “ weitergerechnet, da dann  $\psi$   $\mathbb{C}$ -wertig ist. Folglich ist in diesem Fall die Wavelet-Transformation isometrisch.  $\blacksquare$

Falls die Dimension von  $\pi$  echt größer als 1 ist, kann man keine Isometrie für alle  $n \in \mathbb{N}$  erwarten, wie das folgende Lemma zeigt.

### Bemerkung 3.3.2

Der erste Fall, bei dem die Dimension der Darstellung  $\pi$  der Stabilitätsgruppe größer als 1 ist, ist der Fall  $n = 4$ . Es existiert folgende irreduzible unitäre Darstellung der Stabilitätsgruppe  $SO(3)$ :

$$\pi : SO(3) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi), \quad (\pi(A))(f(x)) = f(xA).$$

Hierbei gilt

$$\mathcal{H}_\pi = \{f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist ein homogenes Polynom vom Grad } 1\}.$$

Dieser Hilbertraum hat die Dimension 3. (Die Konstruktion der Darstellung kann im Buch von Sugiura [Sug 90] nachgelesen werden.)

### Lemma 3.3.3

Zu jeder zulässigen Funktion  $\psi \in L^2(S^3, \mathcal{H}_\pi)$  existiert eine Funktion  $f \in L^2(S^3, \mathcal{H}_\pi)$ , so daß  $\|T_\psi(f)\|^2 < c_\psi \|f\|^2$  gilt, d.h. die Wavelet-Transformation ist nicht isometrisch.

### Beweis:

Wir definieren folgende 3 Funktionen aus  $L^2(S^3, \mathcal{H}_\pi)$ :

$$[f_i(\xi)](x) = x_i \quad \text{für alle } \xi \in S^3 \text{ und } x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

wobei  $1 \leq i \leq 3$  gilt. Wir setzen außerdem

$$(r_{A,\xi}^{(i,j)})_{1 \leq i,j \leq 3} := R_\xi^{-1} A R_{A^{-1}\xi}.$$

Sei  $\psi$  eine beliebige zulässige  $\mathcal{H}_\pi$ -wertige Funktion, d.h. es existieren komplexe Skalare  $a_\xi, b_\xi$  und  $c_\xi$  mit

$$[\psi(\xi)](x) = a_\xi x_1 + b_\xi x_2 + c_\xi x_3.$$

Wir nehmen an, es existiere keine Funktion  $f \in L^2(S^3, \mathcal{H}_\pi)$ , für die an der Stelle  $(\diamond)$  im Hauptteil des Beweises des Satzes 3.3.1 echt kleiner steht. Für alle  $1 \leq i \leq 3$  existiert also eine Nullmenge  $N_i \subseteq SO(4) \times S^3$  und Skalare  $\lambda_{A,\xi}^{(i)} \in \mathbb{C}$ , so daß

$$[f_i(A^{-1}\xi)](xR_\xi^{-1}AR_{A^{-1}\xi}) = \lambda_{A,\xi}^{(i)}[\psi(\xi)](x) \quad \text{für alle } (A, \xi) \notin N_i \text{ und } x \in \mathbb{R}^3 \quad (3.5)$$

gilt. Da alle Mengen  $N_i$  Nullmengen sind, ist auch  $N := N_1 \cup N_2 \cup N_3$  eine Nullmenge. Nach (3.5) gilt für alle  $(A, \xi) \notin N$  und  $x \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} r_{A,\xi}^{(1,1)}x_1 + r_{A,\xi}^{(2,1)}x_2 + r_{A,\xi}^{(3,1)}x_3 &= \lambda_{A,\xi}^{(1)}(a_\xi x_1 + b_\xi x_2 + c_\xi x_3) \\ r_{A,\xi}^{(1,2)}x_1 + r_{A,\xi}^{(2,2)}x_2 + r_{A,\xi}^{(3,2)}x_3 &= \lambda_{A,\xi}^{(2)}(a_\xi x_1 + b_\xi x_2 + c_\xi x_3) \\ r_{A,\xi}^{(1,3)}x_1 + r_{A,\xi}^{(2,3)}x_2 + r_{A,\xi}^{(3,3)}x_3 &= \lambda_{A,\xi}^{(3)}(a_\xi x_1 + b_\xi x_2 + c_\xi x_3). \end{aligned}$$

Da dieses Gleichungssystem für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  erfüllt ist, folgt für jedes  $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} r_{A,\xi}^{(1,i)} &= \lambda_{A,\xi}^{(i)}a_\xi \\ r_{A,\xi}^{(2,i)} &= \lambda_{A,\xi}^{(i)}b_\xi \\ r_{A,\xi}^{(3,i)} &= \lambda_{A,\xi}^{(i)}c_\xi. \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Punkt  $\xi$  aus  $S^3$  und  $E := E_4$  gilt

$$R_\xi^{-1}ER_{E^{-1}\xi} = E. \quad (3.6)$$

Damit und da  $h : (A, \xi) \rightarrow R_\xi^{-1}AR_{A^{-1}\xi}$  stetig ist, existiert eine Umgebung  $V \subseteq SO(4)$  von  $E$ , so daß für alle  $A \in V$ ,  $\xi \in S^3$  und  $1 \leq i, j \leq 3$  gilt

$$|r_{A,\xi}^{(i,j)} - r_{E,\xi}^{(i,j)}| < 1$$

$$\begin{aligned} \implies r_{A,\xi}^{(i,i)} &\neq 0 \\ \implies a_\xi, b_\xi, c_\xi &\neq 0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$r_{A,\xi}^{(1,i)}b_\xi = r_{A,\xi}^{(2,i)}a_\xi, \quad r_{A,\xi}^{(1,i)}c_\xi = r_{A,\xi}^{(3,i)}a_\xi \quad \text{und} \quad r_{A,\xi}^{(2,i)}c_\xi = r_{A,\xi}^{(3,i)}b_\xi. \quad (3.7)$$

Nach (3.6) gilt also  $r_{E,\xi}^{(3,3)} = 1$  für alle  $\xi \in S^3$ . Da  $h$  stetig ist, existiert eine Umgebung  $W_1 \subseteq SO(4)$  um  $E$  mit der Eigenschaft, daß

$$r_{A,\xi}^{(3,3)} \neq 0 \quad \text{für alle } (A, \xi) \in W_1 \times S^3$$

gilt. Mit Hilfe dieser Tatsache läßt sich jetzt aus (3.7)

$$r_{A,\xi}^{(1,1)}r_{A,\xi}^{(3,3)} = r_{A,\xi}^{(3,1)}r_{A,\xi}^{(1,3)} \quad \text{für alle } (A, \xi) \in (W_1 \times S^3) \setminus N \quad (3.8)$$

folgern. Für  $A_0 := E$  und ein beliebiges  $\xi_0 \in S^3$  gilt aber nach (3.6)

$$r_{A,\xi}^{(1,1)}r_{A,\xi}^{(3,3)} = 1 \neq 0 = r_{A,\xi}^{(3,1)}r_{A,\xi}^{(1,3)}.$$

Da  $h$  stetig ist, existiert eine Umgebung  $W_2 \subseteq SO(4)$  um  $E$ , für die

$$r_{A,\xi}^{(1,1)} r_{A,\xi}^{(3,3)} \neq r_{A,\xi}^{(3,1)} r_{A,\xi}^{(1,3)} \quad \text{für alle } (A, \xi) \in W_2 \times S^3$$

gilt. Dieses ist aber ein Widerspruch zu (3.8). Damit ist gezeigt, daß ein  $i \in \{1, 2, 3\}$  existiert, so daß für  $f_i$  die Wavelet-Transformation nicht isometrisch ist. ■

Falls  $\pi$  eindimensional ist, erhält man eine Rekursionsformel, da in diesem Fall die Wavelet-Transformation nach Satz 3.3.1 isometrisch ist.

**Satz 3.3.4**

Sei  $\pi$  eindimensional. Dann gilt für  $f \in L^2(S^{n-1})$

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_{SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1}} T_\psi(f)(A, x) \left( \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A, x))^{-1} \psi \right) dx d\nu_n(A).$$

**Beweis:**

Seien  $f, g \in L^2(S^{n-1})$  beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} c_\psi \langle g, f \rangle &= \langle \sqrt{c_\psi} g, \sqrt{c_\psi} f \rangle \\ &\stackrel{\text{Satz 3.3.1}}{=} \langle T_\psi(g), T_\psi(f) \rangle \\ &= \int_{SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1}} \overline{T_\psi(f)(A, x)} T_\psi(g)(A, x) dx d\nu_n(A) \\ &= \int_{SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1}} \overline{T_\psi(f)(A, x)} \langle g, \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A, x))^{-1} \psi \rangle dx d\nu_n(A) \\ &= \int_{SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1}} \langle g, T_\psi(f)(A, x) \left( \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A, x))^{-1} \psi \right) \rangle dx d\nu_n(A). \end{aligned}$$

$g \longrightarrow \langle g, f \rangle$  ist ein beschränktes, lineares Funktional. Also ist auch

$$g \longrightarrow \int_{SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1}} \langle g, T_\psi(f)(A, x) \left( \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A, x))^{-1} \psi \right) \rangle dx d\nu_n(A)$$

ein beschränktes, lineares Funktional. Nach dem Satz von Riesz existiert ein  $v \in L^2(S^{n-1})$  mit

$$\int_{SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1}} \langle g, T_\psi(f)(A, x) \left( \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A, x))^{-1} \psi \right) \rangle dx d\nu_n(A) = \langle g, v \rangle. \quad \blacksquare$$

# Kapitel 4

## Frames auf $S^{n-1}$

In diesem Kapitel werden Frames für Funktionen aus  $L^2(S^{n-1})$  konstruiert. Wir verwenden dazu aus den im vorherigen Kapitel gefundenen quadrat-integrierbaren unitären „Darstellungen“ von  $SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1}$  auf  $\mathcal{H}_\pi$ ,

$$\text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A, x)),$$

diejenigen, bei denen  $\pi$  eine eindimensionale Darstellung ist, da zur Konstruktion die Isometrie der Wavelet-Transformation benötigt wird. Ich werde in diesem Kapitel  $\pi \equiv 1$  wählen. Bei einer geschickten Wahl einer zulässigen Funktion  $\psi \in L^2(S^{n-1})$  und einer diskreten Menge  $((A_j, x_j))_{j \in J}$  aus  $G = SO(n) \times \mathbb{R}^{n-1}$  ist

$$\left( \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A_j, x_j))^{-1} \psi \right)_{j \in J}$$

ein Frame in dem Hilbertraum  $L^2(S^{n-1})$ . Ähnliche Ansätze sind in [HeWa 63] und [BeTa 94] zu finden.

### 4.1 Konstruktion von festen Frames

Mit der eben beschriebenen Vorgehensweise wird versucht, feste Frames für den Hilbertraum  $L^2(S^{n-1})$  zu konstruieren. Zuerst wird ein Lemma bewiesen, das im Beweis des Hauptsatzes Anwendung findet.

#### Lemma 4.1.1

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp} f \subseteq K(0, 1)$  und  $f^\vee \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt

$$f^\vee|_{\mathbb{Z}^n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n).$$

#### Beweis:

Aus der Voraussetzung  $f^\vee \in L^2(\mathbb{R}^n)$  folgt  $f^\vee \overline{f^\vee} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Mit der Bezeichnung  $f^*(x) := \overline{f(-x)}$  können wir deshalb

$$(f^\vee \overline{f^\vee})^\wedge = (f^\vee (f^*)^\vee)^\wedge = ((f * f^*)^\vee)^\wedge = f * f^* \quad (4.1)$$

schließen, wobei die letzte Gleichung nur fast überall (f.ü.) gilt. Die Beweise der Gleichungen

$$f_1^\wedge f_2^\wedge = (f_1 * f_2)^\wedge \quad \text{und} \quad f_1^\vee f_2^\vee = (f_1 * f_2)^\vee, \quad f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

sind in [Rei 68] zu finden.

$f * f^*$  hat kompakten Träger in  $K(0, 2)$ , da  $\text{supp} f \subseteq K(0, 1)$  gilt. Sei jetzt  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  beliebig mit  $V$  offen,  $K(0, 2) \subseteq V$  und  $\bar{V}$  kompakt. Da  $L^1(\mathbb{R}^n)$  regulär ist, existiert eine stetige Funktion  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\hat{u}|_{K(0, 2)} \equiv 1 \quad \text{und} \quad \hat{u}|_{\mathbb{R}^n \setminus V} \equiv 0.$$

Ferner kann  $u \in O(|x|^{-2})$  für  $|x| \rightarrow \infty$  gewählt werden, da  $\wedge : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  bijektiv ist, dabei sei  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  der *Schwartz-Raum* über  $\mathbb{R}^n$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} (f * f^*) \hat{u} &= f * f^* \\ \implies ((f * f^*)^\vee * u)^\wedge &= ((f * f^*)^\vee)^\wedge \stackrel{\text{f.ü.}}{=} f * f^* \stackrel{\text{f.ü.}}{=} ((f * f^*)^\vee)^\wedge \\ \implies (f * f^*)^\vee * u &\stackrel{\text{f.ü.}}{=} (f * f^*)^\vee \\ \stackrel{(4.1)}{\implies} \underbrace{(f^\vee \overline{f^\vee}) * u}_{\text{stetig}} &\stackrel{\text{f.ü.}}{=} \underbrace{(f^\vee \overline{f^\vee})}_{\text{stetig}} \\ \implies (f^\vee \overline{f^\vee}) * u &= (f^\vee \overline{f^\vee}) \\ \implies f^\vee \overline{f^\vee}(m) &= \int_{\mathbb{R}^n} f^\vee \overline{f^\vee}(x) u(m - x) dx \\ \implies |f^\vee(m)|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f^\vee(x)|^2 |u(m - x)| dx \\ \implies \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |f^\vee(m)|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f^\vee(x)|^2 \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |u(m - x)| \right) dx \end{aligned}$$

Zerlege  $x = l + t$  mit  $l \in \mathbb{Z}^n$  und  $t \in [0, 1]^n$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |u(m - x)| &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |u(m - l - t)| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |u(k - t)| \\ &\leq \max_{t \in [0, 1]^n} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |u(k - t)| \right) \end{aligned}$$

Es folgt insgesamt

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |f^\vee(m)|^2 \leq \max_{t \in [0, 1]^n} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |u(k - t)| \right) \int_{\mathbb{R}^n} |f^\vee(x)|^2 dx.$$

D.h.  $f^\vee \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ . ■

Zunächst wird im folgenden Satz die Konstruktion eines festen Frames vorgestellt.

**Satz 4.1.2**

Wähle  $\psi \in L^2(S^{n-1})$  und  $(A_j)_{j \in J} \subseteq SO(n)$ ,  $|J| < \infty$ , mit

- (i)  $\text{supp } \psi \subseteq \Omega$ ,
- (ii)  $\psi$  muß die Zulässigkeitsbedingung aus Satz 3.3.1 erfüllen, d.h.

$$0 \neq (2\pi)^{n-1} \text{vol}(SO(n-1)) \int_{\Omega} \frac{|\psi(\Lambda(\theta))|^2}{\cos(\theta_{n-1})} \prod_{j=1}^{n-1} d\theta_j < \infty,$$

- (iii) es muß

$$g_{A_j} \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{für alle } f \in L^2(S^{n-1}) \text{ und } j \in J$$

gelten, wobei  $g_{A_j}$  wie im Beweis von Satz 3.3.1 definiert ist, und

- (iv) es existiert ein  $\psi_1 : \Lambda(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  und  $B > 0$  mit

- (a)

$$\psi(\Lambda(\theta)) = \psi_1(\Lambda(\theta)) \sqrt{\det J_{\omega}(\theta)} \quad \text{für alle } \theta \in \Omega$$

und

- (b)

$$\sum_{j \in J} |\psi_1(A_j \Lambda(\theta))|^2 = B \quad \text{für alle } \theta \in \Omega.$$

Dann ist  $\left\{ \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A_j, m))^{-1} \psi : j \in J \text{ und } m \in \mathbb{Z}^{n-1} \right\}$  ein fester Frame für  $L^2(S^{n-1})$ .

**Beweis:**

Sei  $f \in L^2(S^{n-1})$  beliebig. Nach dem Beweis von Satz 3.3.1 gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in J} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n-1}} |\langle f, \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A_j, m))^{-1} \psi \rangle|^2 \\ &= (2\pi)^{n-1} \sum_{j \in J} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n-1}} |g_{A_j}^{\vee}(m)|^2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

wobei

$$g_{A_j}(x) = \begin{cases} \overline{\psi(\Lambda(\omega^{-1}(x)))} f(A_j^{-1} \Lambda(\omega^{-1}(x))) \frac{1}{|\det J_{\omega}(\omega^{-1}(x))|} & , \text{ falls } x \in U(0, 1) \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Es gilt  $g_{A_j} \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ . Mit Hilfe der Plancherel-Identität folgt

$$\begin{aligned} (4.2) &= (2\pi)^{n-1} \sum_{j \in J} \|g_{A_j}^{\vee} | \mathbb{Z}^{n-1} \|_{l^2(\mathbb{Z}^{n-1}) = l^2(\widehat{\mathbb{T}^{n-1}})}^2 \\ &= (2\pi)^{n-1} \sum_{j \in J} \| (g_{A_j}^{\vee} | \mathbb{Z}^{n-1})^{\wedge} \|_{L^2(\mathbb{T}^{n-1})}^2 \\ &= (2\pi)^{n-1} \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} |(g_{A_j}^{\vee} | \mathbb{Z}^{n-1})^{\wedge}(\dot{x})|^2 d\dot{x}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Da  $g_{A_j} \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ ,  $\text{supp } g_{A_j} \subseteq K(0, 1)$  und  $g_{A_j}^\vee \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ , weil  $g_{A_j} \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$  nach Voraussetzung, folgt  $g_{A_j}^\vee|_{\mathbb{Z}^{n-1}} \in l^2(\mathbb{Z}^{n-1})$  mit Lemma 4.1.1. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} & (g_{A_j}^\vee|_{\mathbb{Z}^{n-1}})^\wedge(\dot{x}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{A_j}(y) e^{i\langle y, m \rangle} dy \right) e^{-i\langle x, m \rangle}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Mit  $I^{n-1} := [-\pi, \pi]^{n-1}$  gilt wegen  $\text{supp } g_{A_j} \subseteq U(0, 1) \subseteq I^{n-1}$

$$\begin{aligned} (4.4) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n-1}} \left( \int_{I^{n-1}} g_{A_j}(y) e^{i\langle y, m \rangle} dy \right) e^{-i\langle x, m \rangle} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n-1}} \left( (2\pi)^{n-1} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \dot{g}_{A_j}(\dot{y}) e^{i\langle y, m \rangle} d\dot{y} \right) e^{-i\langle x, m \rangle}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei  $\dot{g}_{A_j}(\dot{y}) = g_{A_j} \circ q^{-1}(\dot{y})$ ,  $q$  der Borelisomorphismus  $[0, 1]^{n-1} \ni x \mapsto \dot{x} \in \mathbb{T}^{n-1}$  und

$$\int_{\mathbb{T}^{n-1}} \dot{f}(\dot{x}) d\dot{x} = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{I^{n-1}} f(x) dx \quad \text{für alle } f \in L^p(\mathbb{T}^{n-1}), p \in [1, \infty], f = \dot{f} \circ q$$

das normierte Haarmaß auf  $\mathbb{T}^{n-1}$  ist (siehe dazu [Schem 80]). Aufgrund der Umkehrformel gilt

$$(4.5) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \dot{g}_{A_j}(\dot{x}).$$

Damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} (4.3) &= (2\pi)^{n-1} \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} |(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \dot{g}_{A_j}(\dot{x})|^2 d\dot{x} \\ &= (2\pi)^{2(n-1)} \sum_{j \in J} \left( \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{I^{n-1}} |g_{A_j}(x)|^2 dx \right) \\ &\stackrel{\text{supp } g_{A_j} \subseteq I^{n-1}}{=} (2\pi)^{n-1} \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |g_{A_j}(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nach der Transformation  $x \mapsto \omega(\theta)$  gilt analog zum Beweis von Satz 3.3.1

$$(4.6) = (2\pi)^{n-1} \sum_{j \in J} \int_{S^{n-1}} |\psi(\Lambda(\theta))|^2 |f(A_j^{-1}\Lambda(\theta))|^2 \frac{1}{|\det J(\omega(\theta))|} d\mu_{n-1}(\theta).$$

Nach Wahl von  $\psi$  und wegen der Rotationsinvarianz des Maßes  $\mu_{n-1}$  gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in J} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n-1}} |\langle f, \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A_j, m))^{-1} \psi \rangle|^2 \\
&= (2\pi)^{n-1} \sum_{j \in J} \int_{S^{n-1}} |\psi_1(\Lambda(\theta))|^2 |f(A_j^{-1} \Lambda(\theta))|^2 d\mu_{n-1}(\theta). \\
&= (2\pi)^{n-1} \sum_{j \in J} \int_{S^{n-1}} |\psi_1(A_j \Lambda(\theta))|^2 |f(\Lambda(\theta))|^2 d\mu_{n-1}(\theta) \\
&= (2\pi)^{n-1} \int_{S^{n-1}} \left( \sum_{j \in J} |\psi_1(A_j \Lambda(\theta))|^2 \right) |f(\Lambda(\theta))|^2 d\mu_{n-1}(\theta) \\
&= (2\pi)^{n-1} B \int_{S^{n-1}} |f(\Lambda(\theta))|^2 d\mu_{n-1}(\theta) \\
&= (2\pi)^{n-1} B \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

■

## 4.2 Konstruktion von allgemeineren Frames

In diesem Abschnitt wird ein Frame konstruiert, der zwar kein fester Frame ist, dafür aber mehr Variationsmöglichkeiten in der Wahl von  $\psi$  und  $(A_j)_{j \in J}$  erlaubt. Ein ähnlicher Ansatz ist in [BeTa 94] zu finden.

### Satz 4.2.1

Wähle  $\psi \in L^2(S^{n-1})$  und  $(A_j)_{j \in J} \subseteq SO(n)$ ,  $|J| < \infty$ , mit (i), (ii), (iii) und (iv)(a) aus Satz 4.1.2. Seien außerdem  $F \subseteq S^{n-1}$  kompakt und  $D \subseteq S^{n-1}$  kompakt mit den folgenden Eigenschaften:

(i)  $S^{n-1} = \bigcup_{j \in J} A_j^{-1} F$ ,

(ii)  $F \subseteq D^\circ$

(iii) und für  $\psi_1$  gelte

(a)  $\text{supp} \psi_1 \subseteq D$ ,

(b)  $a := \inf\{|\psi_1(\xi)| : \xi \in F\} > 0$ ,

(c)  $b := \sup\{|\psi_1(\xi)| : \xi \in D\} < \infty$ .

Definiere  $M := \sup_{j \in J} \#\{i \in J : A_i^{-1} D \cap A_j^{-1} D \neq \emptyset\}$ . (Es gilt  $M < \infty$  wegen  $|J| < \infty$ .)

Dann ist  $\left\{ \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A_j, m))^{-1} \psi : j \in J \text{ und } m \in \mathbb{Z}^{n-1} \right\}$  ein Frame für  $L^2(S^{n-1})$  mit den Schranken  $(2\pi)^{n-1} a^2$  und  $(2\pi)^{n-1} b^2 M$ .



**Beweis:**

Sei  $f \in L^2(S^{n-1})$  beliebig. Nach dem Beweis von Satz 4.1.2 gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in J} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n-1}} |\langle f, \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A_j, m))^{-1} \psi \rangle|^2 \\ &= (2\pi)^{n-1} \int_{S^{n-1}} \left( \sum_{j \in J} |\psi_1(A_j \Lambda(\theta))|^2 \right) |f(\Lambda(\theta))|^2 d\mu_{n-1}(\theta). \end{aligned}$$

Wir schätzen nun nach oben und unten ab. Sei dazu  $\Lambda(\theta) \in S^{n-1}$  beliebig gewählt.

(a) Dann existiert ein  $j \in J$  mit

$$\Lambda(\theta) \in A_j^{-1}F.$$

Daraus folgt

$$A_j \Lambda(\theta) \in F.$$

Nach Definition von  $a$  gilt also

$$|\psi_1(A_j \Lambda(\theta))|^2 \geq a^2.$$

(b) Es gilt

$$\psi_1(A_j \Lambda(\theta)) \neq 0 \implies A_j \Lambda(\theta) \in D \implies \Lambda(\theta) \in A_j^{-1}D.$$

Nach Definition von  $M$  gibt es höchstens  $M$  Werte für  $j \in J$ , für die

$$\Lambda(\theta) \in A_j^{-1}D$$

gilt. Daraus folgt

$$|\psi_1(A_j \Lambda(\theta))|^2 \leq b^2 M.$$

Damit gilt allgemein

$$(2\pi)^{n-1} a^2 \|f\|_2^2 \leq \sum_{j \in J} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n-1}} |\langle f, \text{ind}_{SO(n-1) \times \mathbb{R}^n}^{SO(n) \times \mathbb{R}^n} \sigma(c(A_j, m))^{-1} \psi \rangle|^2 \leq (2\pi)^{n-1} b^2 M \|f\|_2^2.$$

■

### 4.3 Beispiele

Zuerst möchte ich Beispiele für die Wahl des Wavelets  $\psi$  und der diskreten Teilmenge der  $SO(n)$  zur Konstruktion von festen und allgemeineren Frames für  $L^2(S^{n-1})$  mit Hilfe der Sätze 4.1.2 und 4.2.1 geben. Dazu zunächst eine Bemerkung zur Zulässigkeitsbedingung.

**Lemma 4.3.1**

Falls  $\psi_1 \in L^2(S^{n-1})$  und  $\text{supp } \psi_1 \subseteq \Omega$  gilt, erfüllt  $\psi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\psi(\Lambda(\theta)) = \psi_1(\Lambda(\theta)) \sqrt{\det J_\omega(\theta)}$$

die Zulässigkeitsbedingung.

**Beweis:**

Mit der Wahl von  $\psi$  gilt

$$\begin{aligned}
& (2\pi)^{n-1} \text{vol}(SO(n-1)) \int_{\Omega} \frac{|\psi(\Lambda(\theta))|^2}{\cos(\theta_{n-1})} \prod_{j=1}^{n-1} d\theta_j \\
&= (2\pi)^{n-1} \text{vol}(SO(n-1)) \int_{\Omega} \frac{|\psi_1(\Lambda(\theta)) \sqrt{\prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1}(\theta_j) \cos(\theta_{n-1})}|^2}{\cos(\theta_{n-1})} \prod_{j=1}^{n-1} d\theta_j \\
&= (2\pi)^{n-1} \text{vol}(SO(n-1)) \int_{\Omega} |\psi_1(\Lambda(\theta))|^2 \prod_{j=1}^{n-1} |\sin^{j-1}(\theta_j)| \prod_{j=1}^{n-1} d\theta_j \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

da  $\psi_1 \in L^2(S^{n-1})$  und  $\prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1}(\theta_j)$  stetig ist. ■

D.h in Bezug auf die Zulässigkeitsbedingung kann  $\psi_1$  relativ frei gewählt werden. Auch die Voraussetzung (iii) aus Satz 4.1.2 ist bei geeigneter Wahl von  $\psi_1$  ebenfalls sofort erfüllt, wie das nächste Lemma zeigt.

**Lemma 4.3.2**

Falls  $\psi_1 \in C(S^{n-1})$  und  $\psi(\Lambda(\cdot)) = \psi_1(\Lambda(\cdot)) \sqrt{\det J_{\omega}(\cdot)}$  zulässig ist, d.h.  $\psi$  erfüllt die Zulässigkeitsbedingung und  $\text{supp } \psi \subseteq \Omega$ , gilt

$$g_A \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{für alle } A \in SO(n),$$

wobei  $g_A$  wie in Satz 3.3.1 definiert ist.

**Beweis:**

Da  $\psi$  stetig ist und der Träger kompakt ist, existiert ein  $M > 0$  mit

$$|\psi_1(\Lambda(\theta))| < M \quad \text{für alle } \theta \in \Omega.$$

Damit gilt analog zum Beweis von Satz 3.3.1 mit der Transformation  $x \mapsto \omega(\theta)$  für ein beliebiges  $f \in L^2(S^{n-1})$  und  $A \in SO(n)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |g_A(x)|^2 dx &= \int_{S^{n-1}} |\psi(\Lambda(\theta))|^2 |f(A^{-1}\Lambda(\theta))|^2 \frac{1}{|\det J(\omega(\theta))|} d\mu_{n-1}(\theta) \\
&= \int_{S^{n-1}} |\psi_1(\Lambda(\theta))|^2 |f(A^{-1}\Lambda(\theta))|^2 d\mu_{n-1}(\theta) \\
&\leq M^2 \int_{S^{n-1}} |f(A^{-1}\Lambda(\theta))|^2 d\mu_{n-1}(\theta) \\
&= M^2 \|f\|_2^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$
■

Zuerst werden Beispiele für die Wahl von  $\psi_1$  angegeben, um feste Frames zu erhalten. Nach dem obigen Lemma 4.3.1 ist also in erster Linie darauf zu achten, daß die Bedingung (iv)(b) aus Satz 4.1.2 eingehalten wird.

### Beispiele 4.3.3

Definiere  $\psi_1$  durch

$$\psi_1(\Lambda(\theta)) = \cos(k\theta_1)\chi_\Omega(\theta) \quad \text{für alle } \Lambda(\theta) \in S^{n-1} \text{ und } k \in \mathbb{N} \text{ ungerade,}$$

$\psi$  wie in Satz 4.1.2 und  $(A_j)_{j \in J} \subseteq SO(n)$  durch

$$A_j = R_1\left((j-1)\frac{\pi}{2k}\right) \quad \text{mit } J = \{1, \dots, 4k\}.$$

Dann ist die Zulässigkeitsbedingung nach Lemma 4.3.1 erfüllt, da  $\psi_1 \in L^2(S^{n-1})$ . Die Bedingungen (i) und (iv)(a) aus Satz 4.1.2 sind trivialerweise nach Definition erfüllt. Für die Bedingung (iv)(b) gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in J} |\psi_1(A_j \Lambda(\theta))|^2 \\ &= \sum_{j \in J} |\psi_1(\Lambda((\theta_1 + (j-1)\frac{\pi}{2k}, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})))|^2 \\ &= \sum_{j \in J} |\cos(k(\theta_1 + (j-1)\frac{\pi}{2k})) \chi_\Omega((\theta_1 + (j-1)\frac{\pi}{2k}, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}))|^2 \\ &= \begin{cases} k, & \text{falls } n = 1, \\ 2k, & \text{falls } n > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Da  $\psi_1$  stetig ist, gilt auch Bedingung (iii) nach Lemma 4.3.2. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 4.1.2 erfüllt und wir erhalten einen festen Frame.

Definieren wir für gerades  $k \in \mathbb{N}$

$$\psi_1(\Lambda(\theta)) = \cos(k(\theta_1 - \frac{\pi}{2k}))\chi_\Omega(\theta) \quad \text{für alle } \Lambda(\theta) \in S^{n-1}$$

und  $(A_j)_{j \in J}$  analog der Definition für ungerades  $k$ , so erhalten wir für die Bedingung (iv)(b)

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in J} |\psi_1(A_j \Lambda(\theta))|^2 \\ &= \sum_{j \in J} |\psi_1(\Lambda((\theta_1 + (j-1)\frac{\pi}{2k}, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})))|^2 \\ &= \sum_{j \in J} |\cos(k(\theta_1 + (j-1)\frac{\pi}{2k} - \frac{\pi}{2k})) \chi_\Omega((\theta_1 + (j-1)\frac{\pi}{2k}, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}))|^2 \\ &= \begin{cases} k, & \text{falls } n = 1, \\ 2k, & \text{falls } n > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

So erhalten wir in diesem Fall ebenfalls einen festen Frame.

Als nächstes werden Beispiele für die Wahl von  $\psi_1$ ,  $(A_j)_{j \in J}$ ,  $F$  und  $D$  zur Konstruktion eines allgemeinen Frames nach Satz 4.2.1 gegeben. Ich möchte mich dabei auf  $n = 3$  beschränken, da die anderen Fälle nicht praxisrelevant sind.

#### Beispiele 4.3.4

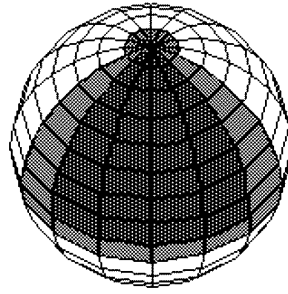
Definiere  $F$  und  $D$  durch

$$F = \{\Lambda(\theta) : \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

und

$$D = \{\Lambda(\theta) : \theta \in (([0, \frac{\pi}{2} + \epsilon] \cup [2\pi - \epsilon, 2\pi]) \times [0, \frac{\pi}{2} + \epsilon]) \cup ([0, 2\pi] \times [0, \epsilon])\}$$

für ein beliebiges  $\epsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Damit ist  $F \subseteq D^\circ$  erfüllt. Die Lage der kompakten Mengen zeigt Abbildung 4.1.



$$F : \blacksquare$$

$$D : \blacksquare \cup \square$$

Abbildung 4.1: Lage der gewählten Mengen  $F$  und  $D$  für  $\epsilon = \frac{\pi}{8}$

Zu der folgenden Definition von  $(A_j)_{j \in J}$  siehe auch die Zerlegung von  $SO(n)$  in Satz A.1.7. Mit

$$J = \{1, \dots, 8\}$$

und

$$A_j = \begin{cases} R_1(0)R_2(0)R_1((j-1)\frac{\pi}{2}) & , \quad \text{falls } j < 5 \\ R_1((j-5)\frac{\pi}{2})R_2(\frac{\pi}{2})R_1(0) & , \quad \text{falls } j \geq 5 \end{cases}$$

ist auch die Bedingung (i) aus Satz 4.2.1 erfüllt. Die noch zu wählende Funktion  $\psi_1$  muß jetzt nur noch die Bedingungen

- (i)  $\text{supp}\psi_1 \subseteq D \cap \Omega$ ,
- (ii)  $a := \inf\{|\psi_1(\xi)| : \xi \in F\} > 0$  und
- (iii)  $b := \sup\{|\psi_1(\xi)| : \xi \in D\} < \infty$

und die Voraussetzungen (ii) und (iii) aus Satz 4.1.2 erfüllen. Wähle  $\psi_1$  z.B. folgendermaßen:

$$\psi_1(\Lambda(\theta)) = \begin{cases} \cos(\|(\theta_1, \theta_2) - (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\|) & , \quad \text{falls } \theta \in F, \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt sicher (a). Die geforderten Voraussetzungen aus Satz 4.1.2 sind mit den Lemmata 4.3.1 und 4.3.2 erfüllt. Der Wert  $M$  ist 7, wie aus der Zeichnung ersichtlich, und für die Werte  $a$  und  $b$  gilt

$$a = \psi_1(\Lambda(0, 0)) = \cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)$$

und

$$b = \psi_1\left(\Lambda\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1.$$

Also erhalten wir mit Satz 4.2.1 einen Frame mit den Schranken  $(2\pi)^2(\cos(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}))^2$  und  $(2\pi)^27$ .

## Kapitel 5

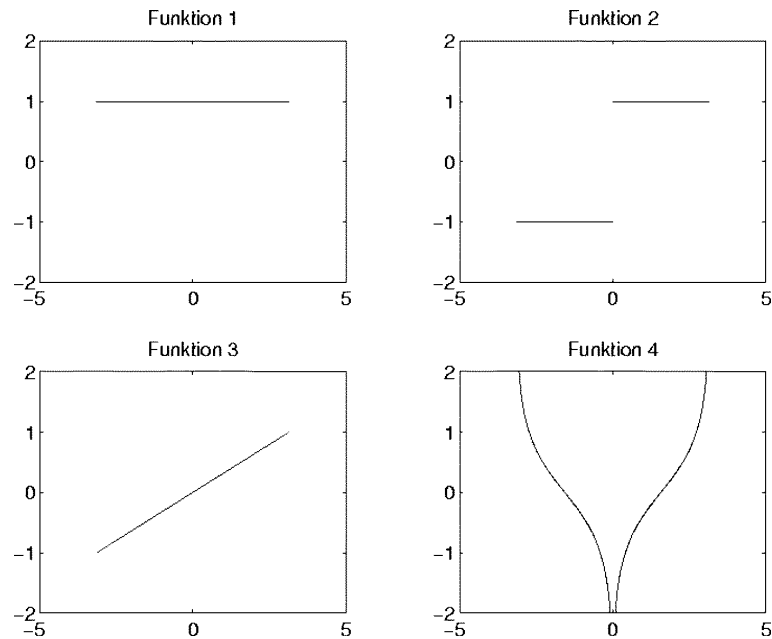
# Algorithmen zur Wavelet-Transformation auf der $S^1$

Im folgenden wird die Effizienz von Wavelet-Algorithmen verglichen, die aus praktisch und theoretisch orientierten Ansätzen stammen. Als Beispiel für einen theoretisch orientierten Ansatz soll im zweiten Abschnitt der aus den in Satz 4.1.2 konstruierten Frames abgeleitete Rekonstruktionsalgorithmus bewertet werden. Ich möchte ihn mit einem praktisch orientierten Ansatz vergleichen, d.h. einem Ansatz, der zur Konstruktion keine Darstellungen, sondern das Konzept der Multi-Skalen-Analyse benutzt. Als Beispiel dafür habe ich die bekannteste Arbeit mit diesem Ansatz für Funktionen auf der  $S^1$  [ChMha 93] gewählt, die von C.K. Chui und H.N. Mhaskar stammt, und in der Wavelets basierend auf trigonometrischen Funktionen für Funktionen auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  entwickelt werden. Dieser Ansatz wird im folgenden Abschnitt vorgestellt. Im Abschnitt über theoretisch orientierte Ansätze werden außer dem durch Frames gewonnenen Algorithmus die in Kapitel 3 konstruierten stetigen Wavelet-Transformationen betrachtet.

Der Anschaulichkeit halber werden alle Funktionen auf der  $S^1$  als Funktionen der sphärischen Koordinaten dargestellt, d.h. als Funktionen auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$ . Man kann diese Funktionen auch als periodische Funktionen mit der Periode  $2\pi$  interpretieren. Um die Algorithmen zu testen, werden die folgenden vier Funktionen betrachtet:

$$\begin{aligned} f^{[1]}(x) &= 1, \\ f^{[2]}(x) &= \frac{1}{\pi}x, \\ f^{[3]}(x) &= \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 1, & \text{falls } x \geq 0, \end{cases} \\ f^{[4]}(x) &= \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \ln \left( \left| \cot \left( \frac{x}{2} \right) \right| \right) & \text{falls } x \notin \{-\pi, 0\}, \\ \text{n.def.} & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei  $x \in [-\pi, \pi)$ . Die Funktion  $f^{[1]}$  wurde gewählt, da die aus der stetigen Wavelet-Transformation konstruierten Algorithmen für alle anderen Funktionen zu rechenintensiv sind. An den Funktionen  $f^{[2]}$  und  $f^{[3]}$  kann man, wie zu sehen sein wird, sehr gut die Approximation an Unstetigkeitsstellen erkennen. Diese Stellen entscheiden oft über die Güte eines Approximationsalgorithmus.  $f^{[4]}$  ist eine wellenartige Funktion mit Polstellen. Die folgende Graphik (Abbildung 5.1) zeigt den Verlauf der Funktionen:

Abbildung 5.1: Graphen der Funktionen  $f^{[1]}, \dots, f^{[4]}$ 

## 5.1 Praktisch orientierter Ansatz

In diesem Abschnitt sollen die Algorithmen aus der eingangs erwähnten Arbeit von Chui und Mhaskar [ChMha 93] als Beispiel für einen praktisch orientierten Ansatz untersucht werden. Dazu möchte ich zuerst den Algorithmus und die ihm zugrundeliegenden Definitionen vorstellen. Im darauffolgenden Abschnitt werde ich die Laufzeit und die Approximationsgenauigkeit analysieren.

### 5.1.1 Der Algorithmus

Chui und Mhaskar bedienen sich bei ihrer Entwicklung von Wavelets des Konzepts der Multi-Skalen-Analyse, das von Mallat [Mal 89] eingeführt wurde. Hierdurch werden schnelle Algorithmen zur Analyse bereitgestellt, ohne die die Wavelet-Transformation, trotz ihrer Vorteile in Hinsicht auf die Signaltheorie, keine ernsthafte Konkurrenz zur Fourier-Transformation darstellen könnte.

Die klassische allgemeinste Definition ist die folgende:

#### Definition 5.1.1

Eine *Multi-Skalen-Analyse* auf  $\mathbb{R}$  besteht aus einer aufsteigenden Folge abgeschlossener Unterräume  $V_j \subseteq L^2(\mathbb{R})$

$$\dots \subseteq V_{j-1} \subseteq V_j \subseteq V_{j+1} \dots,$$

so daß gilt

$$(i) \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}),$$

$$(ii) \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\},$$

$$(iii) \quad f \in V_0 \implies f(\cdot - k) \in V_0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$(iv) \quad f \in V_j \implies f(2\cdot) \in V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

und eine Funktion  $\varphi \in V_0$  existiert, so daß die Folge  $\varphi(x-k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , eine *Riesz-Basis* des Raumes  $V_0$  bildet. D.h. es existieren Konstanten  $0 < C < C'$ , so daß für jede Folge  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$  gilt

$$C \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x-k) \right\| \leq C' \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Räume  $V_j$  nennt man *Absträume*. Die sogenannten *Wavelet-Räume*  $W_j$  werden als orthogonales Komplement von  $V_j$  in  $V_{j+1}$  definiert, d.h.

$$V_{j+1} =: V_j \oplus W_j.$$

Damit gilt sofort die folgende Zerlegung des  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j.$$

Hat man eine Funktion  $f_{j+1} \in V_{j+1}$  gegeben und zerlegt sie in  $f_{j+1} = f_j + g_j$ ,  $f_j \in V_j$ ,  $g_j \in W_j$ , so repräsentiert  $f_j$  den niederfrequenten, „glatten“ Anteil von  $f$  und  $g_j$  den höherfrequenten Anteil.

Für Funktionen auf einem Intervall bzw. für periodische Funktionen können nicht alle Eigenschaften dieser allgemeinen Definition eingehalten werden; z.B. Eigenschaft (iii) ist für solche Funktionen nicht sinnvoll. Deshalb haben Chui und Mhaskar diese Eigenschaften für den zu analysierenden Raum  $L^2(S^1)$  auf die Inklusionseigenschaft, (i), (ii) und (iv) reduziert. Statt die Existenz einer Funktion zu zeigen, deren Translate eine Riesz-Basis bilden, wird hier nur eine von  $n$  abhängige Funktion konstruiert, deren Translate unter Berücksichtigung der Periodizität eine Basis von  $V_n$  bilden.

In der Arbeit von C.K. Chui und H.N. Mhaskar [ChMha 93] wird aus denjenigen Grundfunktionen, die auch bei der Fourier-Transformation benutzt werden, eine Multi-Skalen-Analyse konstruiert. Die Räume  $V_n$  und  $W_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , werden aus Sinus- und Cosinus-Funktionen erzeugt:

$$\begin{aligned} V_n &= \text{span}\{1, \cos(x), \dots, \cos((2^n - 1)x), \sin(x), \dots, \sin(2^n x)\}, \\ W_n &= \text{span}\{\cos(2^n x), \dots, \cos((2^{n+1} - 1)x), \sin((2^n + 1)x), \dots, \sin(2^{n+1} x)\}. \end{aligned}$$

Man sieht hier gut, daß die Räume  $V_n$  die niederfrequenten und die Räume  $W_n$  die höherfrequenten Anteile enthalten. Somit lassen sich gezielt niedere oder höhere Frequenzen aus Funktionen herausfiltern. Außerdem lassen sich Unstetigkeitsstellen der zu analysierenden Funktion mit Hilfe der Wavelet-Anteile ( $g_j$ ) finden, da die Wavelets gerade auf hohe Frequenzen ansprechen und



an Unstetigkeitsstellen die Frequenzen am höchsten sind. Die Skalenfunktionen  $\varphi_{n,j}$  und die Wavelets  $\psi_{n,j}$ , die eine Basis des Raumes  $V_n$  bzw.  $W_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , bilden, werden folgendermaßen konstruiert:

$$D_m(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \cos(kx) + \frac{1}{2} \cos(mx), \quad m \in \mathbb{N},$$

$$x_{n,j} := \frac{2\pi j}{2^{n+1}}, \quad j = 0, \dots, 2^{n+1} - 1,$$

$$\Phi_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{x_{n,1}} D_{2^n}(x-t) dt,$$

$$\Psi_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{x_{n+1,1}} D_{2^{n+1}}(x-t) - D_{2^n}(x-t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{x_{n+1,1}}^{x_{n,1}} D_{2^{n+1}}(x-t) - D_{2^n}(x-t) dt.$$

Die Funktionen  $\varphi_{n,j}$  und  $\psi_{n,j}$  werden als Translate von  $\Phi_n$  und  $\Psi_n$  definiert:

$$\begin{aligned} \varphi_{n,j}(x) &:= \Phi_n(x - x_{n,j}), \\ \psi_{n,j}(x) &:= \Psi_n(x - x_{n,j}), \quad j = 0, \dots, 2^{n+1} - 1, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Man sagt,  $\varphi_{n,j}$  und  $\psi_{n,j}$  sind Funktionen der *Skala*  $n$ . Die  $\varphi_{n,j}$  bzw.  $\psi_{n,j}$  bilden eine Basis von  $V_n$  bzw.  $W_n$ . Die Wirkung der Parameter  $n$  und  $j$  ist in den Abbildungen 5.2 und 5.3 ersichtlich.

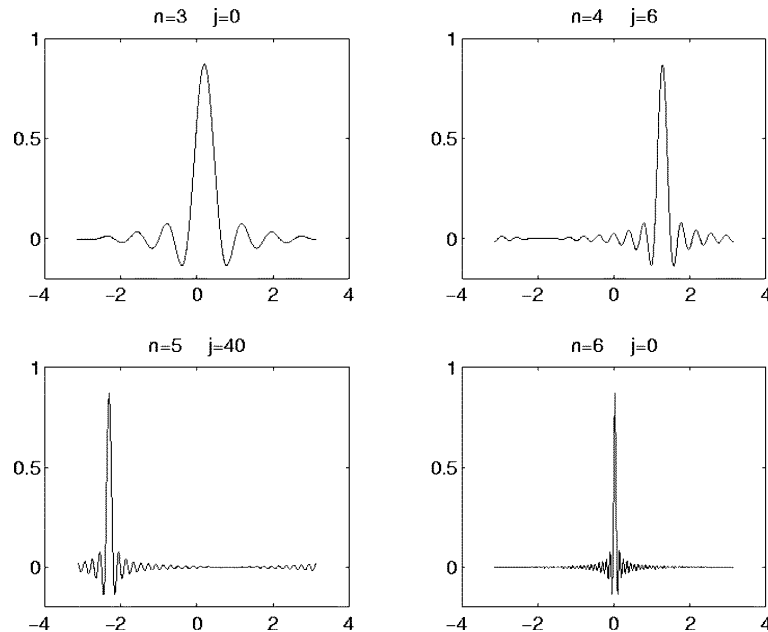


Abbildung 5.2: Die Skalenfunktion  $\varphi_{n,j}$  für unterschiedliche  $n$  und  $j$

Der Parameter  $n$  steuert die Genauigkeit der Analyse bzw. Approximation, und  $j$  ist der Translationsparameter, mit Hilfe dessen die lokalen Eigenschaften der betrachteten Funktion bei der Analyse eingehen.

Man erkennt gut die Lokalitätseigenschaft der Skalenfunktion  $\varphi_{n,j}$  im Gegensatz zu den  $2\pi$ -periodischen Grundfunktionen der Fourier-Transformation, die keinerlei lokalen Charakter aufweisen.  $\varphi_{n,j}$  zeigt an der Stelle  $x_{n,j}$  einen starken Ausschlag und konvergiert im äußeren Bereich sehr schnell gegen 0. Zudem ist  $\varphi_{n,0}$  eine gerade Funktion.

Die zugehörigen Wavelets zeigen ebenfalls einen lokalen Charakter, allerdings sind die Funktionen  $\psi_{n,0}$  im Gegensatz zu den Skalenfunktionen  $\varphi_{n,0}$  ungerade Funktionen, d.h. unter anderem, daß das Integral über jedes Intervall der Form  $[-k, k]$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$ , verschwindet. Die Wavelets sind wieder oszillierende Funktionen mit Konvergenz gegen 0, wenn  $|x|$  gegen  $\infty$  konvergiert.

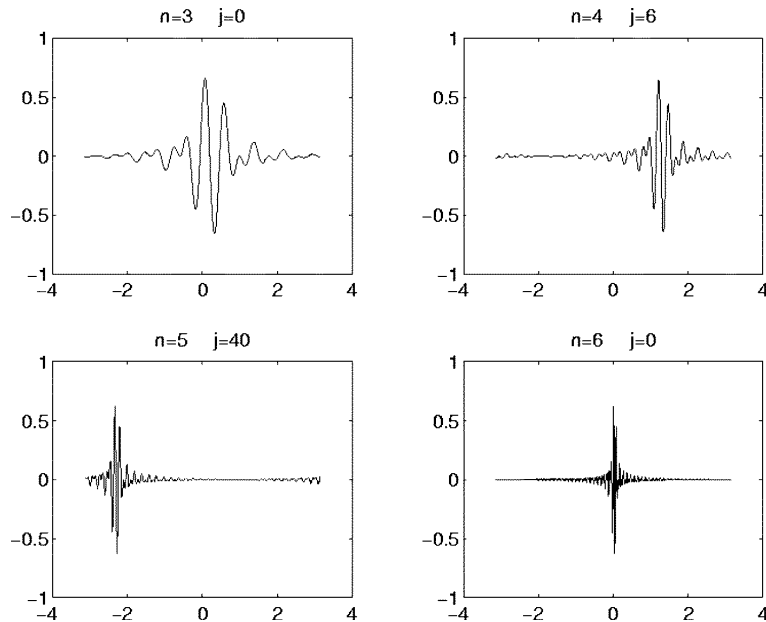


Abbildung 5.3: Die Wavelets  $\psi_{n,j}$  für unterschiedliche  $n$  und  $j$

Um nun eine Funktion  $f$  zu analysieren, wird sie zuerst in einen Raum  $V_n$  projiziert ( $f \mapsto f_n$ ) und anschließend in die Anteile  $f_{n-1} \in V_{n-1}$  und  $g_{n-1} \in W_{n-1}$  zerlegt, da  $V_n$  gerade die direkte Summe von  $V_{n-1}$  und  $W_{n-1}$  ist.

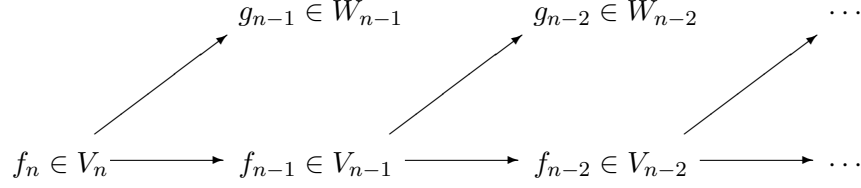
Die intuitivste Möglichkeit der Projektion ist die Fourier-Projektion auf  $V_n$ , d.h. es wird ein geeignetes Fourierpolynom von  $f$  bestimmt. Eine einfachere und schnellere Projektion einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$  auf einen Abtastraum  $V_n$  wird durch die folgende Abbildung erreicht:

$$f \mapsto F_n(f) \text{ mit } (F_n f)(x) := \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} f(x_{n,j}) \varphi_{n,j}(x), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (5.1)$$

Daß diese Projektion eine sehr gute Approximation der Fourier-Projektion ist, zeigt sich im Abschnitt über die Analyse des Algorithmus.

Durch die Gestalt der Skalenfunktionen fließen bei Bildung der Funktion  $F_n f$  lokale Eigenschaften von  $f$  ein. Die Approximation beruht also auf lokalen Informationen von  $f$ , im Gegensatz zur Fourier-Approximation, die nur globale Informationen verwendet.

Zu einer gegebenen Approximation  $f_n$  von  $f$  in  $V_n$  ist die weitere Zerlegung im unteren Diagramm schematisch dargestellt.



Die Zerlegung von  $F_n f$  in seinen Skalen- und Wavelet-Anteil  $f_{n-1}$  und  $g_{n-1}$  kann mit Hilfe eines *Pyramid-Algorithmus* schnell berechnet werden.

### Pyramid-Algorithmus 5.1.2

Sei  $f_n$  eine Funktion aus  $V_n$ , z.B. eine durch Projektion erhaltene. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\lambda_{n,j} := j, \quad j = 1, \dots, 2^{n+1},$$

$2^{n+1}$ -periodisch fortgesetzt für  $j \notin \{1, \dots, 2^{n+1}\}$ ,

$$\beta_{n,k} := \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n-1} \tan\left(\frac{x_{n+1,j}}{2}\right) \sin(x_{n,jk}),$$

$$\Delta_{n,k} := D_{2^n} \left( \frac{2k+1}{2^{n+1}} \pi \right),$$

$$c_{n,k} := \frac{1}{2} \delta_{k,0} + \frac{(-1)^k}{2^{n+2}},$$

$$d_{n,k} := \frac{1}{2^{n+1}} \left( \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} \left( \lambda_{n,k-j} - \frac{\lambda_{n,k} + \lambda_{n,k+1}}{2} \right) \Delta_{n,j} \right),$$

wobei  $n, k \in \mathbb{N}_0$  und  $\delta$  das Kronecker-Symbol ist. Weiterhin definieren wir

$$A_{n,k,l} := c_{n,k-\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} + \frac{(-1)^{l+1}}{2} \beta_{n,k-\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \quad \text{und}$$

$$B_{n,k,l} := d_{n,k-\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} + \frac{(-1)^l}{2} \delta_{k, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor} + \frac{(-1)^{l+\lfloor \frac{l}{2} \rfloor+k}}{2^{n+2}}.$$

Hier sind  $n, k, l \in \mathbb{N}_0$  und  $[\cdot]$  ist die Gauß-Funktion. Jetzt können wir eine Skalenfunktion als Linearkombination von Skalenfunktionen und Wavelets einer niedrigeren Skala darstellen. Seien dabei  $n \in \mathbb{N}$  und  $l \in \{0, \dots, 2^{n+1}\}$ . Dann gilt

$$\varphi_{n,l}(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} (A_{n-1,k,l} \varphi_{n-1,k}(x) + B_{n-1,k,l} \psi_{n-1,k}(x)).$$

Die zu bestimmenden Funktionen  $f_{n-1} \in V_{n-1}$  und  $g_{n-1} \in W_{n-1}$  können wir als Linearkombination der Skalenfunktionen bzw. Wavelets der entsprechenden Skala schreiben:

$$f_{n-1}(x) =: \sum_{k=0}^{2^n-1} C_{n-1,k} \varphi_{n-1,k}(x), \quad g_{n-1}(x) =: \sum_{k=0}^{2^n-1} D_{n-1,k} \psi_{n-1,k}(x).$$

Mit der Zerlegungsgleichung

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + g_{n-1}(x)$$

können wir jetzt die Koeffizienten  $C_{n-1,k}$  und  $D_{n-1,k}$  berechnen.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2^n-1} C_{n-1,k} \varphi_{n-1,k}(x) + \sum_{k=0}^{2^n-1} D_{n-1,k} \psi_{n-1,k}(x) \\ &= \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} C_{n,l} \left( \sum_{k=0}^{2^n-1} A_{n-1,k,l} \varphi_{n-1,k}(x) + B_{n-1,k,l} \psi_{n-1,k}(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} C_{n,l} A_{n-1,k,l} \right) \varphi_{n-1,k}(x) + \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} C_{n,l} B_{n-1,k,l} \right) \psi_{n-1,k}(x) \end{aligned}$$

Damit bekommen wir folgende Rekursionsformeln für  $C_{n-1,k}$  und  $D_{n-1,k}$ :

$$C_{n-1,k} = \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} A_{n-1,k,l} C_{n,l}, \quad (5.2)$$

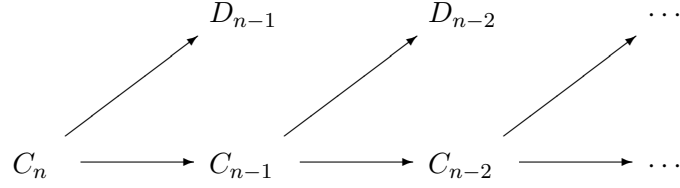
$$D_{n-1,k} = \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} B_{n-1,k,l} C_{n,l}. \quad (5.3)$$

Die Koeffizienten werden also gemäß dem folgenden Diagramm schrittweise berechnet. Dabei ist  $C_n$  die Koeffizientenfolge der  $C_{n,k}$ ,  $D_n$  die der  $D_{n,k}$ .

Will man die mit Hilfe der Formel (5.1) bestimmte Approximation in  $V_n$  einer Funktion  $f$  zerlegen, so errechnen sich die Koeffizienten des Skalen- und Wavelet-Anteils wie folgt:

$$C_{n-1,k} = \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} A_{n-1,k,l} f(x_{n,l}), \quad (5.4)$$

$$D_{n-1,k} = \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} B_{n-1,k,l} f(x_{n,l}). \quad (5.5)$$



### 5.1.2 Analyse

Zuerst werde ich die Laufzeit im  $O$ -Kalkül bestimmen und anschließend die Genauigkeit der Approximation im Abtastraum analysieren.

Wir nehmen an, daß die arithmetischen Operationen  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ , potenzieren und radizieren, die trigonometrischen Funktionen  $\sin(\cdot)$  und  $\cos(\cdot)$  und der Vergleich zweier Integer-Werte in konstanter Zeit zu berechnen sind. Damit ist sofort klar, daß auch Punktauswertungen einer Funktion, die nur solche Operationen enthält und nicht von laufzeitbestimmenden Parametern abhängt, konstante Zeit zur Berechnung benötigen.

Wir bestimmen zunächst die Laufzeit der Berechnung der Projektion einer  $2\pi$ -periodischen Funktion in einen Abtastraum  $V_n$  mit Hilfe der Formel (5.1). Die Berechnung eines Punktes  $x_{n,j}$ ,  $j \in \{0, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , benötigt nach obiger Annahme Zeit  $O(1)$ , da lediglich arithmetische Operationen vorkommen. Die Funktion  $\Phi_n$ , mit Hilfe derer man  $\varphi_{n,j}$  berechnen kann, läßt sich direkt integrieren und damit folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
 \Phi_n(x) = & \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} x_{n,1} - \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \sin(k(x - x_{n,1})) - \frac{1}{2^{n+1}} \sin(2^{n-1}(x - x_{n-1,1})) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \sin(kx) + \frac{1}{2^{n+1}} \sin(2^n x) \right).
 \end{aligned}$$

Da nach Annahme die Sinusfunktion in konstanter Zeit berechenbar ist, benötigt die Berechnung von  $\Phi_n(x)$  für ein  $x \in [-\pi, \pi]$  Zeit  $O(2^n)$ . Da  $\varphi_{n,j}$  als Translation von  $\Phi_n$  definiert ist, läßt sich also auch  $\varphi_{n,j}(x)$  in Zeit  $O(2^n)$  berechnen. Damit beträgt nach (5.1) die benötigte Laufzeit für die Projektion  $O(2^{n+1}2^n) = O(2^{2n})$ .

Genau wie  $\Phi_n$  läßt sich auch  $\Psi_n$  direkt integrieren:

$$\begin{aligned}
 \Psi_n(x) = & \frac{1}{\pi} \left( \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \sin(kx) + \frac{1}{2^{n+1}} \sin(2^n x) + \frac{1}{2^n} \sin(2^{n-1} x) \right. \\
 & - \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n-1} \frac{2}{k} \sin(k(x - x_{n,1})) - \frac{2}{2^{n+1}} \sin(2^n(x - x_{n,1})) - \frac{2}{2^n} \sin(2^{n-1}(x - x_{n,1})) \\
 & \left. + \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \sin(k(x - x_{n-1,1})) + \frac{1}{2^{n+1}} \sin(2^n(x - x_{n-1,1})) + \frac{1}{2^n} \sin(2^{n-1}(x - x_{n-1,1})) \right).
 \end{aligned}$$

Mit den gleichen Argumenten wie vorher beträgt auch hier die Laufzeit  $O(2^n)$ .

Im folgenden werden die Laufzeiten für die Berechnung von  $A_{n,k,l}$  und  $B_{n,k,l}$  bestimmt. Dafür werden insbesondere die Laufzeiten für die Berechnung der Funktionen  $\lambda_{n,j}$ ,  $\beta_{n,k}$ ,  $\Delta_{n,k}$ ,  $c_{n,k}$  und  $d_{n,k}$  (siehe Pyramid-Algorithmus 5.1.2) und  $\lfloor \cdot \rfloor$  benötigt. Seien  $n, k \in \mathbb{N}_0$  und  $j \in \mathbb{Z}$ .

- $\lambda_{n,j}$  :  $\lambda_{n,j}$  benötigt konstante Laufzeit, da zur Berechnung der modulo-Funktion nur einfache arithmetische Operationen benutzt werden, von denen wir angenommen haben, daß sie in konstanter Zeit zu berechnen sind.
- $\beta_{n,k}$  : Mit den gemachten Annahmen läßt sich jeder Summand und auch der Koeffizient in konstanter Zeit berechnen. Damit beträgt die Laufzeit  $O(2^n)$ , da  $2^n$ -mal summiert wird.
- $\Delta_{n,k}$  : Die Berechnung der vorkommenden Funktion  $D_{2^n}$  hat eine Laufzeit von  $O(2^n)$ , da wiederum jeder Summand konstant viel Zeit in Anspruch nimmt. Somit braucht auch die Funktion  $\Delta_{n,k}$  Zeit  $O(2^n)$ .
- $c_{n,k}$  : Da angenommen ist, daß der Vergleich zweier Zahlen nur konstant viel Zeit in Anspruch nimmt und sonst nur einfache arithmetische Operationen benutzt werden, benötigt diese Funktion Zeit  $O(1)$ .
- $d_{n,k}$  : Nehmen wir die schon berechneten Aufwände für die Funktionen  $\lambda_{n,j}$  und  $\Delta_{n,j}$ , so beträgt die Berechnungszeit eines Summanden

$$O(1) O(2^n) = O(2^n).$$

Damit ist der Aufwand von  $d_{n,k}$

$$\begin{aligned} O\left(\sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} 2^n\right) &= O(2^{n+1} 2^n) \\ &= O(2^{2n}). \end{aligned}$$

- $\lfloor \cdot \rfloor$  : Zur Berechnung von  $\lfloor x \rfloor$  werden nur einfache arithmetische Operationen benutzt. Der Algorithmus hat somit konstante Laufzeit.

Damit benötigt man zur Berechnung von  $A_{n,k,l}$  eine Laufzeit von  $O(2^n)$ , da die Berechnung von  $c_{n,k}$  nur konstant viel Zeit in Anspruch nimmt, und die Funktion  $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$  eine Laufzeit von  $O(1)$  besitzt.

Bei der Berechnung der Laufzeit von  $B_{n,k,l}$  fällt nur die Funktion  $d_{n,k}$  ins Gewicht, da alles andere nach Annahme konstant viel Zeit benötigt. Also hat die Funktion  $B_{n,k,l}$  eine Laufzeit von  $O(2^{2n})$ .

Zur Berechnung der Funktionen  $f_{n-1}$  und  $g_{n-1}$  aus der Zerlegung  $f_n = f_{n-1} + g_{n-1}$  benötigt man die Koeffizienten  $C_{n-1,k}$  und  $D_{n-1,k}$ . Diese lassen sich mit Hilfe der Formeln (5.4) und (5.5) berechnen. Da hier wieder in beiden Fällen die Punktauswertungen von  $f$  konstant viel Zeit in Anspruch nehmen, hat  $C_{n-1,k}$  eine Laufzeit von

$$O\left(\sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} 2^n\right) = O(2^{n+1}2^n) = O(2^{2n}).$$

Ferner läßt sich  $D_{n-1,k}$  in der Zeit

$$O\left(\sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} 2^{2n}\right) = O(2^{n+1}2^{2n}) = O(2^{3n})$$

berechnen. Somit hat die Berechnung von  $f_{n-1}(x)$  eine Laufzeit von

$$O\left(\sum_{l=0}^{2^n-1} (2^{2n} + 2^n)\right) = O(2^n(2^{2n} + 2^n)) = O(2^{3n}).$$

und von  $g_{n-1}(x)$  eine Laufzeit von

$$O\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} (2^{3n} + 2^n)\right) = O(2^n(2^{3n} + 2^n)) = O(2^{4n}).$$

Die Laufzeit für den Algorithmus, der erst eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  in einen Abtastraum  $V_n$  projiziert und anschließend in Skalenanteil  $f_{n-1}$  und Wavelet-Anteil  $g_{n-1}$  zerlegt, beträgt nach obigen Berechnungen

$$O(2^{2n} + 2^{3n} + 2^{4n}) = O(2^{4n}).$$

Im folgenden wird die Laufzeit berechnet, die man benötigt, um eine  $2\pi$ -periodische Funktion in einen Abtastraum  $V_n$  zu projizieren und anschließend in alle Skalen- und Wavelet-Anteile zu zerlegen.

Zur Projektion wird wieder Formel (5.1) benutzt. Die erste Zerlegung in den Skalen- und Wavelet-Anteil der Skala  $n - 1$  geschieht mittels der Formeln (5.4) und (5.5). Möchte man die Funktion  $f_{n-1}$  des Abtastraumes  $V_{n-1}$ , die sich aus der ersten Zerlegung ergeben hat, weiter zerlegen, so muß man zur Berechnung der weiteren Koeffizientenfolgen  $C_i$  und  $D_i$ ,  $0 \leq i \leq n - 2$ , die Formeln (5.2) und (5.3) verwenden. Seien im folgenden  $A(i)$ ,  $B(i)$ ,  $C(i)$  und  $D(i)$  die Laufzeiten der Berechnungen von  $A_{i,k,l}$ ,  $B_{i,k,l}$ ,  $C_{i,k}$  und  $D_{i,k}$ , da die Berechnungen dieser Funktionen laufzeitmäßig nur von ihrem ersten Parameter abhängen. Es ist zu beachten, daß die Berechnung von  $C_{n,k} = f(x_{n,k})$  nur konstante Zeit benötigt.

$$\begin{aligned} O(C(0)) &= O\left(\sum_0^{2^2-1} (A(0) + \sum_0^{2^3-1} (A(1) + \dots + \sum_0^{2^n-1} (A(n-2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_0^{2^{n+1}-1} (A(n-1) + C(n)) \dots))\right) \\ &= O((2^2 - 1)(A(0) + (2^3 - 1)(A(1) + \dots + (2^n - 1)(A(n-2) \\ &\quad + (2^{n+1} - 1)(A(n-1) + C(n)) \dots))) \\ &= O\left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\prod_{j=2}^{i+2} (2^j - 1)\right) A(i)\right) \end{aligned}$$

Damit gilt weiter:

$$\begin{aligned}
O(C(0)) &= O\left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\prod_{j=2}^{i+2} (2^j - 1)\right) 2^i\right) \\
&= O\left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\prod_{j=2}^{i+2} 2^j\right) 2^i\right) \\
&= O\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{\sum_{j=2}^{i+2} j} 2^i\right) \\
&= O\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{1}{2}(i+4)(i+1)} 2^i\right) \\
&= O\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{1}{2}(i^2+7i)}\right) \\
&= O\left(2^{\frac{1}{2}((n-1)^2+7(n-1))}\right) \\
&= O\left(2^{\frac{1}{2}(n^2+5n)}\right).
\end{aligned}$$

Dies ist die benötigte Laufzeit zur Berechnung aller Koeffizientenfolgen  $C_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . Für die Koeffizientenfolgen  $D_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , läßt sich analog zeigen:

$$\begin{aligned}
O(D(0)) &= O\left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\prod_{j=2}^{i+2} (2^j - 1)\right) B(i)\right) \\
&= O\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{1}{2}(i+4)(i+1)} 2^{2i}\right) \\
&= O\left(2^{\frac{1}{2}(n^2+7n)}\right).
\end{aligned}$$

Damit können wir den Aufwand zur Berechnung der Skalen- und Wavelet-Anteile unter der Voraussetzung, daß die Folgen  $C_i$  und  $D_i$  schon berechnet sind, abschätzen. Das bedeutet, daß die benötigten Laufzeiten für  $C_i$  und  $D_i$  in diesen Abschätzungen konstant sind. Seien im folgenden  $\varphi(i)$  und  $\psi(i)$  die Aufwände zur Berechnung von  $\varphi_{i,k}(x)$  bzw.  $\psi_{i,k}(x)$ , da diese nicht von  $k$  abhängen.

$$\begin{aligned}
O\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^{i+1}-1} \varphi(i)\right) &= O\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1} 2^i\right) \\
&= O\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{2i+1}\right)
\end{aligned}$$



$$= O(2^{2n})$$

Analog der Aufwand zur Berechnung der Wavelet-Anteile:

$$\begin{aligned} O\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^{i+1}-1} \psi(i)\right) &= O\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^{i+1}-1} 2^i\right) \\ &= O(2^{2n}). \end{aligned}$$

Der Algorithmus, der zuerst eine Funktion nach  $V_n$  projiziert und anschließend in sämtliche Skalen- und Wavelet-Anteile zerlegt, hat daher eine Laufzeit von

$$O\left(2^{2n} + 2^{\frac{1}{2}(n^2+5n)} + 2^{\frac{1}{2}(n^2+7n)} + 2^{2n} + 2^{2n}\right) = O\left(2^{\frac{1}{2}(n^2+7n)}\right).$$

Wir haben damit einen Algorithmus mit exponentieller Laufzeit.

Nach der Laufzeitanalyse wird jetzt die Genauigkeit der Approximation in den Abtasträumen analysiert.

Für die Projektion einer stetigen,  $2\pi$ -periodischen Funktion in einen Abtastraum  $V_n$  mit Hilfe von Punktauswertungen der Funktion (siehe Formel (5.1)), gilt der folgende Satz, der aus dem Artikel [ChMha 93] entnommen ist.

### Satz 5.1.3

Für eine stetige,  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  gilt

$$\|f - F_n f\|_2 \leq 3\omega(f, x_{n,1}), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei  $\omega(f, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , folgendermaßen definiert ist:

$$\omega(f, \delta) := \max_{\substack{|x-y| \leq \delta \\ x, y \in [-\pi, \pi]}} |f(x) - f(y)|.$$

Wenn man diese Projektion mit der Fourier-Projektion vergleicht, bekommt man folgende Aussage über das Verhältnis der Fourierkoeffizienten  $\tau_{n,k}(f_n)$  der Linearkombination der Skalenfunktionen  $\varphi_{n,k}$ , die die Fourierprojizierte  $f_n \in V_n$  einer Funktion  $f$  darstellt, zu den hier verwendeten Punktauswertungen der Funktion:

### Lemma 5.1.4

Sei  $f$  eine 2-mal stetig differenzierbare,  $2\pi$ -periodische Funktion mit

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

Dann existiert eine Konstante  $c > 0$ , so daß

$$|\tau_{n,k}(f_n) - f(x_{n,k})| \leq \frac{cn}{2^n} \|f''\|$$

gilt.

D.h. mit wachsendem  $n$  konvergiert die Differenz der Koeffizienten gegen 0. Daraus kann man sofort eine Abschätzung für das Verhältnis der Fourier-Projektion zu der hier benutzten Projektion ableiten.

**Bemerkung 5.1.5**

Für  $f$  gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 5.1.4. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f(x_{n,k}) \varphi_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} \tau_{n,k}(f_n) \varphi_{n,k}(x) \right| \\
& \leq \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} |f(x_{n,k}) - \tau_{n,k}(f_n)| |\varphi_{n,k}(x)| \\
& \stackrel{\text{Lemma 5.1.4}}{\leq} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} \frac{cn}{2^n} \|f''\| \\
& = 2^{n+1} \frac{cn}{2^n} \|f''\| \\
& = 2cn \|f''\|.
\end{aligned}$$

## 5.2 Theoretisch orientierter Ansatz

### 5.2.1 Die Algorithmen

Als Beispiel für einen theoretisch orientierten Ansatz habe ich die in Kapitel 3 und 4 entwickelten stetigen und diskreten Wavelet-Transformationen genommen. Da hier Funktionen auf der  $S^1$  untersucht werden, ist die wirkende Gruppe  $SO(2) \times \mathbb{R}^2$ . D.h. die Stabilitätsgruppe ist in diesem Fall  $SO(1)$ , also ist  $\pi$  eindimensional. Ich wähle  $\pi$  trivial und  $u = e_2$ . Die induzierte Darstellung ist dann von der Form

$$\left( \text{ind}_{SO(1) \times \mathbb{R}^2}^{SO(2) \times \mathbb{R}^2} \sigma(c(A, x)) \psi \right) (\xi) = e^{i \langle e_2, R_\xi^{-1} \tilde{x} \rangle} \psi(A^{-1}x),$$

wobei  $(A, x) \in SO(2) \times \mathbb{R}$  und  $\xi \in S^1$ . Für die Wavelet-Transformation gilt damit die untenstehende Formel. Dabei wurde  $SO(2)$  mit dem Intervall  $[0, 2\pi)$  auf kanonische Weise identifiziert. Im folgenden seien  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a \in [0, 2\pi)$ ,  $A$  die zu  $a$  gehörige Matrix und  $\psi \in L^2(S^1)$  eine zulässige Funktion, d.h. unter anderem  $\text{supp} \psi \subseteq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , falls  $S^1$  mit  $[-\pi, \pi]$  identifiziert wird. Außerdem wurde angenommen, daß  $f$  und  $\psi$  Funktionen von sphärischen Koordinaten sind.

$$\begin{aligned}
T_\psi(f)(a, x) &= \int_{S^1} e^{i \langle e_2, R_{\Lambda(t)}^{-1} \tilde{x} \rangle} \psi(t) f(t - a) d\mu_1(t) \\
&= \int_{S^1} e^{i \langle \Lambda(t), \tilde{x} \rangle} \psi(t) f(t - a) d\mu_1(t) \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ix \sin(t)} \psi(t) f(t - a) dt
\end{aligned}$$

Damit sieht die Rekonstruktionsformel für ein  $\theta \in [-\pi, \pi]$  folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \frac{1}{c_\psi} \int_{SO(2)} \int_{\mathbb{R}} T_\psi(f)(A, x) \left( \text{ind}_{SO(1) \times \mathbb{R}^2}^{SO(2) \times \mathbb{R}^2} \sigma(A, \tilde{x}) \psi \right) (\theta) dx d\nu_2(A) \\
&= \frac{1}{c_\psi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} T_\psi(f)(a, x) e^{i\langle e_n, R_{\Lambda(\theta)}^{-1}(-A^{-1}\tilde{x}) \rangle} \psi(\theta + a) dx da \\
&= \frac{1}{c_\psi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} T_\psi(f)(a, x) e^{i\langle \Lambda(\theta), -A^{-1}\tilde{x} \rangle} \psi(\theta + a) dx da \\
&= \frac{1}{c_\psi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} T_\psi(f)(a, x) e^{-i\langle A\Lambda(\theta), \tilde{x} \rangle} \psi(\theta + a) dx da \\
&= \frac{1}{c_\psi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ix \sin(t)} \psi(t) f(t - a) dt \right) e^{-ix \sin(\theta+a)} \psi(\theta + a) dx da
\end{aligned}$$

Bei den Umformungen wurde u.a. das Lemma A.1.13 verwendet. Für die Untersuchungen habe ich das Wavelet  $\psi \in L^2(S^1)$  in der folgenden Form gewählt:

$$\psi(t) = \cos(t) \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(t), \quad t \in [-\pi, \pi],$$

wobei  $\chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$  die charakteristische Funktion von  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ist.  $\psi$  wurde gleich als Funktion von sphärischen Koordinaten geschrieben. Die Funktion ist trivialerweise in  $L^2(S^1)$ . Für diese Funktion sind die Voraussetzungen von Satz 3.3.1 nach Beispiel 4.3.3 erfüllt. Die Konstante  $c_\psi$  berechnet sich wie folgt:

$$c_\psi = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos(t)|^2}{\cos(t)} dt = 4\pi.$$

Damit haben wir die Rekonstruktionsformel

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ix \sin(t)} \cos(t) f(t - a) dt \right) \\
&\quad \cdot e^{-ix \sin(\theta+a)} \cos(\theta + a) \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(\theta + a) dx da
\end{aligned} \tag{5.6}$$

für ein beliebiges  $f \in L^2(S^1)$  und  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

Im zweiten Teil des Abschnitts soll ein Rekonstruktionsalgorithmus basierend auf den in Kapitel 4 konstruierten Frames vorgestellt werden. Sei dazu  $\psi \in L^2(S^1)$  zulässig. Wir identifizieren

wieder  $SO(2)$  mit  $[0, 2\pi)$ . Seien ferner  $\psi_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $a_j \in [0, 2\pi)$ ,  $j \in J$  und  $|J| < \infty$  so gewählt, daß

$$\psi(\theta) = \psi_1(\theta) \sqrt{\det J_\omega(\theta)} = \psi_1(\theta) \sqrt{\cos(\theta)} \quad \text{für alle } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

gilt und ein  $B > 0$  existiert mit

$$\sum_{j \in J} |\psi_1(\theta + a_j)|^2 = B \quad \text{für alle } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Nach Satz 4.1.2 ist

$$\{e^{-im \sin(\cdot + a_j)} \psi(\cdot + a_j) : j \in J \text{ und } m \in \mathbb{Z}\}$$

ein fester Frame für  $L^2(S^1)$ . In Analogie zur eben beschriebenen stetigen Wavelet-Transformation auf der  $S^1$  gilt dann die Rekonstruktionsformel (siehe dazu Formel (2.4) aus Folgerung 2.3.14)

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi B} \sum_{j \in J} \sum_{m \in \mathbb{Z}} T_\psi(f)(a_j, m) e^{-im \sin(\theta + a_j)} \psi(\theta + a_j)$$

für jedes  $f \in L^2(S^1)$ . Für unsere Analysen wählen wir  $\psi_1$  und  $J$  als

$$\psi_1(\theta) = \cos(\theta) \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(\theta) \quad \text{für } \theta \in [-\pi, \pi]$$

und

$$J = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}.$$

Unser Wavelet  $\psi$  sieht damit folgendermaßen aus:

$$\psi(\theta) = \cos(\theta) \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(\theta) \sqrt{\cos(\theta)} \quad \text{für } \theta \in [-\pi, \pi].$$

Die Voraussetzungen von Satz 4.1.2 sind nach Beispiel 4.3.3 für  $B = 1$  erfüllt. Damit ist die folgende Inversionsformel für ein  $f \in L^2(S^1)$  zu implementieren:

$$\begin{aligned} f(\theta) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^4 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{im \sin(t)} \cos(t) \sqrt{\cos(t)} f(t - a_j) dt \right) \\ & \cdot e^{-im \sin(\theta + a_j)} \cos(\theta + a_j) \sqrt{\cos(\theta + a_j)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

### 5.2.2 Analyse

Zuerst werden wir die Laufzeit der stetigen Wavelet-Transformation und anschließend die der diskreten Variante bestimmen.

Bei der Implementation werden wir anstatt über  $\mathbb{R}$  nur über ein kompaktes Intervall der Form  $[-k, k]$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$ , integrieren. Folglich ist  $k$  der Aufwandparameter. Wir nehmen wieder an, daß die arithmetischen Operationen  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ , potenzieren und radizieren und die trigonometrischen Funktionen  $\sin(\cdot)$  und  $\cos(\cdot)$  in konstanter Zeit zu berechnen sind. Damit kann sowohl

$$e^{ix \sin(t)} \cos(t) f(t - a)$$

als auch

$$e^{-ix \sin(\theta+a)} \cos(\theta + a)$$

für jedes  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $a \in [0, 2\pi]$  und  $\theta \in [-\pi, \pi]$  in konstanter Zeit berechnet werden. Da sogar das innerste Integral von beiden äußeren Integrationsvariablen abhängt, liegt hier ein 3-fach Integral vor. Weil selbst das innere Integral nur in wenigen Fällen (z.B.  $f \equiv 1$ ) symbolisch integriert werden kann, sind numerische Verfahren anzuwenden. Allerdings sind alle bekannten Verfahren zur numerischen Integration von Mehrfachintegralen sehr rechenintensiv. Als Laufzeit bekommen wir also die Laufzeit des verwendeten Verfahrens in Abhängigkeit der Genauigkeitsstufe  $k$ . Dies wird in der Regel linear sein (mit sehr großem konstanten Faktor wegen der zeitaufwendigen Berechnungen). Im Abschnitt über Experimente wird sich zeigen, daß die Rechenzeit selbst im Fall  $f \equiv 1$  nicht akzeptabel ist.

Durch die Diskretisierung wird eine deutliche Verbesserung der Laufzeit erreicht. Statt des Integrals über die reellen Zahlen enthält die diskrete Rekonstruktionsformel eine unendliche Summe. Der Aufwandparameter ist hier wieder  $k$ , wobei wir im Programm von  $-k$  bis  $k$  summieren. Nach der gemachten Annahme kann man wieder folgern, daß

$$e^{im \sin(t)} \cos(t) \sqrt{\cos(t)} f(t - a_j)$$

und

$$e^{-im \sin(\theta+a_j)} \cos(\theta + a_j) \sqrt{\cos(\theta + a_j)}$$

für jedes  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $j \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$  und  $\theta \in [-\pi, \pi]$  in konstanter Zeit zu berechnen sind. Da über ein kompaktes Intervall integriert wird und die Laufzeit für die Berechnung des Integrals nicht signifikant von  $m$  und damit von  $k$  abhängt, ist jeder Summand der Rekonstruktionsformel in Zeit  $O(1)$  berechenbar. Folglich läßt sich die Approximationsfunktion in der Zeit  $O(4(2k + 1) \cdot 1) = O(k)$  berechnen, da in der inneren Summe über  $m \in \{-k, \dots, k\}$  summiert wird.

## 5.3 Experimente und Vergleich

Zuerst möchte ich kurz die Ergebnisse der Analysen vergleichen und anschließend auf die Implementation und die damit erzielten Ergebnisse bei der Zerlegung bzw. Rekonstruktion der zu

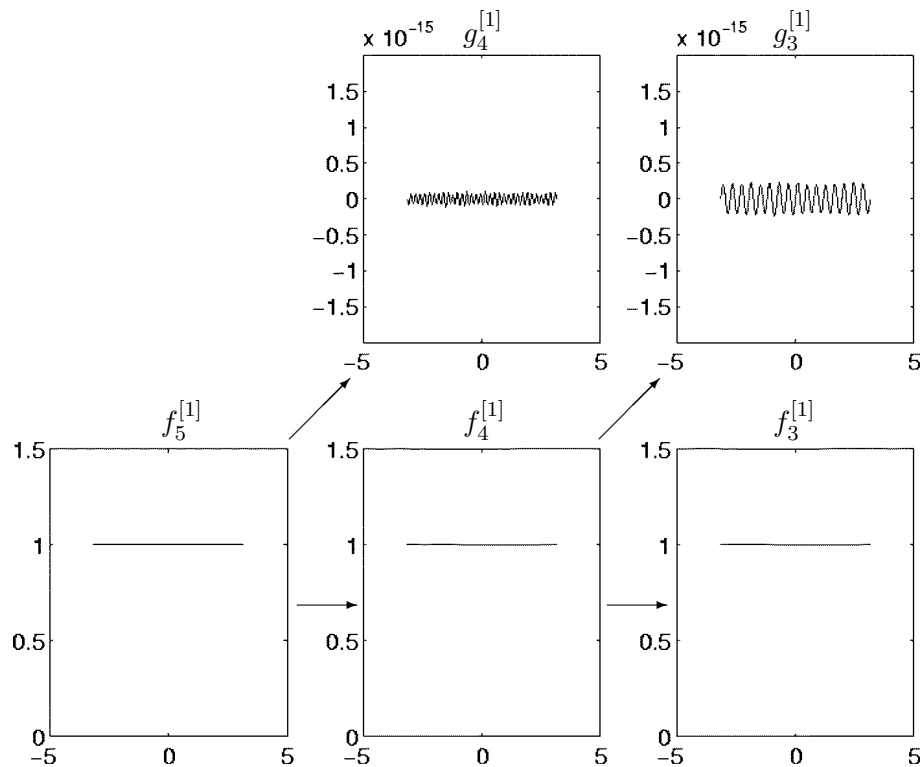
Beginn vorgestellten Funktionen  $f^{[1]}, \dots, f^{[4]}$  eingehen. Im zweiten Teil werden die experimentell ermittelten Laufzeiten und Normabweichungen der Approximation vorgestellt, bewertet und verglichen. Zum Schluß werden alle Ergebnisse noch einmal insgesamt bewertet.

Wenn man beide Ansätze bzw. Algorithmen vergleichen möchte, fällt zunächst auf, daß der Algorithmus von Chui aus zwei Teilen besteht, der Approximation einer Funktion in einem Abstrraum und der Zerlegung der so erhaltenen Funktion in Skalen- und Wavelet-Anteile. Die Algorithmen hingegen, die sich aus dem theoretischen Ansatz ergeben, dienen der Rekonstruktion einer Funktion, was auch einer schrittweisen Approximation der Funktion entspricht. D.h. wir können den ersten Teil des Algorithmus von Chui mit den Algorithmen aus dem theoretischen Ansatz vergleichen.

Möchte man die Ergebnisse der Analysen miteinander vergleichen, so fällt auf, daß bei einem Vergleich von Laufzeiten  $O(2^{2n})$  und  $O(k)$  zuerst geklärt werden muß, in welchem Verhältnis  $n$  und  $k$  stehen. Vielleicht ist es so, daß eine Approximationsstufe von  $\nu$  im Algorithmus von Chui einer von  $2^{2\nu}$  im Frame-Algorithmus entspricht. Das würde bedeuten, daß die Laufzeiten beider Algorithmen gleich sind. In den noch folgenden Experimenten wird u.a. dieses noch untersucht werden.

Ich habe den im vorigen Abschnitt vorgestellten Algorithmus, der aus dem Artikel [ChMha 93] entnommen und in Bezug auf die Definition der Funktionen  $A_{n,k,l}$  und  $B_{n,k,l}$  korrigiert wurde, in MATLAB implementiert und auf die vier Testfunktionen angewandt. Dabei wurde zuerst die Funktion  $f^{[i]}$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$ , mit Hilfe der Formel (5.1) in den Raum  $V_5$  projiziert. Anschließend wurde die so erhaltene Funktion in Funktionen  $f_4^{[i]} \in V_4$  und  $g_4^{[i]} \in W_4$  zerlegt, wobei  $f_5^{[i]} = f_4^{[i]} + g_4^{[i]}$  gilt. Die folgenden Graphiken zeigen die weitere Zerlegung von  $f_4^{[i]}$  in  $f_3^{[i]} \in V_3$  und  $g_3^{[i]} \in W_3$ .

Die Approximation der ersten Funktion (siehe Abbildung 5.4) in einem Raum  $V_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ist trivialerweise die Funktion selbst, da die Einsfunktion in jedem Abstrraum  $V_n$  enthalten ist. Die Wavelet-Anteile sind betragsmäßig fast die Nullfunktion, da  $f^{[1]}$  stetig ist. Die erkennbaren Schwingungen beruhen auf Rundungsfehlern.

Abbildung 5.4: Zerlegung der Funktion  $f^{[1]}$  in Skalen- und Wavelet-Anteile

Bei der zweiten Funktion (siehe Abbildung 5.5) erkennt man gut die Approximation in den Abtasträumen  $V_3, V_4$  und  $V_5$  durch immer höhere Frequenzen. Zu bemerken ist, daß die Approximation an den Unstetigkeitsstellen einen Ausschlag zeigt. Die Amplitude an diesen Stellen ändert sich mit wachsender Skala kaum. Die Wavelet-Anteile zeigen sehr gut die Unstetigkeitsstellen an. Dabei wird die Detektion dieser Stellen mit wachsender Skala aufgrund der höheren Frequenzen genauer.

In Abbildung 5.6 ist die Zerlegung der Funktion  $f^{[3]}$  dargestellt. Die Approximation in den Abtasträumen zeigt wieder einen sich in der Amplitude kaum verändernden Ausschlag an den Unstetigkeitsstellen, d.h. die Funktion wird hier sehr langsam approximiert. Bei den Wavelet-Anteilen zeigt sich wieder die Detektion der Unstetigkeitsstellen. Auch werden wieder wie bei  $f^{[2]}$  die Frequenzen der Wavelet-Anteile beliebig hoch, da auch eine Gerade aus Schwingungen mit beliebig kleiner Amplitude besteht.

In der Abbildung 5.7 erkennt man die sehr gute und schnelle Approximation von  $f^{[4]}$  in den Abtasträumen, da diese Funktion im wesentlichen aus niedrigeren Frequenzen als z.B. die Funktion  $f^{[3]}$  besteht. Die Funktionswerte der eigentlich nicht definierten Punkte  $-\pi, 0, \pi$  wurden hier auf  $2.5, -2.5, 2.5$  festgesetzt, da auch die Punkte  $-\pi, 0, \pi$  Stützstellen sind, an denen ausgewertet wurde. Die Wavelet-Anteile zeigen wieder ein ähnliches Verhalten wie bei den Funktionen  $f^{[2]}$  und  $f^{[3]}$ .

Insgesamt erkennt man deutlich die Ähnlichkeit der Approximation in den Abtasträumen zur Fourier-Approximation. Die Bedeutung des Wavelet-Anteils zur Analyse der Funktion ist auch aus allen Bildern ersichtlich. Durch Einzelbetrachtung der hochfrequenten Anteile einer Funktion werden insbesondere Unstetigkeitsstellen, aber auch Störungen eines Signals oder hochfrequentes Rauschen entdeckt und können so herausgefiltert werden.

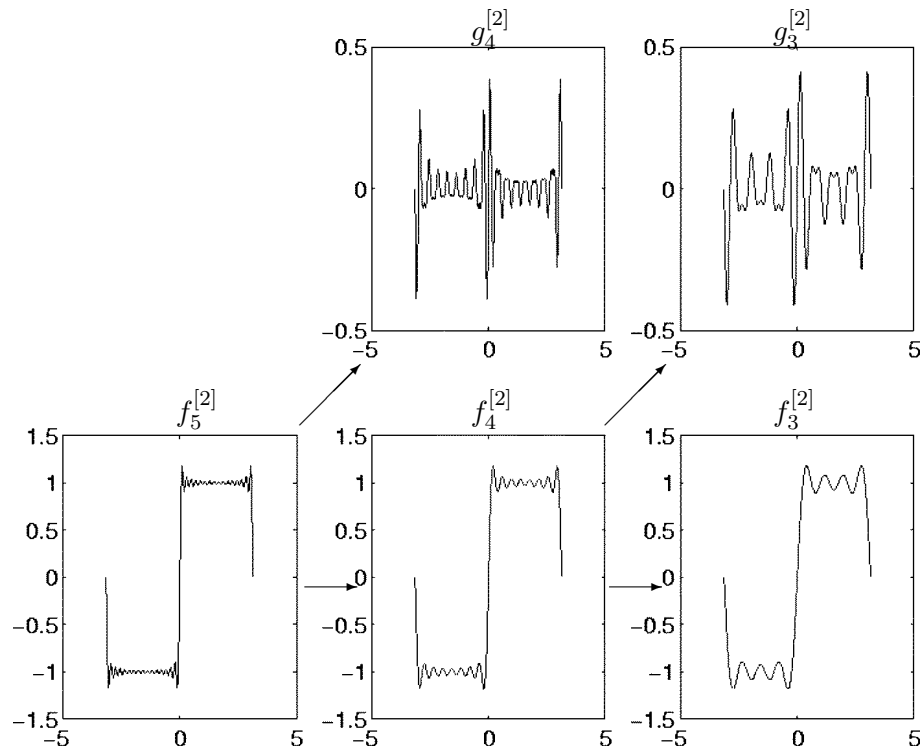


Abbildung 5.5: Zerlegung der Funktion  $f^{[2]}$  in Skalen- und Wavelet-Anteile

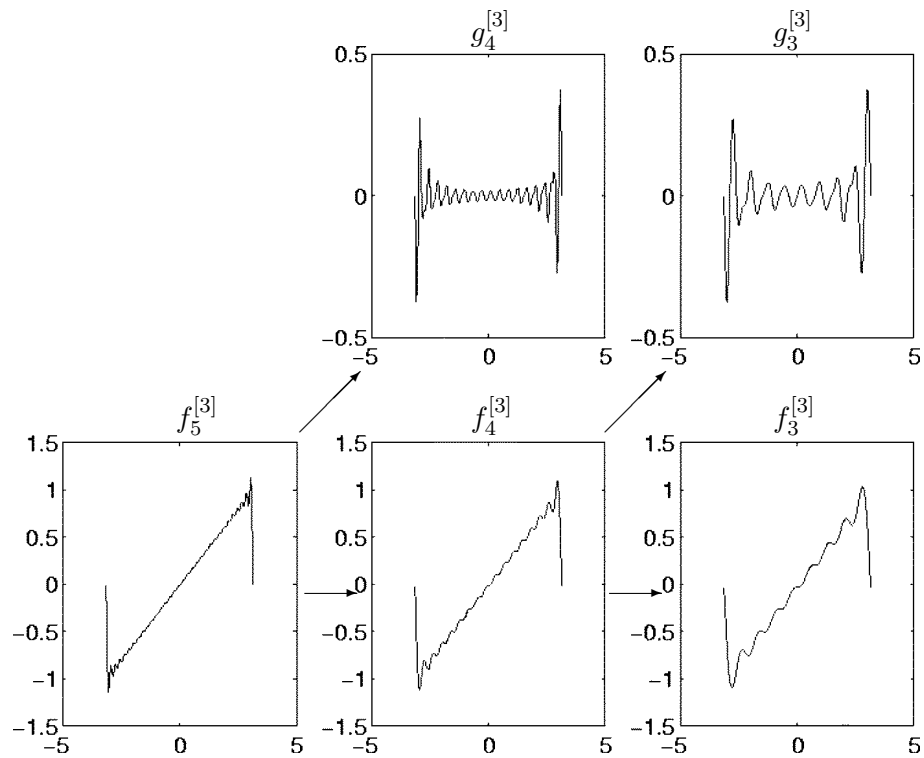
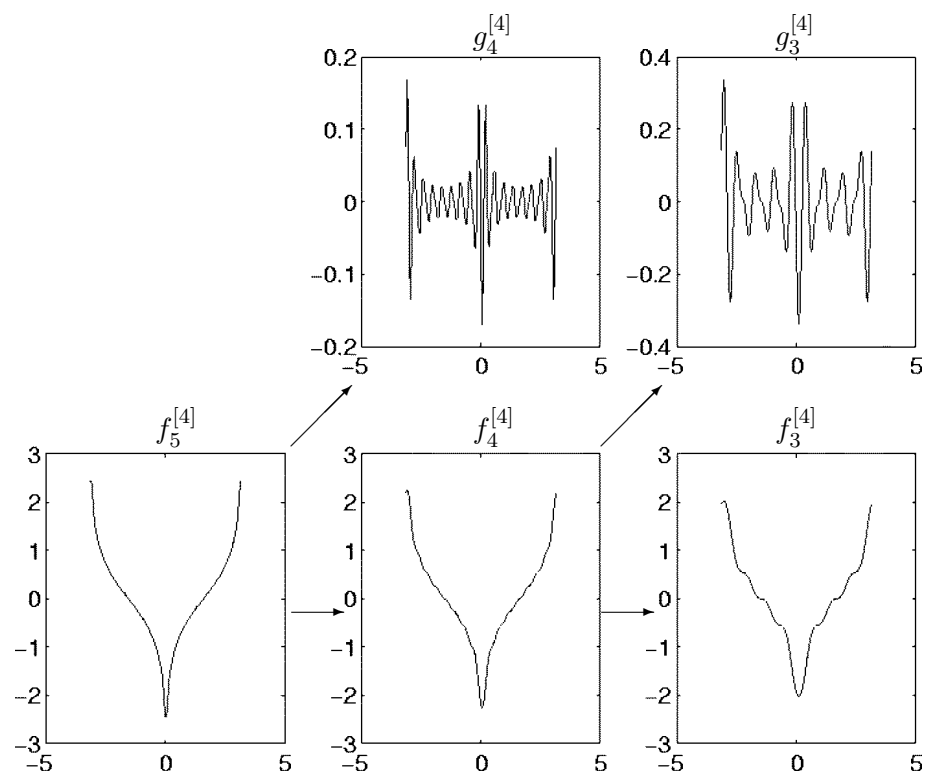


Abbildung 5.6: Zerlegung der Funktion  $f^{[3]}$  in Skalen- und Wavelet-Anteile



Abbildung 5.7: Zerlegung der Funktion  $f^{[4]}$  in Skalen- und Wavelet-Anteile

Als nächstes werden die Ergebnisse der Implementation der über Darstellungen gewonnenen Wavelet-Transformationen vorstellen. Die Rekonstruktionsformel, die auf der stetigen Wavelet-Transformation beruht, habe ich in Maple V implementiert, da MATLAB nur ein Quadraturverfahren beherrscht und damit nur einfache Integrale numerisch berechnen kann. Allerdings zeigte sich, daß diese Rekonstruktionsformel so rechenzeitintensiv ist, daß Ergebnisse nur für die Funktion  $f^{[1]}$  erzielt werden konnten. In jeder Genauigkeitsstufe  $k$  ist die mit Hilfe der Formel (5.6) ermittelte Approximationsfunktion  $f_k^{[1]}$  konstant. In der Abbildung 5.8 ist der Wert der Approximationsfunktion in Abhängigkeit von  $k$  aufgetragen. Man erkennt die Konvergenz gegen den Wert der ursprünglichen Funktion, d.h. gegen 1.

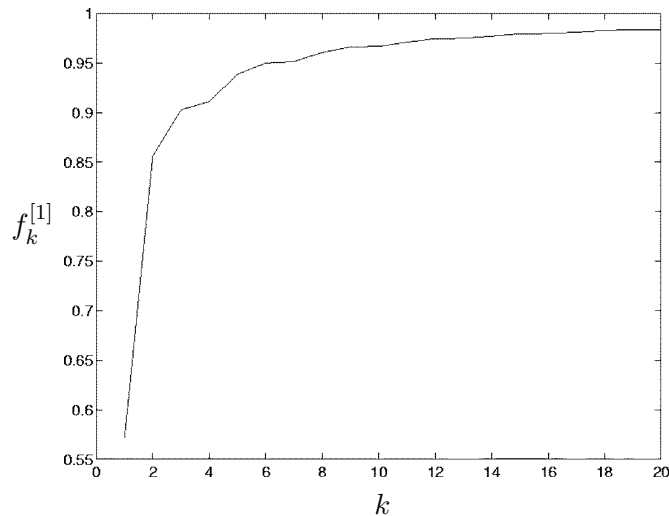


Abbildung 5.8: Konvergenz der Werte  $f_k^{[1]}(0)$  gegen  $f^{[1]}(0)$

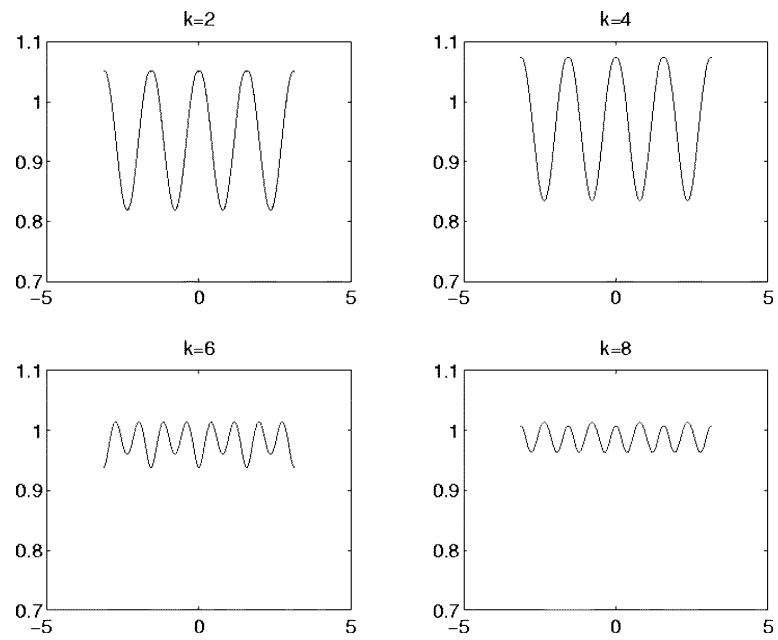
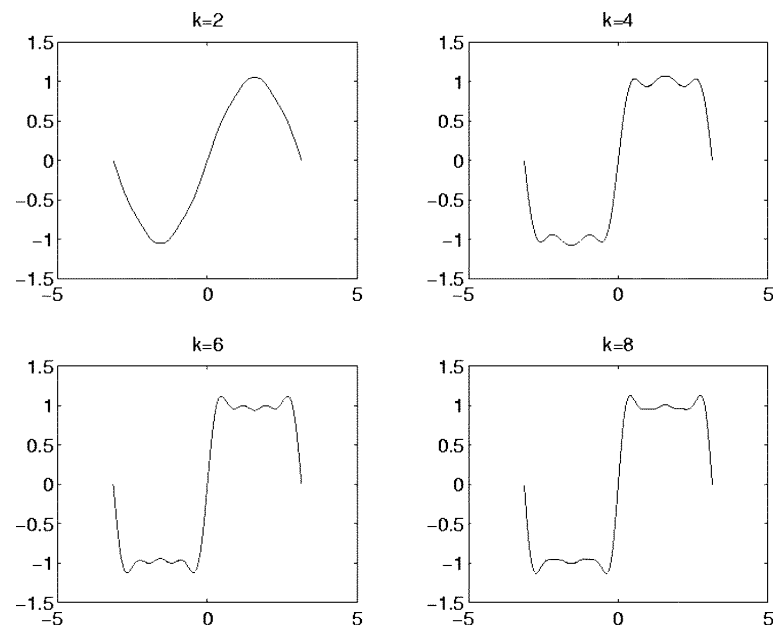
Der Algorithmus ist aber wegen der hohen Rechenzeiten, die im folgenden noch angeführt werden, für die Praxis schlecht zu gebrauchen.

Den Rekonstruktionsalgorithmus (siehe Formel (5.7)), der auf den aus der stetigen Wavelet-Transformation entwickelten Frames basiert, habe ich in MATLAB implementiert. Es wurden wiederum die gleichen vier Testfunktionen benutzt.

Man erkennt bei der Approximation der Funktion  $f^{[1]}$  (siehe Abbildung 5.9) deutlich die mit wachsendem  $k$  größer werdende Frequenz, mit der approximiert wird. Allerdings ist hier die Annäherung an  $f^{[1]}$  viel schlechter als bei der Approximation von Chui, denn dort wurde die Funktion in jeder Stufe exakt approximiert.

Die Approximationen von  $f^{[2]}$  und  $f^{[3]}$  (siehe Abbildung 5.10 und 5.11) zeigen in den Bereichen außerhalb der Unstetigkeitsstellen sehr gute Resultate. Allerdings ist an den Unstetigkeitsstellen selbst ein deutlicher, sich kaum mit wachsendem  $k$  verringernder Ausschlag zu erkennen. Bei beiden Bildern zeigt sich von  $k = 2$  bis  $k = 4$  eine prägnante Verbesserung der Genauigkeit. Bei größer werdendem  $k$  wächst die Genauigkeit der Approximation allerdings immer langsamer. Der Vergleich mit den Ergebnissen des Algorithmus von Chui läßt sich aber nicht mehr mit dem bloßen Auge herstellen. Dazu möchte ich auf die unten folgende experimentelle Normbestimmung der Differenz der Approximationsfunktion mit der Funktion selbst verweisen.

Auch bei der Approximation von  $f^{[4]}$  (siehe Abbildung 5.12) erkennt man die wachsende Genauigkeit durch höher werdende Frequenzen und den rapiden Anstieg der Genauigkeit zu Anfang.

Abbildung 5.9: Approximation von  $f^{[1]}$  durch einen festen FrameAbbildung 5.10: Approximation von  $f^{[2]}$  durch einen festen Frame

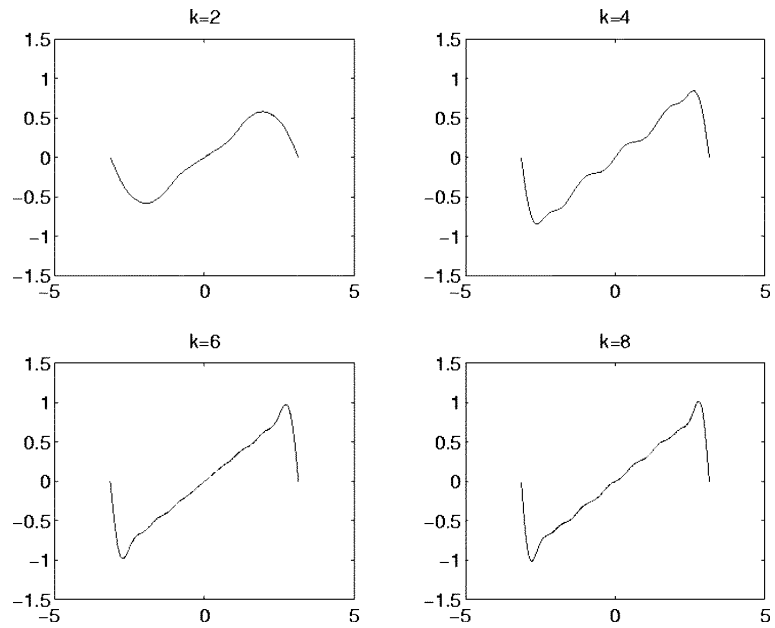


Abbildung 5.11: Approximation von  $f^{[3]}$  durch einen festen Frame

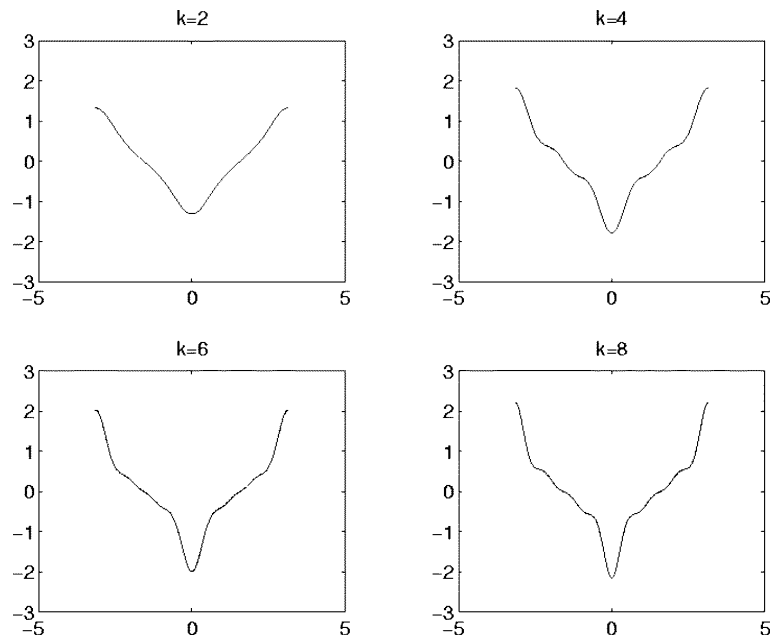


Abbildung 5.12: Approximation von  $f^{[4]}$  durch einen festen Frame

Bis hierhin läßt sich schon sagen, daß die diskrete Version der entwickelten Wavelet-Transformation wesentlich besser und effektiver ist als die stetige.

Im folgenden werden die Laufzeit und die Approximationsgenauigkeit verschiedener Stufen  $n$  bzw.  $k$  experimentell bestimmt. Dadurch werden Aussagen über das schon erwähnte Problem des Verhältnisses von  $n$  zu  $k$  möglich. Die Laufzeiten wurden auf einer Sun SPARCStation 10 gemessen.

Für die experimentelle Laufzeitbestimmung bei Chui habe ich zuerst die Rechenzeiten der Projektion der Funktionen  $f^{[1]}, \dots, f^{[4]}$  in einen Abtastraum  $V_n$  in einem Punkt berechnet. In der Abbildung 5.13 in Bild 1 sind die Laufzeiten für die Funktion  $f^{[2]}$  zu erkennen. Man sieht deutlich den exponentiellen Anstieg der Laufzeit.

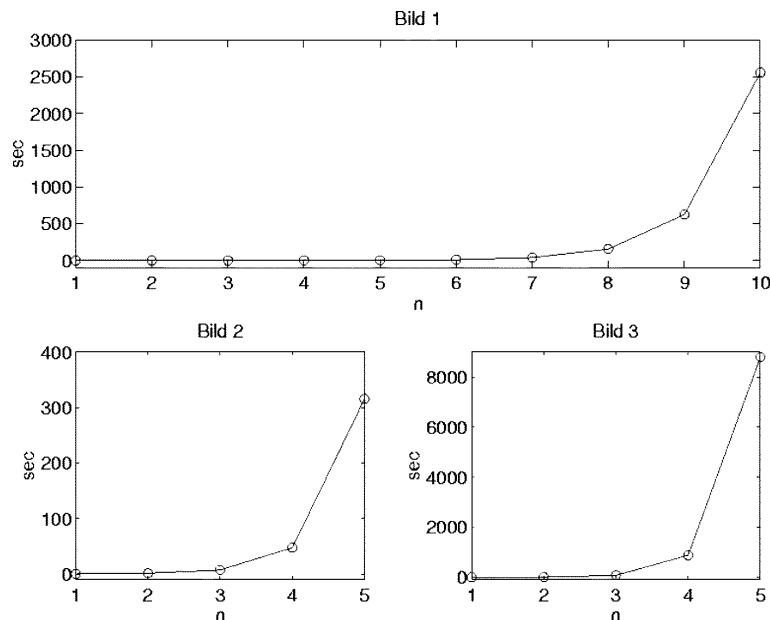


Abbildung 5.13: Laufzeiten des praktischen Ansatzes

In Bild 2 sind die durchschnittlichen Laufzeiten der Zerlegung der Projizierten der Testfunktionen in ihren eine Stufe niedrigeren Skalenanteil, d.h.  $f_n \rightarrow f_{n-1}$ , zu sehen. Auch hier ist der exponentielle Anstieg mit wachsendem  $n$  zu erkennen. Im dritten Bild (Bild 3), das die benötigte Laufzeit zur Zerlegung  $f_n \rightarrow g_{n-1}$  zeigt, ist ebenfalls das exponentielle Wachstum erkennbar. Die theoretischen Ergebnisse haben sich also bestätigt.

Für die Laufzeitanalyse des Algorithmus, der auf der stetigen Wavelet-Transformation beruht, wurde die Testfunktion  $f^{[1]}$  (die anderen Testfunktionen hatten — wie schon erwähnt — zu lange Laufzeiten) in einem Punkt approximiert. Aus dem oberen Bild (Bild 1) der Abbildung 5.14 läßt sich kaum erkennen, ob es sich um einen linearen oder exponentiellen Anstieg handelt. Dazu müßte man die Laufzeiten für größere Werte von  $k$  betrachten. Allerdings kann man nicht sagen, wie sich die Laufzeit oberhalb von  $k = 20$  entwickelt, da dort Messungen aufgrund der langen Laufzeiten nicht mehr möglich waren.

In Bild 2 ist die durchschnittliche Laufzeit des Rekonstruktionsalgorithmus, der auf den hier

entwickelten Frames basiert, gegen die Genauigkeitsstufe  $k$  aufgetragen. Hier wurde wieder der Durchschnitt über alle Testfunktionen genommen. Man erkennt deutlich den schon theoretisch berechneten linearen Anstieg.

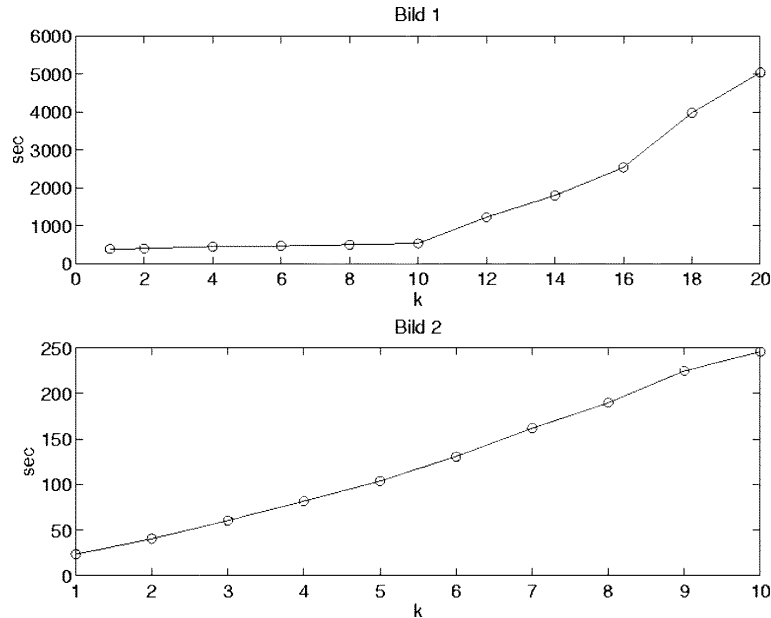


Abbildung 5.14: Laufzeiten der theoretischen Ansätze

Um die Approximationsgenauigkeit zu überprüfen, habe ich äquidistante Punkte des Intervalls  $[-\pi, \pi]$  betrachtet, die den Abstand  $\frac{\pi}{32}$  haben, insgesamt also 65 Stützstellen. Mit Hilfe dieser Stellen habe ich für beide Approximationen die diskrete 2-Norm

$$\sqrt{\sum_{j=0}^{64} |f_t^{[i]}(-\pi + j\frac{\pi}{32}) - f^{[i]}(-\pi + j\frac{\pi}{32})|^2}$$

für alle Testfunktionen  $f^{[i]}$  mit  $t = k$  oder  $t = n$  bestimmt. Im ersten Bild (Bild 1) der Abbildung 5.15 ist die Normabweichung der Approximation mittels Chuis Algorithmus von  $f^{[2]}$  in verschiedenen Stufen  $n$  dargestellt. Man erkennt die mit wachsendem  $n$  langsamer werdende Konvergenz.

Da ich bei der stetigen Wavelet-Transformation nur die Funktion  $f \equiv 1$  untersuchen konnte und man die Normabweichung bei dieser trivialen Funktion schon aus Abbildung 5.8 herauslesen kann, habe ich hier auf eine weitere Analyse verzichtet.

Die Abweichung in der 2-Norm der Approximation von  $f^{[2]}$  mittels des auf Frames basierenden Algorithmus ist in Bild 2 der Abbildung 5.15 für unterschiedliche Stufen  $k$  dargestellt.

In den Bildern 3 und 4 gehört die gestrichelte Gerade zum Algorithmus, der auf den Frames basiert, und die andere zum Algorithmus von Chui. Zur Überprüfung der Beziehung der Approximationsgerade  $n$  und  $k$  wurde im dritten Bild (Bild 3) derselben Abbildung  $k = n$  gesetzt

und beide Kurven aufgetragen. Man sieht, daß die Approximationsgenauigkeit bei Chuis Algorithmus erheblich schneller wächst. Im vierten Bild (Bild 4) wurde auf der  $x$ -Achse  $n = \log(k)$  aufgetragen, d.h.  $k$  wurde logarithmisch aufgetragen. Hier erkennt man, daß ungefähr der Zusammenhang  $O(k) = O(2^n)$  besteht. Daß der Zusammenhang  $O(k) = O(2^{2^n})$  nicht besteht, zeigt das fünfte Bild (Bild 5). Da aber der Approximationsalgorithmus von Chui eine Laufzeit von  $O(2^{2^n})$  hat, ist somit die Laufzeit des Algorithmus, der durch die Frames gegeben wird, selbst im  $O$ -Kalkül besser.

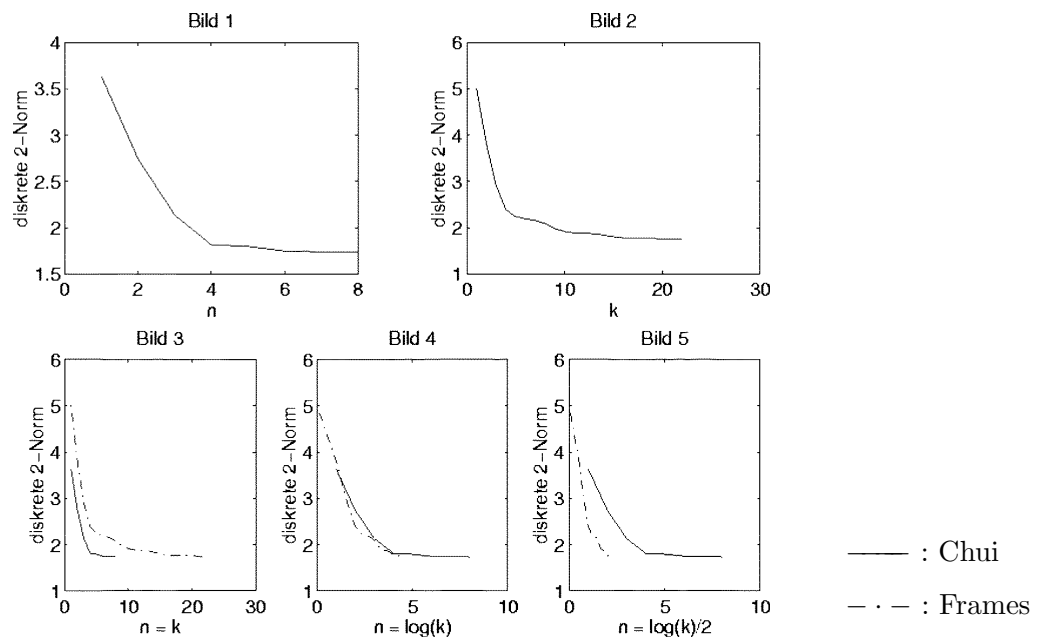


Abbildung 5.15: Vergleich der Laufzeiten

Insgesamt kann man sagen, daß der Algorithmus, der auf der stetigen Wavelet-Transformation beruht, für die Praxis aufgrund der nicht akzeptablen Laufzeit unbrauchbar ist. Dieses liegt insbesondere an den (bedingt durch den allgemeinen Ansatz und der damit verbundenen Rekonstruktionsformel) auftretenden mehrfach geschachtelten Integralen, da jeweils über das Haarmaß der wirkenden Gruppe integriert wird.

Allerdings reicht der Ansatz, der auf einer Diskretisierung der stetigen Wavelet-Transformation basiert, d.h. auf Frames, in Bezug auf die Laufzeit und Approximationsgenauigkeit an den Projektionsteil des Algorithmus von Chui heran. Die Laufzeit ist selbst im  $O$ -Kalkül noch etwas besser. Die Normabweichung der Approximation ist somit auch etwas kleiner, allerdings ist die Approximation durch Frames an den Unstetigkeitsstellen schlechter durch die dort auftretende niedrige Frequenz, aber dafür ist sie im Zwischenbereich besser. Die Schwierigkeit bei der Verwendung des Frame-Ansatzes ist das auftretende Integral, das numerisch berechnet werden muß. Dieses Integral stammt von dem in der diskreten Rekonstruktionsformel vorkommenden Skalarprodukt der zu rekonstruierenden Funktion und der Elemente des Frames. Betrachtet man also Funktionen aus einem Raum  $L^2(X)$ , so wird an dieser Stelle über den Raum  $X$  integriert. Falls das Integral über  $X$  ein mehrfach geschachteltes Integral ist, so entsteht an dieser Stelle

dasselbe Laufzeitproblem, wie wir es bei der stetigen Wavelet-Transformation vorgefunden haben. Ein Rekonstruktionsalgorithmus, der auf dem Konzept der Frames beruht, kann also im wesentlichen nur dann eingesetzt werden, wenn der Raum der zu analysierenden Funktionen eindimensional ist. Es sei denn, das mehrfache Integral läßt sich symbolisch integrieren.

Der praktisch orientierte Ansatz zur Analyse einer Funktion stellt natürlich ein mächtigeres Werkzeug dar als der mit Hilfe von Darstellungen gewonnene Algorithmus, der auf Frames basiert. Denn er bietet nicht nur die Möglichkeit, eine Funktion in einem geeigneten Abstraum zu approximieren, sondern auch eine Funktion in einen hoch- und niedrigfrequenten Anteil zu zerlegen.

Es hat sich also gezeigt, daß von den theoretischen Ansätzen derjenige, der auf aus Darstellungen konstruierten Frames beruht, in Bezug auf die Laufzeit akzeptabel ist. Mit Hilfe der Theorie irreduzibler unitärer Darstellungen scheint es mir somit möglich effiziente Rekonstruktionsalgorithmen zu finden.



# Anhang A

## Invariante Maße auf $SO(n)$ und $S^{n-1}$

In diesem Kapitel wird eine Abbildung konstruiert, die jeder Linksnebenklasse  $A SO(n-1)$ ,  $A \in SO(n)$ , in eindeutiger Weise einen Vertreter aus  $SO(n)$  zuordnet, wobei die Bijektion zwischen  $SO(n)/SO(n-1)$  und  $S^{n-1}$  benutzt wird. Im folgenden wird diese Abbildung als Borel-Schnitt fungieren, um damit alle irreduziblen unitären Darstellungen des semi-direkten Produktes  $SO(n) \times \mathbb{R}^n$  anzugeben. Außerdem wird ein Maß auf  $S^{n-1}$ , das gegenüber Wirkungen von  $SO(n)$ , also Rotationen, invariant ist, und ein Haarmaß auf der unimodularen Gruppe  $SO(n)$  konstruiert. Die grundlegenden Sachverhalte sind in dem Buch von N.J. Vilenkin [Vil 68] zu finden.

### A.1 Beschreibung der $SO(n)$ und Beziehung zur $S^{n-1}$

Zunächst wird die Parametrisierung der  $n$ -dimensionalen Sphäre mittels sphärischer Koordinaten eingeführt. Anschließend wird eine Zerlegung einer Rotationsmatrix  $A$  so konstruiert, daß man  $A$  auf eindeutige Weise eine bestimmte Menge sphärischer Koordinaten zuordnen kann. Zum Schluß wird darauf aufbauend eine bijektive Abbildung von  $S^{n-1} \times SO(n-1)$  nach  $SO(n)$  betrachtet, mit Hilfe der das im nächsten Abschnitt gefundene rotationsinvariante Maß auf  $S^{n-1}$  auf die Rotationsgruppe  $SO(n)$  übertragen wird. Außerdem wird der vorhin erwähnte Borel-Schnitt angegeben.

#### Bemerkung A.1.1

(i)  $SO(k)$  wird im folgenden immer eingebettet in  $SO(n)$ ,  $k < n$ , mittels der Abbildung

$$SO(k) \ni A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0_{n-k} \\ 0_{n-k} & E_{n-k} \end{pmatrix} \in SO(n).$$

Die Abbildung ist injektiv und ein topologischer Isomorphismus auf ihr Bild.

(ii)  $\mathbb{R}^k$  (und damit auch  $S^{k-1}$ ) wird im folgenden immer eingebettet in  $\mathbb{R}^n$ ,  $k < n$ , mittels der Abbildung

$$\mathbb{R}^k \ni x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

**Definition A.1.2**

Zu jedem  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \notin \mathbb{R}e_i$  für  $3 \leq i \leq n$ , existieren eindeutig bestimmte Werte  $r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  mit

$$r > 0 \text{ und } \theta_j \in \begin{cases} [0, 2\pi) & , \text{ falls } j = 1 \\ [0, \pi] & , \text{ falls } j \neq 1 \end{cases} , \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

so daß

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \\ x_2 &= r \sin(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin(\theta_{n-1}) \cos(\theta_{n-2}) \\ x_n &= r \cos(\theta_{n-1}) \end{aligned}$$

gilt. Die Werte  $r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  heißen *sphärische Koordinaten* von  $x$ . Die sphärischen Koordinaten von

(i)  $ke_i$  ( $3 \leq i \leq n$ ,  $k > 0$ ) seien

$$r := k \text{ und } \theta_j := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } j = i-1 \\ \frac{\pi}{2} & , \text{ falls } j \neq i-1 \end{cases} , \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

(ii)  $-ke_i$  ( $3 \leq i \leq n$ ,  $k > 0$ ) seien

$$r := k \text{ und } \theta_j := \begin{cases} \pi & , \text{ falls } j = i-1 \\ \frac{\pi}{2} & , \text{ falls } j \neq i-1 \end{cases} , \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

(iii) 0 seien

$$r := 0 \text{ und } \theta_j := \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

**Bemerkung A.1.3**

(i) Die sphärischen Koordinaten von  $ke_i$  und  $-ke_i$ ,  $3 \leq i \leq n$ ,  $k > 0$ , und von 0 wurden gesondert definiert, damit die Abbildung, die einem Vektor seine sphärischen Koordinaten zuordnet, eindeutig ist.

(ii) Den Beweis der Eindeutigkeit der sphärischen Koordinaten findet man z.B. in [Vil 68]. Die Eindeutigkeit, falls  $x \neq ke_i$  und  $x \neq -ke_i$ ,  $3 \leq i \leq n$ ,  $k > 0$  und  $x \neq 0$  – für diese Vektoren ist die Eindeutigkeit sowieso per Definition klar –, folgt sofort per Induktion aus der Tatsache, daß  $r := \|x\|$  eindeutig festgelegt ist und damit ist  $\theta_{i-1} \in [0, \pi]$ ,  $3 \leq i \leq n$  durch

$$x_i = ra \cos(\theta_{i-1}), \quad a \in [0, 1]$$

eindeutig bestimmt. Außerdem ist  $\theta_1 \in [0, 2\pi)$  durch

$$\begin{aligned} x_1 &= rb \sin(\theta_1) \\ x_2 &= rb \cos(\theta_1) \end{aligned} , \quad b \in [0, 1],$$

eindeutig festgelegt.

**Bezeichnung A.1.4**

Im folgenden sei  $\Lambda : [0, 2\pi) \times [0, \pi]^{n-2} \longrightarrow S^{n-1}$  die Abbildung, die durch

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \\ x_2 &= \sin(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \sin(\theta_{n-1}) \cos(\theta_{n-2}) \\ x_n &= \cos(\theta_{n-1}) \end{aligned}$$

definiert ist. Dabei ist zu beachten, daß diese Abbildung nicht injektiv ist, da z.B. sowohl  $(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}, 0)$  als auch  $(0, \dots, 0)$  auf  $e_n$  abgebildet werden. Es existieren aber nur für die Vektoren  $e_i, -e_i$  ( $3 \leq i \leq n$ ) mehrere Urbilder. Die Abbildung  $\Lambda$  ist also auf dem Definitionsbereich

$$\begin{aligned} D^n &:= [0, 2\pi) \times [0, \pi]^{n-2} \\ &\setminus \{ \theta \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]^{n-2} : \exists! j \in \{2, \dots, n-1\}, \text{ so daß} \\ &\quad (\theta_j = 0 \vee \theta_j = \pi) \wedge (\theta_i \neq \frac{\pi}{2} \forall 1 \leq i < j) \wedge (\theta_i = \frac{\pi}{2} \forall j < i \leq n-1) \text{ gilt.} \} \end{aligned}$$

injektiv. Da trotzdem noch jeder Punkt der Sphäre erreicht wird, ist die Abbildung  $\Lambda$  auf  $D^n$  sogar bijektiv. Es ist noch zu sagen, daß die Menge, die bei der Bildung von  $D^n$  aus  $[0, 2\pi) \times [0, \pi]^{n-2}$  herausdividiert wird, eine Nullmenge in  $[0, 2\pi) \times [0, \pi]^{n-2}$  ist.

**Bezeichnung A.1.5**

$$R_{jk}(\alpha) := \begin{pmatrix} E_{j-1} & & 0_{j-1, k-j+1} & & 0_{j-1, n-k} \\ & \cos(\alpha) & 0 & \dots & 0 & \sin(\alpha) \\ & 0 & & & & 0 \\ 0_{k-j+1, j-1} & \vdots & & E_{k-j-1} & \vdots & 0_{k-j+1, n-k} \\ & 0 & & & & 0 \\ & -\sin(\alpha) & 0 & \dots & 0 & \cos(\alpha) \\ 0_{n-k, j-1} & & 0_{n-k, k-j+1} & & & E_{n-k} \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R}),$$

für  $j > k$ , d.h.  $R_{jk}(\alpha)$  ist die Rotation um den Winkel  $\alpha$  in der  $(x_j, x_k)$ -Ebene. Für  $\alpha = \frac{3}{2}\pi$  bildet diese  $e_j$  auf  $e_k$  ab. Weiter setzen wir

$$R_k(\alpha) := R_{k, k+1}(\alpha).$$

Im folgenden wird zuerst eine Zerlegung

$$A = A^{(n-1)} \dots A^{(1)}$$

für ein  $A \in SO(n)$  bestimmt, wobei  $A^{(k)} \in SO(k+1)$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ . Dabei sind die  $A^{(k)}$  Produkte von Matrizen  $R_j$  für alle  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Anschließend werden jeder Matrix aus  $SO(n)$  auf eindeutige Weise sphärische Koordinaten  $\theta_j^k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $1 \leq j \leq k$ , zugeordnet, so daß darauf aufbauend bijektive Abbildungen

$$\begin{aligned} \psi &: SO(n) \longrightarrow S^{n-1} \times SO(n-1) \\ \varphi &: S^{n-1} \times SO(n-1) \longrightarrow SO(n) \end{aligned}$$

konstruiert werden können mit

$$\varphi = \psi^{-1}.$$

**Lemma A.1.6**

$SO(n)/SO(n-1)$  ist homöomorph zu  $S^{n-1}$  für alle  $n \geq 2$ .

**Beweis:**

$SO(n)$  operiert stetig und transitiv auf  $S^{n-1}$  mittels der Abbildung

$$SO(n) \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}, \quad (A, s) \longmapsto As.$$

Es gilt

$$Ae_n = e_n \iff A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } B \in SO(n-1),$$

d.h. genau die Rotationen aus  $SO(n-1)$  lassen  $e_n$  invariant, wobei

$$\left\{ \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}; B \in SO(n-1) \right\} \cong SO(n-1), \text{ siehe Bem. A.1.1 (i).}$$

Seien  $p$  die Projektion

$$p : SO(n) \longrightarrow SO(n)/SO(n-1), \quad A \longmapsto A SO(n-1)$$

und  $\phi$  die Abbildung

$$\phi : SO(n) \longrightarrow S^{n-1}, \quad A \longmapsto Ae_n.$$

Sei  $A \in SO(n)$ . Für  $A' := \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$  und ein beliebiges, aber festes  $B \in SO(n-1)$  gilt

$$\phi(AA') = AA'e_n = Ae_n = \phi(A).$$

Zur Definition eines Homöomorphismus  $\tilde{\phi}$  betrachten wir das Diagramm A.1. Wir definieren daher

$$\tilde{\phi} : SO(n)/SO(n-1) \rightarrow S^{n-1}, \quad A SO(n-1) \mapsto \phi(A) = Ae_n \in S^{n-1}.$$

Mit dieser Definition ist das Diagramm kommutativ, d.h.  $\tilde{\phi} \circ p = \phi$ . Da  $p$  Projektion auf den Quotientenraum ist, ist  $\tilde{\phi}$  stetig. Außerdem ist natürlich  $\tilde{\phi}$  bijektiv. Da  $SO(n)/SO(n-1)$  kompakt und  $S^{n-1}$  hausdorffsch ist, ist  $\tilde{\phi}$  ein Homöomorphismus. ■

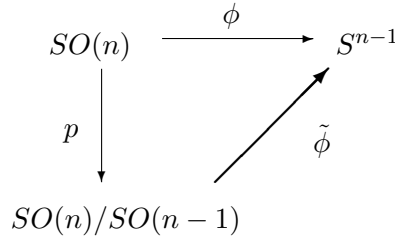


Abbildung A.1: Diagramm zum Beweis von Lemma A.1.6

**Satz A.1.7**

Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  und  $A \in SO(n)$  gibt es eindeutig bestimmte  $\theta_j^k$ , wobei

$$\theta_j^k \in \begin{cases} [0, 2\pi) & , \text{ falls } j = 1 \\ [0, \pi] & , \text{ falls } j \neq 1 \end{cases} , \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq k,$$

mit der folgenden Eigenschaft:

Mit  $A^{(k)} = R_1(\theta_1^k) \dots R_k(\theta_k^k)$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , gilt

$$A = A^{(n-1)} \dots A^{(1)}.$$

Umgekehrt definiert „jeder Satz“ von  $\theta_j^k$  auf diese Weise ein  $A \in SO(n)$ .

**Definition A.1.8**

Die  $\theta_j^k$  heißen die *Euler-Winkel* von  $A$ .

**Beweis zu Satz A.1.7:**

Der Beweis wird geführt mittels Induktion nach  $n$ .

$n = 2$ :

Sei  $A \in SO(2)$  beliebig. Dann existiert genau ein  $\theta \in [0, 2\pi)$  mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R_1(\theta) = A^{(1)}.$$

Damit gilt  $A = A^{(1)}$ .

$n - 1 \rightarrow n$ :

Sei  $A \in SO(n)$  beliebig und seien  $\theta_1^{n-1}, \dots, \theta_{n-1}^{n-1}$  die sphärischen Koordinaten von  $Ae_n \in S^{n-1}$ .

Betrachte

$$A^{(n-1)} = R_1(\theta_1^{n-1}) \dots R_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1}).$$

Wir zeigen zunächst als Zwischenbehauptung

$$A^{(n-1)}e_n = Ae_n.$$

Dafür genügt es zu zeigen, daß

$$A^{(n-1)}e_n = R_1(\theta_1^{n-1}) \dots R_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})e_n = \begin{pmatrix} \sin(\theta_{n-1}^{n-1}) & \cdots & \sin(\theta_2^{n-1}) & \sin(\theta_1^{n-1}) \\ \sin(\theta_{n-1}^{n-1}) & \cdots & \sin(\theta_2^{n-1}) & \cos(\theta_1^{n-1}) \\ \vdots & & & \\ \sin(\theta_{n-1}^{n-1}) & \cos(\theta_{n-2}^{n-1}) & & \\ \cos(\theta_{n-1}^{n-1}) & & & \end{pmatrix},$$

da  $\theta_1^{n-1}, \dots, \theta_{n-1}^{n-1}$  die sphärischen Koordinaten von  $Ae_n$  sind.

Wir zeigen durch Induktion

$$R_l(\theta_l^{n-1}) \dots R_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})e_n = \begin{pmatrix} & & & & 0_{l-1,1} \\ \sin(\theta_{n-1}^{n-1}) & \dots & \sin(\theta_{l+1}^{n-1}) & \sin(\theta_l^{n-1}) \\ \sin(\theta_{n-1}^{n-1}) & \dots & \sin(\theta_{l+1}^{n-1}) & \cos(\theta_l^{n-1}) \\ \vdots & & & \\ \sin(\theta_{n-1}^{n-1}) & \cos(\theta_{n-2}^{n-1}) \\ \cos(\theta_{n-1}^{n-1}) \end{pmatrix} =: B_l.$$

$l = n - 1$ :

$$R_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})e_n = \begin{pmatrix} & & & & 0 & 0 \\ & E_{n-2} & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \cos(\theta_{n-1}^{n-1}) & \sin(\theta_{n-1}^{n-1}) \\ 0 & \dots & 0 & -\sin(\theta_{n-1}^{n-1}) & \cos(\theta_{n-1}^{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n-2,1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_{n-1}$$

$l \rightarrow l - 1$ :

$$R_{l-1}(\theta_{l-1}^{n-1})B_l = \begin{pmatrix} & & & & 0 & 0 \\ & E_{l-2} & & & \vdots & \vdots & & & 0_{l-2,n-l} \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \cos(\theta_{l-1}^{n-1}) & \sin(\theta_{l-1}^{n-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\sin(\theta_{l-1}^{n-1}) & \cos(\theta_{l-1}^{n-1}) & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ 0_{n-l,l-2} & & & & \vdots & \vdots & & E_{n-l} \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} B_l = B_{l-1},$$

wie man leicht durch Nachrechnen einsieht. Damit ist insgesamt  $A^{(n-1)}e_n = Ae_n$  gezeigt. Daraus folgt

$$\left[ A^{(n-1)} \right]^{-1} Ae_n = e_n.$$

Sei  $B \in SO(n-1)$  mit

$$\left[ A^{(n-1)} \right]^{-1} A = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & B & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Die Existenz einer solchen Matrix  $B$  wurde bereits im Beweis von Lemma A.1.6 gezeigt.) Für  $B$  gilt nach Induktionsvoraussetzung:

Es existieren

$$\theta_j^k \in \begin{cases} [0, 2\pi) & , \text{ falls } j = 1 \\ [0, \pi] & , \text{ falls } j \neq 1 \end{cases}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq k$$

mit

$$B = B^{(n-2)} \dots B^{(1)}, \text{ wobei}$$

$$B^{(k)} = R_1(\theta_1^k) \dots R_k(\theta_k^k) \in M(n-1, \mathbb{R}), \quad 1 \leq k \leq n-2.$$

Setze

$$A^{(k)} := \begin{pmatrix} & & 0 \\ & B^{(k)} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n-2.$$

Es ist leicht einzusehen, daß dann gilt

$$A^{(k)} = R_1(\theta_1^k) \dots R_k(\theta_k^k) \in M(n, \mathbb{R}) \text{ für alle } 1 \leq k \leq n-2 \quad \text{und} \quad B = B^{(n-2)} \dots B^{(1)}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} & & 0 \\ & B & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} & & 0 \\ & B^{(n-2)} & \dots & B^{(1)} & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & & 0 \\ & B^{(n-2)} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} & & 0 \\ & B^{(1)} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow [A^{(n-1)}]^{-1} A &= A^{(n-2)} \dots A^{(1)} \\ \Rightarrow A &= A^{(n-1)} A^{(n-2)} \dots A^{(1)} \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit der Zerlegung von  $A$  ist folgendes zu sagen:

Es gelte

$$A = A^{(n-1)} \dots A^{(1)} = B^{(n-1)} \dots B^{(1)}.$$

Da  $A^{(n-2)} \dots A^{(1)}$  und  $B^{(n-2)} \dots B^{(1)}$  Elemente von  $SO(n-1)$  sind nach Lemma A.1.9 (Dieses Lemma benutzt nicht die Eindeutigkeit der Darstellung.), gilt

$$A^{(n-2)} \dots A^{(1)} = B^{(n-2)} \dots B^{(1)}$$

nach Induktionsvoraussetzung. Daraus folgt  $A^{(n-1)} = B^{(n-1)}$ . Seien

$$A^{(n-1)} = R_1(\theta_1^{n-1}) \dots R_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1}) \text{ und } B^{(n-1)} = R_1(\vartheta_1^{n-1}) \dots R_{n-1}(\vartheta_{n-1}^{n-1}).$$

Aus der speziellen Gestalt der Matrizen  $A^{(n-1)}$  und  $B^{(n-1)}$  und dem Definitionsbereich von  $\theta^{n-1}$  und  $\vartheta^{n-1}$  läßt sich leicht erkennen, daß

$$\theta^{n-1} = \vartheta^{n-1}$$

gilt. (Man folgert zuerst  $\theta_{n-1}^{n-1} = \vartheta_{n-1}^{n-1}$ , dann induktiv für alle.) ■

**Lemma A.1.9**

Sei  $A \in SO(n)$  beliebig,  $n \geq 2$  und  $A$  dargestellt in der Form aus Satz A.1.7.

Dann gilt

$$A^{(k)} \in SO(k+1) \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq n-1.$$

**Beweis:**

Sei  $A \in SO(n)$  und  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  beliebig,  $n \geq 2$ .

Es gilt

$$A^{(k)} = R_1(\theta_1^k) \dots R_k(\theta_k^k), \text{ wobei}$$

$$\theta_j^k \in \begin{cases} [0, 2\pi) & , \text{ falls } j = 1 \\ [0, \pi] & , \text{ falls } j \neq 1 \end{cases}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Sei  $i \in \{1, \dots, k\}$  beliebig. Dann gilt

$$R_i(\theta_i^k) = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 & & & & \\ & & & \vdots & \vdots & & & & 0_{i-1, n-(i+1)} \\ & E_{i-1} & & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \cos(\theta_i^k) & \sin(\theta_i^k) & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & -\sin(\theta_i^k) & \cos(\theta_i^k) & 0 & \dots & 0 & \\ & & & 0 & 0 & & & & \\ 0_{n-(i+1), i-1} & & & \vdots & \vdots & & & & E_{n-(i+1)} \\ & & & 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Es existieren also  $C_i^k \in SO(i+1)$  mit

$$R_i(\theta_i^k) = \begin{pmatrix} C_i^k & 0_{i+1, n-(i+1)} \\ 0_{n-(i+1), i+1} & E_{n-(i+1)} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} R_i(\theta_i^k) &\in SO(i+1) \\ \implies A^{(k)} &= R_1(\theta_1^k) \dots R_k(\theta_k^k) \in SO(k+1). \end{aligned}$$

■

**Satz A.1.10**

Sei  $A \in SO(n)$  beliebig,  $n \geq 2$ . Dann sind  $\theta_1^{n-1}, \dots, \theta_{n-1}^{n-1}$  die sphärischen Koordinaten des Vektors

$$\eta_n := Ae_n$$

und für jedes  $1 \leq k \leq n-2$  sind  $\theta_1^k, \dots, \theta_k^k$  die sphärischen Koordinaten des Vektors

$$\eta_{k+1} := [A^{(n-1)} \dots A^{(k+1)}]^{-1} Ae_{k+1}.$$

Ferner gilt

$$\eta_k \in S^{k-1} \quad \text{für alle } 2 \leq k \leq n.$$



**Beweis:**

(a) Wir beweisen  $A = A^{(n-1)} \dots A^{(1)}$ , wobei  $A^{(k)} = R_1(\theta_1^k) \dots R_k(\theta_k^k)$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , mittels vollständiger Induktion.

$n = 2$ :

Sei  $A \in SO(2)$  beliebig. Dann existiert ein  $\theta \in [0, 2\pi)$  mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Die sphärische Koordinate des Vektors  $\eta_2 = Ae_2$  ist nach Definition gerade  $\theta$ . Damit folgt

$$A = A^{(1)} = R_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

$n-1 \rightarrow n$ :

Sei  $A \in SO(n)$  beliebig und seien  $\theta_1^{n-1}, \dots, \theta_{n-1}^{n-1}$  die sphärischen Koordinaten des Vektors  $\eta_n = Ae_n$ . Analog zum Beweis von Satz A.1.7 folgert man

$$\left[ A^{(n-1)} \right]^{-1} A \in SO(n-1).$$

Daraus folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$\left[ A^{(n-1)} \right]^{-1} A = A^{(n-2)} \dots A^{(1)}, \text{ wobei}$$

- $\theta_1^{n-2}, \dots, \theta_{n-2}^{n-2}$  die sphärischen Koordinaten des Vektors

$$\left[ A^{(n-1)} \right]^{-1} Ae_{n-1}$$

sind, womit  $A^{(n-2)} = R_1(\theta_1^{n-2}) \dots R_{n-2}(\theta_{n-2}^{n-2})$  gilt, und

- $\theta_1^k, \dots, \theta_k^k$  die sphärischen Koordinaten des Vektors

$$\left[ A^{(n-2)} \dots A^{(k+1)} \right]^{-1} \left[ A^{(n-1)} \right]^{-1} Ae_{k+1} = \left[ A^{(n-1)} \dots A^{(k+1)} \right]^{-1} Ae_{k+1}$$

sind. Deshalb gilt  $A^{(k)} = R_1(\theta_1^k) \dots R_k(\theta_k^k)$  für alle  $1 \leq k \leq n-3$  durch Induktion.

(b) Sei  $A \in SO(n)$  beliebig,  $n \geq 2$ . Es gilt  $\eta_n \in S^{n-1}$  wegen

$$\|\eta_n\| = \|Ae_n\| = \|e_n\| = 1.$$

Wir betrachten jetzt ein beliebiges  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ . Dafür gilt

$$\begin{aligned}\eta_k &= \left[ A^{(n-1)} \dots A^{(k)} \right]^{-1} A e_k \\ &= A^{(k-1)} \dots A^{(1)} e_k \\ &= A^{(k-1)} e_k,\end{aligned}$$

da nach Lemma A.1.9  $A^{(j)}$  ein Element von  $SO(j+1)$  für alle  $1 \leq j \leq k-2$  ist und somit gilt  $A^{(k-2)}, \dots, A^{(1)} \in SO(k-1)$ . Damit folgt

$$\begin{aligned}\eta_k &= A^{(k-1)} e_k \\ &= R_1(\theta_1^{k-1}) \dots R_{k-1}(\theta_{k-1}^{k-1}) e_k \\ &= \begin{pmatrix} \eta_k^{(1)} \\ \vdots \\ \eta_k^{(k)} \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$\eta_k^{(i)} \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , da die Rotationen  $R_1, \dots, R_{k-1}$  die letzten  $n-k$  Komponenten invariant lassen. Ferner gilt

$$\|\eta_k\| = \|A^{(k-1)} e_k\| = \|e_k\| = 1,$$

da nach Lemma A.1.9  $A^{(k-1)}$  ein Element von  $SO(k)$  ist. Damit ist  $\eta_k \in S^{k-1}$  gezeigt. ■

### Bemerkung A.1.11

Analog zu Bezeichnung A.1.4 ist auch die Abbildung, die einem Element der  $SO(n)$  seine Euler-Winkel zuordnet, bis auf eine Nullmenge bijektiv.

Wir definieren jetzt bijektive Abbildungen  $\psi$  und  $\varphi$  zwischen  $SO(n)$  und  $S^{n-1} \times SO(n-1)$ , wobei  $\varphi$  die Umkehrabbildung von  $\psi$  ist. Wie zu Beginn des Kapitels schon erwähnt, wird im nächsten Abschnitt das normierte Haarmaß auf  $SO(n)$  als Bildmaß des Maßes auf  $S^{n-1}$  unter der Abbildung  $\varphi$  bestimmt.

### Bemerkung A.1.12

Seien  $A \in SO(n)$  und  $B \in SO(n-1)$  beliebig,  $n \geq 2$ . Zu jedem  $\xi \in S^{n-1}$  sei

$$R_\xi := R_1(\theta_1) \dots R_{n-1}(\theta_{n-1}),$$

wobei  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  die sphärischen Koordinaten von  $\xi$  sind.

Für dieses Kapitel wollen wir  $\psi$  und  $\varphi$  folgendermaßen definieren:

$\psi : SO(n) \longrightarrow S^{n-1} \times SO(n-1)$  sei die Abbildung mit

$$A \longmapsto (A e_n, A^{(n-2)} \dots A^{(1)}),$$

und  $\varphi : S^{n-1} \times SO(n-1) \longrightarrow SO(n)$  die Abbildung mit

$$(\xi, B) \longmapsto R_\xi B.$$

**Lemma A.1.13**

Seien  $\xi \in S^{n-1}$  und  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  die sphärischen Koordinaten von  $\xi$ . Sei ferner  $R_\xi$  definiert wie in Bemerkung A.1.12. Dann gilt

$$R_\xi^{(n-1)} = R_\xi \quad \text{und} \quad R_\xi e_n = \xi.$$

**Beweis:**

$R_\xi$  hat die Gestalt  $R_1(\theta_1) \dots R_{n-1}(\theta_{n-1})$  und ist damit ein Element von  $SO(n)$ . Wegen der Eindeutigkeit der Euler-Winkel gilt

$$\theta_j^k = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } 1 \leq k < n-1 \\ \theta_j & , \text{ falls } k = n-1 \end{cases} \quad , \quad 1 \leq j \leq k,$$

für die Euler-Winkel  $\theta_j^k$  von  $R_\xi$ , also die erste Gleichung der Behauptung. Nach Satz A.1.10 sind  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  die sphärischen Koordinaten von  $R_\xi e_n$ . Damit folgt die zweite Gleichung. ■

**Satz A.1.14**

Für  $\psi$  und  $\varphi$  aus Bemerkung A.1.12 gelten folgende Aussagen:

- (i)  $\varphi \circ \psi = id_{SO(n)}$ ,
- (ii)  $\psi \circ \varphi = id_{S^{n-1} \times SO(n-1)}$  und
- (iii)  $\varphi$  ist meßbar.

**Beweis:**

- (i) Sei  $A \in SO(n)$  beliebig,  $n \geq 2$ , seien  $\theta_j^k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $1 \leq j \leq k$  die Euler-Winkel von  $A$  und  $A^{(k)} := R_1(\theta_1^k) \dots R_k(\theta_k^k)$ ,  $1 \leq k \leq n-2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(A)) &= \varphi(Ae_n, A^{(n-2)} \dots A^{(1)}) \\ &= R_1(\theta_1^{n-1}) \dots R_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1}) A^{(n-2)} \dots A^{(1)} \\ &= A. \end{aligned}$$

Denn nach Satz A.1.10 sind  $\theta_1^{n-1}, \dots, \theta_{n-1}^{n-1}$  die sphärischen Koordinaten von  $Ae_n$ .

- (ii) Seien  $\xi \in S^{n-1}$  und  $B \in SO(n-1)$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(\xi, B)) &= \psi(R_\xi B) \\ &= (R_\xi B e_n, (R_\xi B)^{(n-2)} \dots (R_\xi B)^{(1)}) \\ &\stackrel{B \in SO(n-1)}{=} (R_\xi e_n, (R_\xi B)^{(n-2)} \dots (R_\xi B)^{(1)}) \\ &\stackrel{\text{Lemma A.1.13}}{=} (\xi, (R_\xi B)^{(n-2)} \dots (R_\xi B)^{(1)}) \\ &= (\xi, [(R_\xi B)^{(n-1)}]^{-1} (R_\xi B)) \\ &\stackrel{B \in SO(n-1)}{=} (\xi, [(R_\xi)^{(n-1)}]^{-1} (R_\xi B)) \\ &\stackrel{\text{Lemma A.1.13}}{=} (\xi, (R_\xi)^{-1} R_\xi B) \\ &= (\xi, B). \end{aligned}$$

(iii) Wir definieren

$$C := \{e_i : 3 \leq i \leq n\} \cup \{-e_i : 3 \leq i \leq n\}.$$

Auf  $(S^{n-1} \setminus C) \times SO(n-1)$  ist  $\varphi$  trivialerweise sogar stetig, also erst recht meßbar, denn es gilt für ein  $(\xi, A) \in (S^{n-1} \setminus C) \times SO(n-1)$

$$(\xi, A) \xrightarrow{\text{stetig}} ((\theta_1, \dots, \theta_{n-1}), A) \xrightarrow{\text{stetig}} (R_\xi, A) \xrightarrow{\text{stetig}} R_\xi A.$$

Betrachte jetzt  $\varphi|_{C \times SO(n-1)}$ . Es gilt

$$\varphi(C \times SO(n-1)) = \bigcup_{i=3}^n R_{e_i} SO(n-1) \cup \bigcup_{i=3}^n R_{-e_i} SO(n-1) =: D.$$

Man kann  $SO(n)$  in

$$SO(n) = \bigsqcup_{\xi \in S^{n-1}} R_\xi SO(n-1)$$

zerlegen, denn falls  $R_\xi A = R_\eta B$  für beliebige  $\xi, \eta \in S^{n-1}$  und  $A, B \in SO(n-1)$ , dann folgt, da  $\varphi$  bijektiv ist,

$$\varphi^{-1}(R_\xi A) = \varphi^{-1}(R_\eta B) \implies (\xi, A) = (\eta, B) \implies \xi = \eta \text{ und } A = B.$$

Sei jetzt  $B \subseteq SO(n)$  meßbar, beliebig. Dann gibt es drei Fälle:

(a)  $B \subseteq SO(n) \setminus D$ :

Daraus folgt  $\varphi^{-1}(B) \subseteq (S^{n-1} \setminus C) \times SO(n-1)$ . Dann ist  $\varphi^{-1}(B)$  meßbar, da auf diesem Bereich  $\varphi$  sogar stetig ist.

(b)  $B \subseteq D$ :

Dann existieren  $B_i, B_{-i} \subseteq SO(n-1)$ ,  $1 \leq i \leq 3$  meßbar mit

$$B = \bigcup_{i=3}^n R_{e_i} B_i \cup \bigcup_{i=3}^n R_{-e_i} B_{-i}.$$

Da  $\varphi$  bijektiv ist, gilt

$$\begin{aligned} & \{(e_i, A) : A \in B_i \quad \forall 1 \leq i \leq 3\} \cup \{(-e_i, A) : A \in B_{-i} \quad \forall 1 \leq i \leq 3\} \\ &= \varphi^{-1}(B) \subseteq C \times SO(n-1). \end{aligned}$$

Damit ist  $\varphi^{-1}(B)$  meßbar.

(c)  $B \subseteq SO(n)$  und es existieren  $B_1, B_2 \neq \emptyset$  meßbar mit  $B = B_1 \cup B_2$  und  $B_1 \subseteq SO(n) \setminus D$  und  $B_2 \subseteq D$  ( $B_1 := B \cap (SO(n) \setminus D)$ ,  $B_2 := B \cap D$ ):

Da  $\varphi$  bijektiv ist, gilt

$$\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B_1) \cup \varphi^{-1}(B_2).$$

$\varphi^{-1}(B_1)$  ist meßbar nach Fall (a) und  $\varphi^{-1}(B_2)$  nach Fall (b). Damit ist auch  $\varphi^{-1}(B)$  meßbar. ■

**Folgerung A.1.15**

Es gilt

- (i)  $\psi$  und  $\varphi$  sind bijektiv,
- (ii)  $\psi$  ist meßbar.

**Beweis:**

- (i) folgt sofort aus Satz A.1.14 (i) und (ii).
- (ii) folgt, da  $S^{n-1} \times SO(n-1)$  und  $SO(n)$  analytische Borelräume sind,  $\psi$  meßbar (Satz A.1.14 (iii)), injektiv (Folg. A.1.15 (i)) und die Umkehrabbildung von  $\varphi$  ist (Satz A.1.14 (i) und (ii)). Das verwendete Korollar findet sich in [Arv 76]. ■

Zuletzt wird noch der in der Einleitung dieses Kapitels angekündigte Borel-Schnitt bestimmt.

**Lemma A.1.16**

Die Abbildung

$$c' : SO(n)/SO(n-1) \longrightarrow SO(n), \quad A SO(n-1) \longmapsto R_{Ae_n}$$

ist ein Borel-Schnitt.

**Beweis:**

Zum Beweis, daß  $c'$  ein Borel-Schnitt ist, muß  $p c' = 1_{SO(n)/SO(n-1)}$  gezeigt werden, wobei  $p$  die Quotientenabbildung ist. Sei dazu  $A \in SO(n)$  beliebig. Dann gilt

$$p(c'(A SO(n-1))) = p(R_{Ae_n}) = R_{Ae_n} SO(n-1).$$

Da nach Satz A.1.10 und Lemma A.1.9

$$A = R_{Ae_n} B, \quad \text{für ein } B \in SO(n-1)$$

gilt, folgt sofort

$$A SO(n-1) = R_{Ae_n} SO(n-1).$$

$c'$  ist Borel-meßbar, da die Abbildungen  $\psi$  und  $\varphi$  nach Satz A.1.14 und Folgerung A.1.15 Borel-meßbar sind. ■

**A.2 Bestimmung der invarianten Maße auf  $SO(n)$  und  $S^{n-1}$** 

Zuerst soll ein Maß auf  $S^{n-1}$  gefunden werden, das invariant gegenüber Operationen der  $SO(n)$ , d.h. gegenüber Rotationen ist.

**Lemma A.2.1**

Sei  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(r \sin(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2) \sin(\theta_1), r \sin(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2) \cos(\theta_1), \dots, r \cos(\theta_{n-1}))$$

$$\cdot r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1}(\theta_j) d\theta_{n-j} dr = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \dots dx_n.$$

**Beweis:**

Man betrachte  $\phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\phi(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = (\phi_1(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}), \dots, \phi_n(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})),$$

wobei

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r \sin(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \\ \phi_2(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r \sin(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) \\ &\vdots \\ \phi_{n-1}(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r \sin(\theta_{n-1}) \cos(\theta_{n-2}) \\ \phi_n(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r \cos(\theta_{n-1}), \end{aligned}$$

d.h.  $\phi$  bildet sphärische Koordinaten auf die zugehörigen euklidischen Koordinaten ab. Für die Determinante der Jacobi-Matrix  $J_\phi$  der Abbildung  $\phi$  ergibt sich

$$\det J_\phi(\theta) = r^{n-1} \sin^{n-2}(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2).$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

**Definition A.2.2**

Sei  $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$  beliebig, stetig. Wir definieren  $f_\epsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 < \epsilon < 1$ , durch

$$f_\epsilon(x) := \begin{cases} \frac{n}{(1+\epsilon)^n - (1-\epsilon)^n} f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & , \text{ falls } 1 - \epsilon \leq \|x\| \leq 1 + \epsilon \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Weiterhin wird definiert

$$\int_{S^{n-1}} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_{\frac{1}{2}}(x) dx.$$

**Satz A.2.3**

Sei  $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gelten folgende Aussagen:

$$(i) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(\sin(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2) \sin(\theta_1), \sin(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2) \cos(\theta_1), \dots, \cos(\theta_{n-1}))$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1}(\theta_j) d\theta_{n-j} = \int_{S^{n-1}} f(x) dx.$$

(ii) Das hierdurch definierte Maß auf  $S^{n-1}$  ist rotationsinvariant.

**Beweis:**

Sei  $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$  beliebig, stetig. Sei ferner  $f_\epsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  definiert wie in Definition A.2.2. ( $f_\epsilon$  ist meßbar, da  $f_\epsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$  ist.) Wir setzen zur Vereinfachung

$$\begin{aligned}\theta &:= (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \\ \det J(\theta) &:= \prod_{j=2}^{n-1} \sin^{j-1}(\theta_j).\end{aligned}$$

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f_{\frac{1}{2}}(x) dx \\ &\stackrel{\text{Lemma A.2.1}}{=} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f_{\frac{1}{2}}(r\Lambda(\theta)) r^{n-1} \det J(\theta) d\theta_{n-1} \dots d\theta_1 dr \\ &\stackrel{\text{Def. A.2.2}}{=} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} f\left(\frac{1}{r}(r\Lambda(\theta))\right) r^{n-1} \det J(\theta) d\theta_{n-1} \dots d\theta_1 dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(\Lambda(\theta)) \det J(\theta) \left[ \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} r^{n-1} dr \right] d\theta_{n-1} \dots d\theta_1 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(\Lambda(\theta)) \det J(\theta) \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \left[ \frac{1}{n} r^n \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \right] d\theta_{n-1} \dots d\theta_1 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(\Lambda(\theta)) \det J(\theta) d\theta_{n-1} \dots d\theta_1.\end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil bewiesen.

(ii) Sei  $A \in SO(n)$  beliebig. Es ist

$$\int_{S^{n-1}} f(Ax) dx = \int_{S^{n-1}} f(x) dx$$

zu zeigen. Definiere  $g : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$g(x) := f(Ax).$$

Nach Definition A.2.2 gilt

$$\begin{aligned}g_{\frac{1}{2}}(x) &= \begin{cases} \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & , \text{ falls } \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq \frac{3}{2} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} f\left(A \frac{x}{\|x\|}\right) & , \text{ falls } \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq \frac{3}{2} \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

Damit folgt, da das Lebesgue-Maß rotationsinvariant ist,

$$\begin{aligned}
 \int_{S^{n-1}} f(Ax) \, dx &= \int_{S^{n-1}} g(x) \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} g_{\frac{1}{2}}(x) \, dx \\
 &= \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(A \frac{x}{\|x\|}\right) \, dx \\
 &= \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f_{\frac{1}{2}}(x) \, dx \\
 &= \int_{S^{n-1}} f(x) \, dx.
 \end{aligned}$$

■

Das gefundene Maß auf  $S^{n-1}$  muß noch normiert werden.

**Lemma A.2.4**

Es gilt

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi^n}} \int_{S^{n-1}} 1 \, dx = 1,$$

d.h.  $\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi^n}}$  ist der gesuchte Normierungsfaktor.

**Beweis:**

Es ist bekannt, daß

$$\int_0^\pi \sin^{k-1}(\theta_k) \, d\theta_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \quad \text{für alle } 2 \leq k \leq n$$

und

$$\int_0^{2\pi} q \, d\theta_1 = 2\pi$$

gilt. Damit läßt sich das Lemma folgendermaßen beweisen:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi^n}} \int_{S^{n-1}} 1 \, dx \stackrel{\text{Satz A.2.3}}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi^n}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi 1 \cdot \sin^{n-2}(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2) \, d\theta_{n-1} \dots d\theta_1$$



$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi^n}} \int_0^\pi \sin^{n-2}(\theta_{n-1}) d\theta_{n-1} \dots \int_0^\pi \sin(\theta_2) d\theta_2 \int_0^{2\pi} 1 d\theta_1 \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi^n}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \dots \frac{\Gamma(1)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})} 2\pi \\
&= \frac{\Gamma(1)}{2\sqrt{\pi^n}} 2\pi (\sqrt{\pi})^{n-2} \\
&= \frac{2\sqrt{\pi^n}}{2\sqrt{\pi^n}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

Im folgenden soll das normierte Haarsche Maß auf  $SO(n)$  bestimmt werden. Dazu wird das gefundene Maß auf  $S^{n-1} \times SO(n-1)$  mit Hilfe der in Bemerkung A.1.12 definierten Abbildung  $\varphi$  auf  $SO(n)$  übertragen.

### Bemerkung A.2.5

Sei im folgenden  $\mu_{n-1}$  das normierte Haarsche Maß auf  $S^{n-1}$  (siehe Satz A.2.3 und Lemma A.2.4).

### Satz A.2.6

Sei zu  $n \geq 2$   $\nu_n$  das normierte Haarsche Maß auf  $SO(n)$ . Dann ist  $\nu_n$  das Bildmaß von  $\mu_{n-1} \otimes \nu_{n-1}$  unter  $\varphi$ . Für jede stetige Funktion  $f : SO(n) \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{SO(n)} f(A) d\nu_n(A) \\
&= \prod_{l=2}^n \frac{\Gamma(\frac{l}{2})}{2\sqrt{\pi^l}} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A) \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^k \sin^{j-1}(\theta_j^k) d\theta_j^k.
\end{aligned}$$

### Beweis:

Wir berechnen zuerst das Bildmaß von  $\mu_{n-1} \otimes \nu_{n-1}$  unter der Abbildung  $\varphi$ . Anschließend wird gezeigt, daß dieses Bildmaß rotationsinvariant und damit ein Haarsches Maß auf  $SO(n)$  ist. Normiert ist es, da sowohl  $\mu_{n-1}$  als auch  $\nu_{n-1}$  normiert sind.

(a) Der Beweis wird mittels Induktion nach  $n$  geführt.  $\varphi$  ist meßbar nach Satz A.1.14 (iii).

$n = 2$ :

Sei  $f : SO(2) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei außerdem  $\nu'_2$  das Bildmaß von  $\mu_1$  unter der surjektiven Abbildung  $\varphi : S^1 \times SO(1) \cong S^1 \times \{1\} \rightarrow SO(2)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{SO(n)} f(A) d\nu'_2(\theta) &= \int_0^{2\pi} f \circ \varphi \left( \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, 1 \right) d\mu_1(\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} f \left( \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right) d\theta.
\end{aligned}$$

$n - 1 \rightarrow n$ :

Sei  $f : SO(n) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei außerdem  $\nu'_n$  das Bildmaß von  $\mu_{n-1} \otimes \nu_{n-1}$  unter der surjektiven Abbildung  $\varphi : S^{n-1} \times SO(n-1) \rightarrow SO(n)$ . In dem folgenden Beweis sind  $\theta_1^{n-1}, \dots, \theta_{n-1}^{n-1}$  die sphärischen Koordinaten von  $\eta$ ,  $\theta_j^k$ ,  $1 \leq k \leq n-2, 1 \leq j \leq k$  die Euler-Winkel von  $B$  und  $A$  die Matrix, deren Euler-Winkel gerade  $\theta_j^k$  für alle  $1 \leq k \leq n-1, 1 \leq j \leq k$  sind. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{SO(n)} f(A) d\nu'_n(A) &= \int_{S^{n-1} \times SO(n-1)} f \circ \varphi((\eta, B)) d(\mu_{n-1} \otimes \nu_{n-1})(\eta, B) \\
&= \int_{SO(n-1)} \left( \int_{S^{n-1}} f \circ \varphi((\eta, B)) d\mu_{n-1}(\eta) \right) d\nu_{n-1}(B) \\
&= \int_{SO(n-1)} \left( \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi^n}} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} f(R_1(\theta_1^{n-1}) \dots R_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})B) \right. \\
&\quad \left. \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1}(\theta_j^{n-1}) d\theta_j^{n-1} \right) d\nu_{n-1}(B) \\
&\stackrel{\text{I.V.}}{=} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi^n}} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} f(R_1(\theta_1^{n-1}) \dots R_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})B) \right. \\
&\quad \left. \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1}(\theta_j^{n-1}) d\theta_j^{n-1} \right) \prod_{l=2}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{l}{2})}{2\sqrt{\pi^l}} \prod_{k=1}^{n-2} \prod_{j=1}^k \sin^{j-1}(\theta_j^k) d\theta_j^k \\
&= \prod_{l=2}^n \frac{\Gamma(\frac{l}{2})}{2\sqrt{\pi^l}} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \dots \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(A) \prod_{k=1}^{n-2} \prod_{j=1}^k \sin^{j-1}(\theta_j^k) d\theta_j^k.
\end{aligned}$$

- (b) Sei  $\rho : S^{n-1} \rightarrow SO(n)/SO(n-1)$ ,  $\xi \mapsto R_\xi SO(n-1)$ . Betrachte dazu das Diagramm A.2. Wir zeigen zunächst, daß das Diagramm kommutativ ist. Seien  $\xi \in S^{n-1}$ ,  $B \in SO(n-1)$  beliebig und  $A \in SO(n)$  so gewählt, daß  $\xi = Ae_n$ . Damit gilt

$$\begin{aligned}
R_{B\xi} &= R_{BAe_n} = BA [(BA)^{(n-2)} \dots (BA)^{(1)}]^{-1} \\
BR_\xi &= BR_{Ae_n} = BA [A^{(n-2)} \dots A^{(1)}]^{-1}.
\end{aligned}$$

Da sowohl  $[(BA)^{(n-2)} \dots (BA)^{(1)}]^{-1}$  als auch  $[A^{(n-2)} \dots A^{(1)}]^{-1}$  in  $SO(n-1)$  sind, gilt  $BR_\xi SO(n-1) = R_{B\xi} SO(n-1)$ , und somit folgt die Kommutativität des Diagramms.

Das bedeutet, daß  $\rho(\mu_{n-1})$  ein invariantes Maß auf  $S^{n-1} \cong SO(n)/SO(n-1)$  ist. Es folgt mit Satz 2.1.18, daß

$$I(f) := \int_{SO(n)/SO(n-1)} \left( \int_{SO(n-1)} f(AB) d\nu_{n-1}(B) \right) d\rho(\mu_{n-1})(A)$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & \eta & \longmapsto & R_\eta SO(n-1) \\
& & \mathcal{S}^{n-1} & \longrightarrow & SO(n)/SO(n-1) \\
B\xi & \uparrow & & & \uparrow & BASO(n-1) \\
& \uparrow & & & \uparrow & \\
& \xi & & & & \\
& & \mathcal{S}^{n-1} & \longrightarrow & SO(n)/SO(n-1) \\
& & \xi & \longmapsto & R_\xi SO(n-1) \\
& & & & & ASO(n-1)
\end{array}$$

Abbildung A.2: Diagramm zum Beweis von Satz A.2.6

ein Haar-Integral auf  $SO(n)$  ist.

Es ist nun nur noch zu zeigen, daß  $\nu'_n$  das durch  $I(f)$  definierte Maß ist. Im folgenden sind  $\theta_1^{n-1}, \dots, \theta_{n-1}^{n-1}$  die sphärischen Koordinaten von  $Ae_n = \xi$ ,  $\theta_j^k$ ,  $1 \leq k \leq n-2$ ,  $1 \leq j \leq k$  die Euler-Winkel von  $B$  und  $D$  die Matrix, dessen Euler-Winkel  $\theta_j^k$  für alle  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $1 \leq j \leq k$  sind. Außerdem ist zu bemerken, daß  $R_{Ae_n} SO(n-1) = ASO(n-1)$  gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
I(f) &= \int_{SO(n)/SO(n-1)} \left( \int_{SO(n-1)} f(AB) d\nu_{n-1}(B) \right) d\rho(\mu_{n-1})(A) \\
&= \int_{SO(n)/SO(n-1)} \left( \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(AB) \prod_{l=2}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{l}{2})}{2\sqrt{\pi^l}} \right. \\
&\quad \left. \cdot \prod_{k=1}^{n-2} \prod_{j=1}^k \sin^{j-1}(\theta_j^k) d\theta_j^k \right) d\rho(\mu_{n-1})(A) \\
&= \int_{\mathcal{S}^{n-1}} \left( \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\rho(Ae_n)B) \prod_{l=2}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{l}{2})}{2\sqrt{\pi^l}} \right. \\
&\quad \left. \cdot \prod_{k=1}^{n-2} \prod_{j=1}^k \sin^{j-1}(\theta_j^k) d\theta_j^k \right) d\mu_{n-1}(\xi) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi^n}} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(R_{Ae_n}B) \prod_{l=2}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{l}{2})}{2\sqrt{\pi^l}} \right. \\
&\quad \left. \cdot \prod_{k=1}^{n-2} \prod_{j=1}^k \sin^{j-1}(\theta_j^k) d\theta_j^k \right) \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1}(\theta_j^{n-1}) d\theta_j^{n-1}
\end{aligned}$$

$$= \prod_{l=2}^n \frac{\Gamma(\frac{l}{2})}{2\sqrt{\pi^l}} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(D) \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^k \sin^{j-1}(\theta_j^k) d\theta_j^k.$$

Es gilt somit  $\nu_n = \nu'_n$ .

■

## Anhang B

# Projektion der oberen Halbsphäre auf die Ebene

Es wird die Projektion der oberen Halbsphäre der  $S^{n-1}$  auf die Einheitskugel des  $\mathbb{R}^{n-1}$  angegeben und die Determinante dieser Abbildung bestimmt, da diese Projektion später im Beweis der Quadrat-Integrierbarkeit der gefundenen „Darstellungen“ für eine Integraltransformation benutzt wird.

### Bemerkung B.1

Sei im folgenden

$$\begin{aligned}\Omega &:= \{\theta \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]^{n-2} : \Lambda(\theta) \in S^{n-1}, (\Lambda(\theta))_n \geq 0\} \\ &= \begin{cases} \{\theta : \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_j \in [0, \pi] \forall j = 2, \dots, n-2 \text{ und } \theta_{n-1} \in [0, \frac{\pi}{2}]\} & , \text{ falls } n \neq 2, \\ \{\theta = \theta_1 : \theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)\} & , \text{ falls } n = 2, \end{cases}\end{aligned}$$

d.h. die obere Halbsphäre.

### Lemma B.2

Für die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\omega : s \in \Omega \longrightarrow Ps \in P\Lambda(\Omega),$$

wobei  $P$  die orthogonale Projektion von  $\Lambda(\Omega)$  auf  $\mathbb{R}^{n-1}$  parallel zu  $e_n$  ist, gilt

$$\det J_\omega(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1}(\theta_j) \cos(\theta_{n-1}).$$

### Beweis:

Die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\omega : \Omega \longrightarrow U(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1};$$

$$(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \longmapsto (\sin(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_1), \sin(\theta_{n-1}) \dots \sin(\theta_2) \cos(\theta_1), \dots, \sin(\theta_{n-1}) \cos(\theta_{n-2}))$$

sieht folgendermaßen aus:

$$\left( \begin{array}{cccccccc}
 \sin \theta_{n-1} \dots \sin \theta_2 \cos \theta_1 & \sin \theta_{n-1} \dots \sin \theta_3 \cos \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_{n-1} \dots \sin \theta_4 \cos \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \dots & \dots & \dots & \cos \theta_{n-1} \sin \theta_{n-2} \dots \sin \theta_1 \\
 -\sin \theta_{n-1} \dots \sin \theta_1 & \sin \theta_{n-1} \dots \sin \theta_3 \cos \theta_2 \cos \theta_1 & \sin \theta_{n-1} \dots \sin \theta_4 \cos \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & \dots & \dots & \dots & \cos \theta_{n-1} \sin \theta_{n-2} \dots \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\
 0 & -\sin \theta_{n-1} \dots \sin \theta_2 & \sin \theta_{n-1} \dots \sin \theta_4 \cos \theta_3 \cos \theta_2 & \dots & \dots & \dots & \cos \theta_{n-1} \sin \theta_{n-2} \dots \sin \theta_3 \cos \theta_2 \\
 0 & 0 & -\sin \theta_{n-1} \dots \sin \theta_3 & \dots & \dots & \dots & \cos \theta_{n-1} \sin \theta_{n-2} \dots \sin \theta_4 \cos \theta_3 \\
 \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 \vdots & & & & & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin \theta_{n-1} \sin \theta_{n-2} & \dots & \cos \theta_{n-1} \cos \theta_{n-2}
 \end{array} \right)$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{J_\omega^{(n)} :=}$$

Der Beweis wird geführt mittels Induktion nach  $n$ .

$n = 3$ :

$$\begin{aligned}
 \det J_\omega^{(3)} &= \begin{vmatrix} \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_2) \sin(\theta_1) & \cos(\theta_2) \cos(\theta_1) \end{vmatrix} \\
 &= \cos^2(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \sin^2(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \\
 &= (\cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_1)) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \\
 &= \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)
 \end{aligned}$$

$n - 1 \rightarrow n$ :

Es gilt

$$\det J_\omega^{(n)} = \sin^{n-2}(\theta_{n-1}) \dots \sin^2(\theta_3) \sin(\theta_2) \cos(\theta_{n-1})$$

$$\left( \begin{array}{cccccccc}
 \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \sin \theta_1 & \cos \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \dots & \dots & \dots & \cos \theta_{n-2} \sin \theta_{n-3} \dots \sin \theta_1 & \sin \theta_{n-2} \dots \sin \theta_1 \\
 -\sin \theta_1 & \cos \theta_2 \cos \theta_1 & \cos \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & \dots & \dots & \dots & \cos \theta_{n-2} \sin \theta_{n-3} \dots \sin \theta_2 \cos \theta_1 & \sin \theta_{n-2} \dots \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\
 0 & -\sin \theta_2 & \cos \theta_3 \cos \theta_2 & \dots & \dots & \dots & \cos \theta_{n-2} \sin \theta_{n-3} \dots \sin \theta_3 \cos \theta_2 & \sin \theta_{n-2} \dots \sin \theta_3 \cos \theta_2 \\
 0 & 0 & -\sin \theta_3 & \dots & \dots & \dots & \cos \theta_{n-2} \sin \theta_{n-3} \dots \sin \theta_4 \cos \theta_3 & \sin \theta_{n-2} \dots \sin \theta_4 \cos \theta_3 \\
 \vdots & & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
 \vdots & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
 \vdots & & & & & \ddots & \cos \theta_{n-2} \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-4} & \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-4} \\
 \vdots & & & & & & \cos \theta_{n-2} \cos \theta_{n-3} & \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-3} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -\sin \theta_{n-2} & \cos \theta_{n-2}
 \end{array} \right)$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{=: A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}}$$

Definiere

$$\begin{aligned}
 B &:= (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-2}, \\
 C &:= (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1, i \neq n-1, j \neq n-2}.
 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\det J_\omega^{(n)} = \sin^{n-2}(\theta_{n-1}) \dots \sin^2(\theta_3) \sin(\theta_2) \cos(\theta_{n-1}) (\cos(\theta_{n-2}) \det B + \sin(\theta_{n-2}) \det C).$$

Wir müssen also folgendes zeigen:

$$\cos(\theta_{n-2}) \det B + \sin(\theta_{n-2}) \det C = 1$$

(a) Beh.:  $\det B = \cos(\theta_{n-2})$

Bew.: Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} & \sin^{n-3}(\theta_{n-2}) \dots \sin^2(\theta_3) \sin(\theta_2) \det B \\ &= \det J_\omega^{(n-1)} \\ &= \sin^{n-3}(\theta_{n-2}) \dots \sin^2(\theta_3) \sin(\theta_2) \cos(\theta_{n-2}). \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung.

(b) Beh.:  $\det C = \sin(\theta_{n-2})$

Bew.: Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} & \sin^{n-3}(\theta_{n-2}) \dots \sin^2(\theta_3) \sin(\theta_2) \frac{\cos(\theta_{n-2})}{\sin(\theta_{n-2})} \det C \\ &= \det J_\omega^{(n-1)} \\ &= \sin^{n-3}(\theta_{n-2}) \dots \sin^2(\theta_3) \sin(\theta_2) \cos(\theta_{n-2}), \end{aligned}$$

da  $\frac{\cos(\theta_{n-2})}{\sin(\theta_{n-2})}$  gerade der Faktor ist, um den sich die letzte von der vorletzten Spalte der Matrix  $A$  unterscheidet. Damit folgt die Behauptung.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{n-2}) \det B + \sin(\theta_{n-2}) \det C &= \cos^2(\theta_{n-2}) + \sin^2(\theta_{n-2}) = 1 \\ \implies \det J_\omega^{(n)} &= \sin^{n-2}(\theta_{n-1}) \dots \sin^2(\theta_3) \sin(\theta_2) \cos(\theta_{n-1}) \end{aligned}$$

■

### Bemerkung B.3

Die Abbildung

$$\omega : \Omega^\circ \longrightarrow \omega(\Omega^\circ)$$

ist bijektiv. Ferner ist  $\Lambda : \Omega \longrightarrow \Lambda(\Omega)$  surjektiv. Da  $\Omega^\circ \subseteq D^n$  und  $\Lambda : D^n \longrightarrow S^{n-1} \setminus \{e_i, -e_i : 3 \leq i \leq n\}$  bijektiv nach Bezeichnung A.1.4 ist, existiert eine Menge  $N \subseteq \Lambda(\Omega)$ , so daß  $\Lambda :$

$\Omega^\circ \longrightarrow \Lambda(\Omega) \setminus N$  bijektiv ist.  $N$  ist hierbei eine Nullmenge, da  $\Omega^\circ \subseteq \Omega$  eine Nullmenge und  $\Lambda$  stetig ist. Daraus folgt, daß die Abbildung

$$\omega : \Omega^\circ \longrightarrow P(\Lambda(\Omega) \setminus N)$$

bijektiv und stetig differenzierbar ist. Außerdem sind  $\Omega^\circ$  und  $P(\Lambda(\Omega) \setminus N)$  offen und  $\det J_\omega(\Omega^\circ) \neq 0$ . Deshalb gilt

$$\det J_{\omega^{-1}}(x) = (\det J_\omega(\omega^{-1}(x)))^{-1}.$$

Das ist der Grund, weshalb in Kapitel 3 und 4 anstatt über  $S^{n-1}$  und  $U(0, 1)$  über  $S^{n-1} \setminus N$  und  $P(\Lambda(\Omega) \setminus N)$  integriert wird. Die Integrale haben jeweils den gleichen Wert, da  $N$  eine Nullmenge ist.



# Anhang C

## Notationen

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| $\mathbb{N}$                   | Menge der natürlichen Zahlen (ohne die 0)   |
| $\mathbb{N}_0$                 | $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  |
| $\mathbb{R}$                   | Körper der reellen Zahlen   |
| $\mathbb{R}^+$                 | Menge der positiven reellen Zahlen (ohne die 0)   |
| $S^{n-1}$                      | $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x\  = 1\}$<br>$(n - 1)$ -dimensionale Sphäre                            |
| $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$    | Schwartz-Raum   |
| $e_i$                          | $i$ -ter Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$   |
| $x_i$                          | $i$ -te Komponente eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$   |
| $0_{n,k}$ ( $0_n := 0_{n,n}$ ) | Nullmatrix aus dem $\mathbb{R}^{nk}$<br>$0_{n,k} = \emptyset$ , falls $n < 0$ oder $k < 0$                  |
| $E_n$                          | Einheitsmatrix aus dem $\mathbb{R}^{2n}$  |
| $U(x, d)$                      | offene Kreisscheibe um $x$ vom Radius $d$ im $\mathbb{R}^n$   |
| $K(x, d)$                      | abgeschlossene Kreisscheibe um $x$ vom Radius $d$ im $\mathbb{R}^n$   |
| $D^\circ$                      | Innere von $D$  |
| $J_\omega$                     | Funktionalmatrix der Abbildung $\omega$   |
| $\ \cdot\ _2$                  | 2-Norm im jeweiligen Raum   |
| $\oplus$                       | direkte Summe   |
| $\delta_{j,k}$                 | Kronecker-Symbol, $\delta_{j,k} := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ |
| $O(\cdot)$                     | Landausches Symbol  |

# Literaturverzeichnis

- [Arv 76] W. Arveson, An invitation to  $C^*$ -algebra, Springer, 1976.
- [BaRa 80] A.O. Barut, R. Rączka, Theory of group representation and applications, PWN-Polish Scientific Publishers, Warschau, 1980.
- [BeTa 94] D. Bernier, K.F. Taylor, Wavelets from square-integrable representations, SIAM J. Math. Anal., Preprint, 1994.
- [Car 76] A.L. Carey, Square-integrable representations of non-unimodular groups, Bull. Austr. Math. Soc. 15, 1976.
- [ChMha 93] C.K.Chui H.N. Mhaskar, On trigonometric wavelets, Constr. Approx. 9, 1993.
- [Dix 77] J. Dixmier,  $C^*$ -algebras, North-Holland Publishing Company, 1977.
- [DuMo 76] M. Duffo, C.C. Moore, On the regular representation of a nonunimodular locally compact group, J. Funct. Anal. 21, S. 209-243, 1976.
- [FeDo 88] J.M.G. Fell, R.S. Doran, Representations of  $*$ -algebras, locally compact groups, and Banach  $*$ -algebraic bundles, vol. 1 und 2, MA: Academic Press, Boston, 1988.
- [Fol 95] G.B. Folland, A course in abstract harmonic analysis, CRC Press, 1995.
- [GoGrMo 84] P. Goupillaud, A. Grossmann, J. Morlet, Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis, Geoprospection 23, Elsevier Science Publ., S. 85-102, 1984/85.
- [GrMoPa 85] A. Grossmann, J. Morlet, T. Paul, Transforms associated to square integrable group representations. I. general results, J. Math. Phys., 26, (10), 1985.
- [HeWa 63] S.E. Heil, A.F. Walnut, Continuous and diskrete wavelet transforms, SIAM Review, Vol. 31, Nr. 4, S. 628-666, 1989.
- [HeRo 63] E. Hewitt, K.A. Ross, Abstract harmonic analysis, Springer, 1963.
- [KLi 72] A. Kleppner, R.L. Lipsman, The Plancherel formula for group extensions, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 5, 1972.
- [LoMaRi 94] A.K. Louis, P. Maaß, A. Rieder, Wavelets, Teubner, 1994.
- [Mac 52] G.W. Mackey, Induced representations of locally compact groups, I. Ann. Math., 55, S. 101-139, 1952.

- [Mal 89] S. Mallat, Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2$ , Trans. Math. Soc. 315, 1989.
- [Rei 68] H. Reiter, Classical harmonic analysis and locally compact groups, Clarendon Press, 1968.
- [Rob 83] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge University Press, 1983.
- [Schem 80] W. Schempp, B. Dresler, Einführung in die harmonische Analyse, Teubner, 1980.
- [Sug 90] M. Sugiura, Unitary representations and harmonic analysis, North-Holland, 1990.
- [Tor 93] B. Toressani, Phase space decompositions: Local Fourier analysis on spheres, Preprint, 1993.
- [Vil 68] N.J. Vilenkin, Special functions and the theory of group representations, Translations of Mathematical Monographs, vol. 22, Am. Math. Soc., 1968.

Hiermit bestätige ich, die Arbeit selbständig angefertigt und alle benutzten Quellen kenntlich gemacht zu haben.

Paderborn, den 18.3.1996