

### Abstract

**G. Kutyniok (Osnabrück) — Time / frequency analysis** The *continuous wavelet transform* transforms a function of one variable, e.g., a time series, into a function of two variables, time and scale, that gives information about time-localized frequency components. Provided that the *wavelet* satisfies a so-called *admissibility condition* which requires only slightly more than a “wavy” behavior, this transform also has an inverse so that the relationship between function and transform is one-to-one. Sampling the transform at appropriate sets of parameter values will result in analysis functions that form a *frame*, a set of functions that are not independent but still allow for unique reconstructions from the associated coefficients in the representation of a function. This redundancy makes a frame more robust with respect to loss of certain coefficients.

---

## Zeit-/Frequenzanalyse

G. Kutyniok, Institut für Mathematik, Universität  
Osnabrück, 49069 Osnabrück  
kutyniok@math.uni-osnabrueck.de

### Die kontinuierliche Wavelettransformation

Eine Vielzahl von Transformationen, wie z.B. die gefensterter Fouriertransformation, liefern sehr gute Ergebnisse bei der Detektion von auftretenden Frequenzen einer bestimmten zeitlichen Länge. Allerdings werden Artefakte unterschiedlicher zeitlicher Länge sehr schlecht erkannt, da die meisten Transformationen keine “Zoom“-Möglichkeit besitzen. Mit der kontinuierlichen Wavelettransformation wird eine Transformation zur Verfügung gestellt, die in der Tat Signalstrukturen sehr unterschiedlicher zeitlicher Länge präzise erkennen und analysieren kann.

Für einen gut verständlichen exakten mathematischen Zugang zur kontinuierlichen Wa-

velettransformation verweisen wir deshalb auf das Buch von Blatter (Blatter, 2003). Wer lieber einen Klassiker lesen möchte, dem sei das Buch von Daubechies (Daubechies, 1992) empfohlen. Eine Betonung der Anwendungsaspekte ist in dem Buch von Mallat (Mallat, 1999) zu finden. Zum weiteren “Schmökern” über die Theorie von Wavelets ist das Buch von Hubbard (Hubbard, 1998) sehr geeignet, da es ohne mathematischen “Ballast” auskommt. Zuletzt sei jeder Gruppe von Lesern – ob mehr oder weniger mathematisch interessiert – noch die Webseiten zum Wavelet Digest “[www.wavelet.org](http://www.wavelet.org)” ans Herz gelegt. Dort finden sich eine Fülle von Links zu Tutorials, weiterer Literatur, etc.

### Was sind Wavelets?

Die Hauptidee der kontinuierlichen Wavelettransformation besteht darin, das Signal mit Funktionen zu korrelieren, die u.a. verschiedene zeitliche Längen haben. Die kontinuierliche Wavelettransformation verwendet hierzu ei-

ne “Basis-Funktion”  $\psi$ , die aus bestimmten mathematischen Gründen die Eigenschaft

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty \quad (0.1)$$

erfüllen muss (siehe auch Abschnitt ). Den Wert  $C_\psi$  bezeichnet man als *Zulässigkeitskonstante*. Als zusätzliche Eigenschaft fordert man, dass diese Funktion endliche Energie haben muss, d.h. es muss  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  gelten. Solch eine Funktion  $\psi$  wird als *Wavelet* (= “Wellchen”) oder auch als *Mother-Wavelet* bezeichnet. Die Eigenschaft, die hierdurch impliziert wird, läßt sich sehr gut an den Beispielen in Abbildung 1 erkennen.

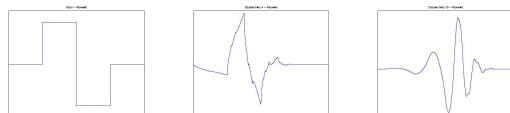


Abbildung 1: Links ist das Haar-Wavelet zu sehen, das sicher das “einfachste” unter den Wavelets ist. Das mittlere Bild zeigt das berühmte Daubechies4-Wavelet, und das rechte das nicht minder berühmte Daubechies10-Wavelet.

Eine sehr wichtige Unterscheidung von Wavelets, die insbesondere bei der kontinuierlichen Wavelettransformation eine entscheidende Rolle spielt (siehe Abschnitt ), ist diejenige in reelle und komplexe Wavelets. *Reelle Wavelets* sind Wavelets, die in den reellen Zahlen “leben”, also lediglich Funktionswerte in  $\mathbb{R}$  haben, wohingegen *komplexe Wavelets* in den komplexen Zahlen “leben”, also insbesondere auch Funktionswerte in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  besitzen. (Erinnerung: Die komplexen Zahlen stellen eine gewisse Erweiterung der reellen Zahlen dar.) Bei den in Abbildung 1 aufgeführten Wavelets handelt es sich ausschließlich um re-

elle Wavelets. Ein wichtiges Beispiel für ein komplexes Wavelet ist das *Morlet-Wavelet*, definiert durch

$$\psi(x) = c\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}x^2}(e^{ix} - e^{-\frac{1}{2}}),$$

wobei  $c$  eine Konstante ist. Eine graphische Darstellung des Realteils dieses Wavelets ist in Abbildung 2 zu finden.

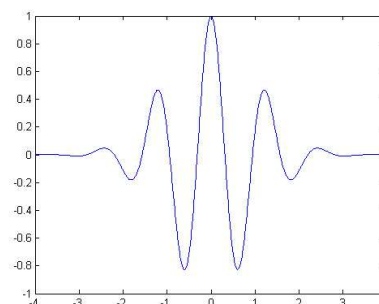


Abbildung 2: Der Realteil des Morlet-Wavelets, das bei der Analyse von z.B. EEG-Signalen vorzugsweise Verwendung findet (siehe hierzu auch Klein, 2008).

### Definition und Berechnung der kontinuierlichen Wavelettransformation

Zur Analyse eines Signals werden nun verschobene und gestauchte bzw. gedehnte – sogenannte *dilatierte* – Kopien des Wavelets verwendet. Das Wavelet wird dabei an jeden Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  des Signals verschoben und um jeden Faktor  $a > 0$  dilatiert. Wir verwenden somit die folgende Kollektion von “Varianten” unseres Wavelets:

$$\psi\left(\frac{x-t}{a}\right), \quad \text{wobei } a > 0 \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Einige Beispiele finden sich in der Abbildung 3.

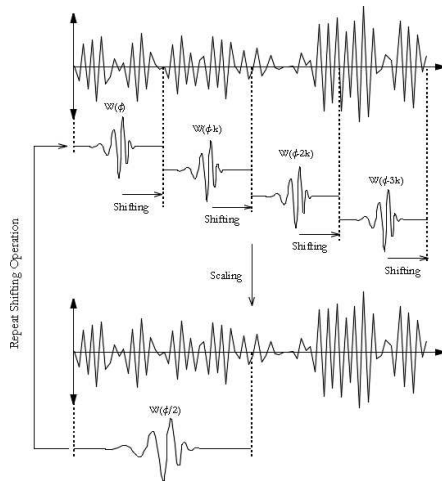


Abbildung 3: Einige verschobene und dilatierte Kopien eines Wavelets  $W$ .

Die kontinuierliche Wavelet-Transformation wird nun als Korrelation eines Signals  $f$  (z.B. eines Kanals eines EEGs) und diesen "Kopien" eines geeigneten Wavelets gebildet:

$$\mathcal{W}_\psi f(a, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{x-t}{a}\right)} dx.$$

Für gegebenes  $a$  und  $t$  bezeichnet man  $\mathcal{W}_\psi f(a, t)$  auch als *Waveletkoeffizient*. Der Vorfaktor  $a^{-\frac{1}{2}}$  tritt aus Normierungsgründen<sup>1</sup> auf. Ferner werden auch aus mathematischen Gründen nicht die Funktionswerte von  $\psi$ , sondern die zugehörigen konjugiert-komplexen Werte verwendet. Bei reellen Wavelets

<sup>1</sup>Man sollte an dieser Stelle erwähnen, dass die Wavelettransformation zu einem gegebenen Wavelet im Gegensatz zur Fouriertransformation entweder amplitudenproportional ist oder weißes Rauschen mit einem flachen Spektrum versieht aber nicht beides gleichzeitig. Deshalb kann es auch aus diesem Grund vorteilhaft sein, die Normalisierung der Wavelettransformation zu verändern.

ändert das aber nichts, denn für diese gilt  $\psi(x) = \overline{\psi(x)}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Bei komplexen Wavelets wird nur die Phase verändert.

Wenden wir uns zunächst kurz der numerischen Berechnung der kontinuierlichen Wavelettransformation zu, bevor wir auf die Anwendungsmöglichkeiten eingehen. Zuerst wird dazu die kontinuierliche Wavelettransformation in einer etwas anderen Form dargestellt, und zwar als Faltung:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\psi f(a, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{x-t}{a}\right)} dx \\ &= f * \overline{\psi}_a(t), \end{aligned}$$

wobei

$$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(-\frac{t}{a}\right).$$

(Erinnerung: Bei Bildung der Faltung wird eine Funktion gegen die andere zeitlich verschoben.) Die Nützlichkeit dieser Darstellung wird deutlich, wenn wir sie uns im Fourierbereich ansehen, denn hier geht die Faltung in ein Produkt über. Wenden wir also die Fouriertransformation an, so erhalten wir:

$$\widehat{\mathcal{W}_\psi f(a, \cdot)}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \widehat{\overline{\psi}_a}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \sqrt{a} \hat{\psi}(a\xi). \tag{0.2}$$

Mit der schnellen Fouriertransformation – der FFT – läßt sich diese Formel sehr schnell berechnen – allerdings nur, wenn wir uns bei der Wahl von  $a$  und  $t$  auf endlich viele Werte einschränken (siehe Abschnitt ). Wir sollten an dieser Stelle noch anmerken, dass man aufgrund der Formel (0.2) die kontinuierliche Wavelettransformation als eine Filterung mit einem Bandpass-Filter auffassen kann, wobei  $\sqrt{a} \hat{\psi}(a\xi)$  die Transfer-Funktion wäre. Für weitere Details verweisen wir auf das Kapitel 3.

### Wozu braucht man die kontinuierliche Wavelettransformation?

Betrachten wir zunächst den Fall der reellen Wavelets. Hier ist das Ziel, scharfe Signalübergänge zu detektieren. Abbildung 4 gibt ein Beispiel der Wavelettransformierten eines Signals unter Verwendung eines reellen Wavelets an.

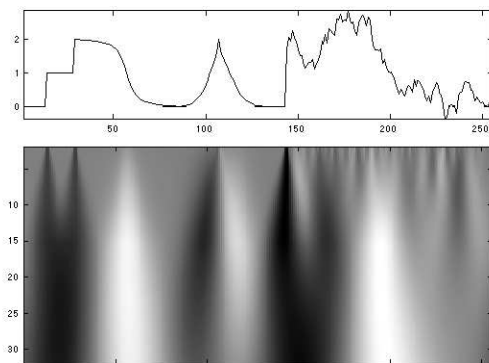


Abbildung 4: Signal (oben) und dessen Wavelettransformierte  $\mathcal{W}_{\psi}f$  (unten), wobei schwarze, graue bzw. weisse Punkte positive Waveletkoeffizienten  $\mathcal{W}_{\psi}f(a, t)$ , Null bzw. negative Waveletkoeffizienten darstellen.

Die wesentliche Information tritt hier bei einer kleinen Skala auf. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da eine kleine Skala  $a$  eine starke Stauchung des Wavelets bedeutet, folglich eine schnelle Schwingung in einem kleinen Zeitintervall. Man sieht an Abbildung 4 deutlich, dass betragsmäßig große Werte der Waveletkoeffizienten bei kleiner Skala  $a$  auf eine starke Veränderung des Signals hinweisen. Um solche Veränderungen zu detektieren, würde man somit ein sehr kleines  $a$  – nennen wir es  $a_0$  – wählen und dann untersuchen, welche Waveletkoeffizienten  $\mathcal{W}_{\psi}f(a_0, t)$  betragsmäßig oberhalb einer ge-

wählten Schranke liegen. An den zugehörigen Stellen  $t$  liegen dann “Peaks” oder sonstige starke Veränderungen im Signal vor.

Komplexe Wavelets werden verwendet, um auch Frequenzübergänge erfassen zu können. Die komplexe Schwingung in einem komplexen Wavelet stellt sicher, dass Wavelet und Schwingung im Signal unabhängig von der Phasendifferenz korrelieren, wenn die Frequenzen übereinstimmen. Bei reellen Wavelets erreicht man das nicht, da zwei Schwingungen nicht miteinander korrelieren, wenn sie um  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$  in der Phasenlage abweichen. Das führt zu Schwingungen in der Wavelettransformierten. Stattdessen erzeugt die kontinuierliche Wavelettransformation mit einem komplexen Wavelet durchgehend Waveletkoeffizienten großen Betrages, wenn die Frequenzen von Wavelet und Schwingung im Signal übereinstimmen. Aus diesem Grund werden in der Regel bei der Analyse von EEG-Signalen komplexe Wavelets, insbesondere das Morlet-Wavelet (siehe Abbildung 2) verwendet. Für konkrete Anwendungsmöglichkeiten verweisen wir auf die ausführliche Darstellung in Kapitel 4.

### Können wir auch zurücktransformieren?

Nachdem wir uns die kontinuierliche Wavelettransformation schon genauer angesehen haben, stellt sich die Frage, ob sich hieraus auch das Signal wieder zurückberechnen läßt. In einer Vielzahl von Anwendungen wird nämlich zunächst ein Signal wavelettransformiert und dann einige Manipulationen an der Wavelettransformierten vorgenommen, z.B. werden einige Frequenzbänder gedämpft. Anschließend möchte man natürlich das zugehörige –

jetzt leicht veränderte – Signal berechnen.

Vorausgesetzt unser Wavelet erfüllt die Bedingung (0.1) – dies ist ja nach Definition immer der Fall –, so ist dies zum Glück immer möglich. Haben wir ein Wavelet  $\psi$  gewählt und kennen von einem Signal  $f$  nur alle Werte seiner kontinuierlichen Wavelettransformierten  $\mathcal{W}_\psi f(a, t)$ ,  $a > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , so läßt sich  $f$  mit Hilfe von (0.3) berechnen, wobei  $C_\psi$  die Zulässigkeitskonstante des Wavelets  $\psi$  aus (0.1) ist. Dies bezeichnet man als die *inverse kontinuierliche Wavelettransformation*.

Die numerische Berechnung der inversen kontinuierlichen Wavelettransformation ist nicht so elegant möglich wie diejenige der kontinuierlichen Wavelettransformation. Man kann zwar ähnliche Ideen anwenden, hat aber noch einige zusätzliche technische Schwierigkeiten zusammenhängend mit dem Doppelintegral zu lösen, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen.

## Der Weg von der kontinuierlichen Wavelettransformation zu Wavelet-Frames

In realistischen Anwendungen kann man die Wavelettransformation  $\mathcal{W}_\psi f(a, t)$  nur für *endlich viele* Werte von  $a$  und  $t$  bestimmen, sagen wir  $(a, t) \in A$ , wobei  $A$  eine Abtastmenge in  $(0, \infty) \times \mathbb{R}$  – also der “rechten Hälfte” der Ebene – ist. Anders gesagt: berechenbar ist lediglich eine Abtastung der Wavelettransformation, d.h. eine endliche Menge von Waveletkoeffizienten

$$\{\mathcal{W}_\psi f(a, t) : (a, t) \in A\}. \quad (0.4)$$

Damit ergibt sich ganz natürlich die Frage nach minimalen Wertemengen  $A$ , so dass man ein Signal  $f$  noch aus diesen Abtastwerten rekon-

struieren kann – man möchte ja schließlich, dass die Transformation nur  $f$  beschreibt und nicht eine ganze Familie von Signalen. Ferner stellt sich die Frage, was man durch “Überrepresentation” gewinnen kann – schließlich ist redundante Information normalerweise robuster gegen Störungen. Dies führt zum Konzept der “*Wavelet-Frames*”.

Zunächst werden wir eine kurze, allgemeinverständliche Einführung in die Theorie der Frames geben, und uns dann auf Wavelet-Frames konzentrieren. Da die Theorie der Frames noch sehr neu ist, findet sich noch nicht eine solche Fülle von Literatur wie für Wavelets. Das erste umfassende Buch über Frames ist von Christensen (Christensen, 2003) und enthält eine exakte mathematische Darstellung dieser Theorie. Abschnitte aus den schon erwähnten Büchern von Blatter (Blatter, 2003), Daubechies (Daubechies, 1992) und Mallat (Mallat, 1999) bieten auch sehr gute anschauliche, trotzdem mathematische Einführungen in diese Theorie. Für allgemeine Resultate über Wavelet-Frames möchten wir auf das Buch von Daubechies (Daubechies, 1992) verweisen. Der aktuelle Stand der Forschung ist in der kürzlich fertiggestellten Monographie von Kutyniok (Kutyniok, 2006) dargestellt.

### Was sind Frames?

Vergessen wir die Wavelet-Situation für eine kurze Weile, und betrachten wir zunächst anstelle der Menge in (0.4) eine beliebige endliche Menge  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  von Vektoren, der Einfachheit halber im  $\mathbb{R}^d$  – wer möchte, kann sich hier den Fall  $d = 2$ , also die Ebene, vorstellen. Ein Vektor  $f \in \mathbb{R}^d$  wird nun mit Hilfe der Menge  $G$  “aufgespalten” oder man sagt auch

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathcal{W}_\psi f(a, t) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{x-t}{a}\right)} dt \frac{da}{a^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (0.3)$$

analysiert, indem man die Skalarprodukte

$$\langle f, g_i \rangle \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (0.5)$$

berechnet und somit eine endliche Menge von reellen Werten erhält. (Zur Erinnerung: Das Skalarprodukt zweier Vektoren gibt – grob gesprochen – den Winkel zwischen den Vektoren gewichtet mit ihrer Länge an.)

Betrachten wir zur Veranschaulichung eine Anwendung aus dem täglichen Leben für Frames, und zwar das Telefonieren mit dem Mobiltelefon. Hier wäre  $f$  das Sprachsignal, das man in das Mobiltelefon “eingibt”. Um dieses Signal zu übertragen, wird es im Wesentlichen mit Hilfe einer geeigneten endlichen Menge  $G$  in die Menge (0.5) zerlegt. Es stellen sich somit kanonischerweise die folgenden Fragestellungen:

1. Wie können wir das Signal  $f$  wieder zurückgewinnen, damit unser Gesprächspartner nicht Unverständliches, d.h. (0.5), sondern das Sprachsignal selbst empfängt?
2. Ist diese Art der Übertragung robust gegenüber Störungen, d.h.
  - a) verändern leichte Störungen der Werte in (0.5) auch das rekonstruierte Sprachsignal nur leicht, und
  - b) läßt sich das Sprachsignal auch dann noch rekonstruieren, wenn man einige Werte aus (0.5) bei der Übertragung verloren hat?

Frage 1 und Frage 2a werden wir noch in diesem Abschnitt beantworten, wohingegen

Frage 2b in Abschnitt 3.2 diskutiert wird. In Abschnitt 3.3 wenden wir dann unsere Überlegungen auf die Abtastmenge (0.4) der kontinuierlichen Wavelettransformation an.

Nun aber zu der mathematischen Definition eines Frames. Die Definition ist im Wesentlichen so gemacht, dass Frage 2a sofort positiv beantwortet werden kann, d.h. leichte Änderungen des Signals  $f$  implizieren leichte Änderungen der Menge (0.5) und umgekehrt. Mathematisch gesprochen hört sich das so an: Eine endliche Menge  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  im  $\mathbb{R}^d$  ist ein *Frame* für  $\mathbb{R}^d$ , wenn Konstanten  $0 < A \leq B < \infty$  existieren, so dass

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^n |\langle f, g_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \text{für alle } f \in \mathbb{R}^d.$$

Man bezeichnet oft  $A$  als *untere Frameschranke* und  $B$  als *obere Frameschranke*.

Wie sieht nun die Rekonstruktion des Signals  $f$  aus den Werten (0.5) aus? Hierfür konstruiert man eine zweite endliche Menge – nennen wir sie  $\tilde{G} = \{\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n\}$  – so dass wir unser Signal  $f$  auf die folgende einfache Art und Weise zurückberechnen können:

$$f = \sum_{i=1}^n \langle f, g_i \rangle \tilde{g}_i. \quad (0.6)$$

Das Schöne ist, dass man die Menge  $\tilde{G}$  – man bezeichnet sie auch als *dualen Frame* – direkt aus der anfangs gewählten Menge  $G$  mit Hilfe eines speziellen Operators berechnen kann. Wir sollten an dieser Stelle noch anmerken, dass wir somit die Frage 1 positiv beantwortet haben.

Besonders einfach ist die Berechnung des dualen Frames, wenn unser Frame die stärkere Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^n |\langle f, g_i \rangle|^2 = \|f\|^2 \quad \text{für alle } f \in \mathbb{R}^d$$

erfüllt, d.h. die untere und obere Frameschranke stimmen überein und sind gleich 1. In diesem Fall spricht man von einem *Parseval-Frame*. Ein einfaches Beispiel eines Parseval-Frames in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  zeigt die Abbildung 5. Aus offensichtlichen Gründen wird er in der Literatur als *“Mercedes-Benz-Frame”* bezeichnet.

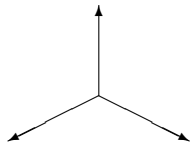


Abbildung 5: Der *“Mercedes-Benz-Frame”*, bestehend aus den Vektoren  $(0, \frac{\sqrt{2}}{3})$ ,  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$  und  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ , als Beispiel eines Parseval-Frames.

Nun ist die Berechnung des dualen Frames  $\tilde{G}$  denkbar einfach, denn er stimmt mit dem ursprünglichen Frame  $G$  überein. Wir können somit in diesem Fall unser Signal  $f$  folgendermassen rekonstruieren:

$$f = \sum_{i=1}^n \langle f, g_i \rangle g_i. \quad (0.7)$$

Die Übertragung eines Sprachsignals beim Telefonat mit einem Mobiltelefon bei Verwendung eines Parseval-Frames ist in der Abbildung 6 dargestellt.

### Robustheit versus Minimalität

Wir beschränken uns im Folgenden auf Parseval-Frames, da diese – wie oben ge-

sehen – sehr schöne Eigenschaften besitzen und auch für die meisten Anwendungen konstruierbar sind.

Als erstes beschäftigen wir uns mit der Frage 2b und betrachten zunächst den Mercedes-Benz-Frame aus der Abbildung 5. Benennen wir die drei Vektoren  $g_1, g_2$  und  $g_3$ . Bei vorliegendem Signal/Vektor  $f$  fällt sofort auf, dass wir, selbst wenn wir *einen* der Koeffizienten  $\langle f, g_i \rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$  verlieren würden, dieses Signal aus den verbleibenden zwei zurückberechnen können. Der Grund hierfür ist, dass  $\mathbb{R}^2$  zweidimensional ist, wir also nur zwei (linear unabhängige) Vektoren zur Darstellung eines Elementes aus  $\mathbb{R}^2$  benötigen. Etwas allgemeiner können wir folglich sagen, dass wir bei der Zerlegung eines Signals im  $\mathbb{R}^d$  bezüglich eines Parseval-Frames mit mehr als  $d$  Elementen trotz des Verlustes eines Koeffizienten das Signal immer noch rekonstruieren können.

Etwas genauer wird die Redundanz eines Parseval-Frames folgendermaßen beschrieben. Betrachten wir wieder einen Parseval-Frame  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  im  $\mathbb{R}^d$ , diesmal bestehend aus Vektoren der gleichen Länge  $c$ . Dann sagt man  $c^2$  ist die *Redundanz* des Parseval-Frames. Im Beispiel des Mercedes-Benz-Frames läßt sich leicht errechnen, dass  $c^2 = \frac{3}{2}$ , also echt größer als 1 ist. Wir haben also *“genug”* Information vorliegen, dass wir ruhig etwas davon verlieren dürfen. Ist die Redundanz gleich 1, so darf kein Verlust eintreten. In diesem Fall haben wir eine *Orthonormalbasis* vorliegen, d.h.

- $\|g_i\|_2 = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , d.h. die Länge aller Vektoren ist 1,
- $\langle g_i, g_j \rangle = 0$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , d.h. die Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

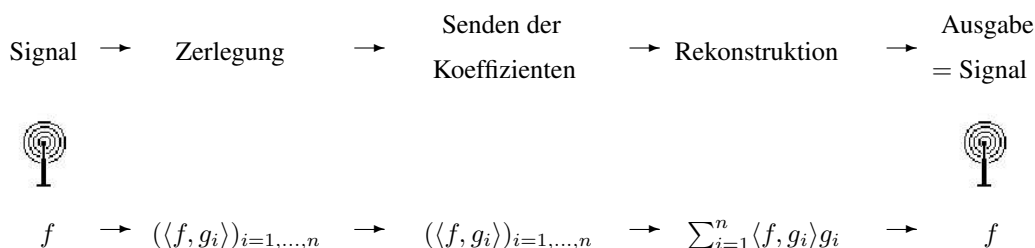


Abbildung 6: Schematische Darstellung der Übertragung eines Signals mit Hilfe eines Parseval-Frames

ander, und

- für jedes  $f \in \mathbb{R}^d$  existiert genau eine Koeffizientenfolge  $(a_i)_{i=1,\dots,n}$  mit  $f = \sum_{i=1}^n a_i g_i$  und zwar  $(\langle f, g_i \rangle)_{i=1,\dots,n}$ , d.h. die Darstellung jedes Signals  $f$  mit Hilfe von  $G$  ist durch  $(\langle f, g_i \rangle)_{i=1,\dots,n}$  gegeben, aber im Gegensatz zu vorher ist dies die einzig mögliche Koeffizientenfolge.

Die kanonische Orthonormalbasis im  $\mathbb{R}^2$  ist in der Abbildung 7 zu sehen.

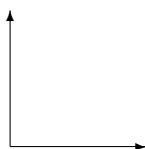


Abbildung 7: Die kanonische Orthonormalbasis im  $\mathbb{R}^2$  gegeben durch die Vektoren  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$ .

Man muss jetzt natürlich für jede Anwendung einzeln abwägen, ob man mehr Robustheit benötigt und dafür mehr Framevektoren benutzt – was wiederum die Rechenzeit erhöht –, oder ob man so wenig Vektoren wie möglich benutzen möchte – in diesem Fall bietet sich eine Orthonormalbasis an –, dafür aber keinen Koeffizienten verlieren darf.

### Zurück zu Wavelet-Frames

Erinnern wir uns nun daran, dass wir endliche Mengen  $D \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$  bestimmen wollten, so dass man ein Signal  $f$  aus den zugehörigen abgetasteten Werten der kontinuierlichen Wavelettransformation

$$\mathcal{W}_\psi f(a, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{x-t}{a}\right)} dx \tag{0.8}$$

mit Parametern  $(a, t) \in A$  zurückberechnen kann. Der Einfachheit halber definieren wir

$$\psi_{a,t}(x) := \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-t}{a}\right).$$

Ferner bemerken wir, dass in  $L^2(\mathbb{R})$  – dem Raum der Funktionen endlicher Energie, in dem sich unser Wavelet und damit auch alle “Kopien”  $\psi_{a,t}$  befinden – das Skalarprodukt definiert ist durch

$$\langle g, h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Damit lässt sich (0.8) folgendermaßen umschreiben:

$$\mathcal{W}_\psi f(a, t) = \langle f, \psi_{a,t} \rangle, \quad (a, t) \in A.$$

Dies sieht schon sehr ähnlich den in Abschnitt betrachteten Framekoeffizienten (0.5) (vgl. auch (0.7)). Die Menge  $\{\psi_{a,t} : (a, t) \in A\}$



müßte somit ein Frame sein, damit wir die in Abschnitt und entwickelte Theorie anwenden können. Ein Schönheitsfehler tritt nun auf: Oben haben wir der Einfachheit halber Frames in  $\mathbb{R}^d$  betrachtet. Hier benötigen wir die Theorie allerdings für  $L^2(\mathbb{R})$ . Das ist aber kein Problem. Die ganze Theorie gilt sogar viel allgemeiner für sogenannte Hiberträume.

Verlangen wir also, dass

$$\{\psi_{a,t} : (a, t) \in A\} \tag{0.9}$$

einen Frame bildet, so können wir (0.6) anwenden und erhalten die Rekonstruktionsformel

$$f(x) = \sum_{(a,t) \in A} \mathcal{W}_\psi f(a, t) \widetilde{\psi}_{a,t}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei  $\widetilde{\psi}_{a,t}, (a, t) \in A$  den zugehörigen dualen Frame darstellt. Bildet die Menge (0.9) sogar einen Parseval-Frame, so folgt nach (0.7) sogar die weitaus schönere Formel

$$f(x) = \sum_{(a,t) \in A} \mathcal{W}_\psi f(a, t) \psi_{a,t}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Aufgabe besteht somit darin, Mengen  $A$  so zu wählen, dass die Menge (0.9) einen Frame, Parseval-Frame oder eine Orthonormalbasis bildet, je nachdem ob man an Robustheit oder Minimalität (siehe Abschnitt ) interessiert ist.

Die kanonischste Wahl einer Menge  $A$  ist die Verwendung der *dyadischen Abtastung*. Hierbei wählt man

$$A = \{(2^j, 2^j k) : j, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Eine graphische Veranschaulichung ist in Abbildung 8 zu finden.

Sehen wir uns diese Art der Abtastung zunächst etwas genauer an. Je kleiner  $a$  wird,

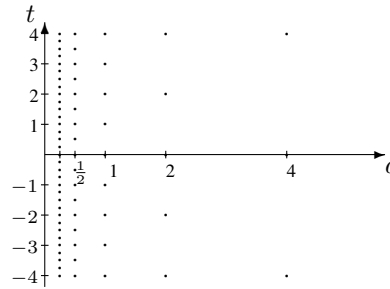


Abbildung 8: Die dyadische Abtastung  $A = \{(2^j, 2^j k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ .

desto mehr Abtastpunkte werden auf die Verschiebung  $t$  verwendet. Dies ist sofort einleuchtend, wenn man überlegt, dass ein kleines  $a$  auch eine starke Stauchung des Wavelets bewirkt. Um jetzt noch das gesamte Signal mit Verschiebungen “abdecken” zu können, brauchen wir halt viel mehr Verschiebungen.

Das zugehörige, sogenannte *klassische Waveletsystem* hat für ein Wavelet  $\psi$  jetzt die folgende Gestalt:

$$\left\{ \frac{1}{2^{j/2}} \psi \left( \frac{x - 2^j k}{2^j} \right) = \frac{1}{2^{j/2}} \psi \left( \frac{x}{2^j} - k \right) : j, k \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{0.10}$$

Am Anfang der Entwicklung der Wavelettheorie wurde eine Vielzahl von Kriterien bewiesen, wann solch ein System eine Orthonormalbasis ist. Die gängigsten Wavelets, wie z.B. die Wavelets aus Abbildung 4 erfüllen alle diese Kriterien.

In den letzten Jahren wurde – da man den Vorteil der Robustheit einer Framedarstellung für eine Vielzahl von Anwendungen entdeckt hatte – damit begonnen, Systeme der Gestalt (0.10) auf Frameeigenschaften hin zu untersuchen. Auch hier liegen schon eini-

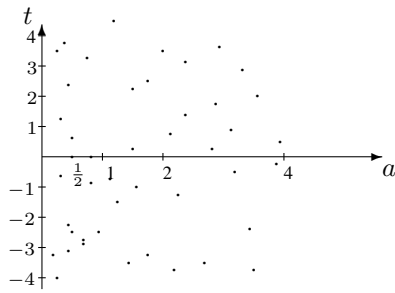


Abbildung 9: Eine beliebige Abtastmenge  $A \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$ .

ge Resultate vor, die insbesondere Parseval-Frames der Form (0.10) vollständig beschreiben.

Manchmal findet man bei Resultaten auch die etwas allgemeinere Abtastmenge

$$A = \{(a^j, a^j bk) : j, k \in \mathbb{Z}\}, \quad a > 0, b \in \mathbb{R},$$

Verwendung und somit das Waveletsystem, das von den Funktionen

$$\frac{1}{a^{\frac{j}{2}}} \psi \left( \frac{x - a^j bk}{a^j} \right) = \frac{1}{a^{\frac{j}{2}}} \psi \left( \frac{x}{a^j} - bk \right)$$

für  $j, k \in \mathbb{Z}$  erzeugt wird. In konkreten Anwendung wird aber noch fast immer das klassische Waveletsystem verwendet. Es wird sich auch in Abschnitt 3 zeigen, dass diese Wahl der Abtastung einen zentralen Vorteil hat, denn sie stellt durch ihre enge Verbindung zu Filterbänken einen einfach zu implementierenden, schnellen Zerlegungs- und Rekonstruktionsalgorithmus bereit.

Zuletzt wollen wir noch bemerken, dass man natürlich statt der dyadischen Abtastung auch eine beliebige Abtastmenge  $A \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$  verwenden kann. Ein Beispiel ist in Abbildung 9 dargestellt.

Allerdings werden dann Fragestellungen nach den Frameeigenschaften des zugehörigen

gen – man sagt *irregulären* – Waveletsystems

$$\left\{ \frac{1}{a^{\frac{j}{2}}} \psi \left( \frac{x - t}{a} \right) : (a, t) \in A \right\}.$$

sofort sehr kompliziert. Es gibt schon einige Resultate, die Frameeigenschaften solcher Systeme beschreiben, aber von einer vollständigen Charakterisierung, wie sie für klassische Waveletsysteme vorliegt, ist die derzeitige Forschung noch weit entfernt.

## Literatur

- Blatter, C. (2003). *Wavelets. Eine Einführung*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag.
- Christensen, O. (2003). *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Boston: Birkhäuser.
- Daubechies, I. (1992). Ten lectures on wavelets. *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, 61.
- Hubbard, B. (1998). *The World According to Wavelets: The Story of a Mathematical Technique in the Making*. Natick, MA: A. K. Peter, Ltd.
- Klein, A. (2008). Wavelet- und Fourierkohärenz in Theorie und Praxis. *Kognitive Neuropsychologie des Menschen*, 1, 32–38.
- Kutyniok, G. (2006). *Affine Density in Wavelet Analysis*. Justus-Liebig-Universität Gießen: Habilitationsschrift.
- Mallat, S. (1999). *A Wavelet Tour of Signal Processing* (2nd Aufl.). New York: Academic Press.