

Perspektiven der Stochastischen Analysis in der Bayesschen Statistik

Wilhelm Stannat
Fachbereich Mathematik
TU Darmstadt

`stannat@mathematik.tu-darmstadt.de`

MPI Mathematik in den Naturwissenschaften
Leipzig, 22. März 2011

Gliederung

Was ist Stochastische Analysis?

Grundaufgabe der Signalverarbeitung - Bayesscher Ansatz

Fallbeispiel 1 - Stochastisches Filter Markovscher Signale

Teilchenfilter

Fallbeispiel 2 - Bayessche inverse Probleme

Was ist Stochastische Analysis?

Antwort (vielleicht im Sinne von Ito):

Analysis *zufälliger Pfade*

(dh typischer Pfade von Diffusionsprozessen, zB Brownsche Bewegung), insbesondere

- ▶ Differential- und Integralkalkül für Funktionen von unbeschränkter Variation (Ito-Kalkül und stochastische Integration)
- ▶ *rough path analysis* (T. Lyons) - aufbauend auf natürlicher Geometrie auf Pfaden unbeschränkter Variation (Anwendung: robuste Löser für stoch. (partielle) Differentialgleichungen)

Was ist Stochastische Analysis?

Antwort (vielleicht im Sinne von Kolmogorov):

Analysis der Übergangswahrscheinlichkeiten stochastischer Prozesse, insbesondere

- ▶ stochastische Darstellungen für Lösungen von Randwertproblemen (*Pfadintegraldarstellungen*)
 - ▶ Analysis von Markovprozessen
 - ▶ Störung 0. Ordnung: (X_t) Markov Prozess mit Generator L , V Potential

$$e^{t(L+V)}f(x) = E \left(f(X_t) \exp \left(\int_0^t V(X_s) ds \right) \mid X_0 = x \right)$$

- ▶ Störung 1. Ordnung: Girsanovtransformation
 - ▶ Transformationen 2. Ordnung: Zeittransformation
- ▶ Potentialtheorie und Regularitätstheorie elliptischer und parabolischer Randwertprobleme mit Maximumprinzip

Was ist Stochastische Analysis?

Antwort (vielleicht im Sinne von P. Malliavin):

Analysis auf dem Wieneraum, oder andere “Mannigfaltigkeiten” (zB Konfigurationsräume), insbesondere

- ▶ Wieneraum als unendlichdim. Riemannsche Mannigfaltigkeit
- ▶ Sobolevräume induziert durch den Malliavin-Gradienten
- ▶ White noise Kalkül
- ▶ Potentialtheorie und Regularitätstheorie elliptischer und parabolischer Randwertprobleme bzgl. des Gross-Laplace operators

Grundaufgabe der Signalverarbeitung

Schätzung eines verrauschten Signals $X(\in S)$

$$Y = G(X, e)$$

- ▶ e - Messfehler
- ▶ Y - Beobachtung, $zB \in \mathbb{R}^p, L^2(D), \dots$

typische Anwendungen

(i) **Stochastische Filter**, zB zur Positionsbestimmung: klassisches lineares tracking Problem

- ▶ $X = X_t = [\text{Pos.}, \text{Geschw.}, \text{Beschl.}]^T$ Zustand zur Zeit t

$$dX_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \cdot X_t dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \cdot dW_t$$

- ▶ $Y = Y_t$ - durch Messfehler gestörte beobachtete Position $X_{t,1}$

$$dY_t = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot X_t dt + de_t$$

Grundaufgabe der Signalverarbeitung

Schätzung eines verrauschten Signals $X \in S$

$$Y = G(X, e)$$

- ▶ e - Messfehler
- ▶ Y - Beobachtung, zB $\in \mathbb{R}^p, L^2(D), \dots$

typische Anwendungen

- (i) **Stochastische Filter**
- (ii) **Data assimilation**, zB Schätzung eines Geschwindigkeitsfeldes
 - ▶ $X \in L^2_{\sigma,0}(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ - Anfangszustand

$$\begin{cases} \dot{u}_t &= \nu \Delta_S u_t - \Pi(u_t \cdot \nabla) u_t + \Pi f_t \\ u_0 &= X \end{cases}$$

- ▶ $Y = u_T(X) + e$ - e Gaußscher Messfehler auf $L^2_{\sigma,0}(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$
führt auf ein inverses Problem

Bayes Schätzer

in Anwendungen sind bekannt:

- ▶ Modell für X , zB Beschreibung durch SDGL, PDGL, ...
- ▶ Verteilung des Messfehlers $P(Y \in dy \mid X = x)$

$$\text{Ann } P[Y \in dy \mid X = x] = e^{-l(y,x)} \nu(dy)$$

liefert auf Grundlage des Bayesschen Theorems die **posterior** Verteilung

$$\begin{aligned} \eta^Y(dx) &= \frac{e^{-l(Y,x)} P_X(dx)}{\int e^{-l(Y,\bar{x})} P_X(d\bar{x})} \propto e^{-l(Y,x)} P_X(dx) \\ &= (\text{reguläre}) \text{ bedingte Verteilung von } X \text{ gegeben } Y \\ &= P[X \in dx \mid Y = y] \end{aligned}$$

$l(Y, x)$ log-Likelihoodfunktion

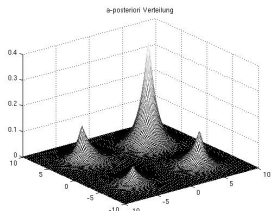
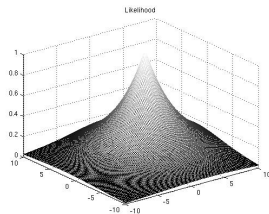
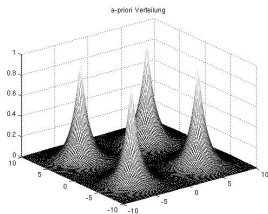
Beispiele

(i)

- ▶ P_{X_0} Anfangsverteilung auf \mathbb{R}^9
- ▶ $l(y, x) = \frac{1}{2} \langle (\Gamma \Gamma^T)^{-1} (y_t - Gx_t), (y_t - Gx_t) \rangle$

(ii)

- ▶ $P_X = N(u_0, Q)$, Q Kovarianzoperator auf $L^2_\sigma(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$
- ▶ $l(y, x) = \frac{1}{2} \|y - u_T(x)\|_{L^2_\sigma(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)}^2$



Ansätze zur Konstruktion von Schätzern

durch Minimierung einer Verlustfunktion

$$\int L(\hat{X}, x) \eta^Y(dx) \quad \text{bzgl. } \eta^Y$$

- ▶ maximum a posteriori Schätzer - Modalwert von η^Y
formal - L^∞ -optimal, dh $L(\hat{X}, x) = 1_{\{\hat{X} \neq x\}}$
 - ▶ Übertragung des Maximum-Likelihood-Ansatzes
 - ▶ sinnvoll nur für unimodale Verteilungen
 - ▶ i.a. keine (schnelle) rekursive Variante für Markovsche Signale
 - ▶ Ex, Reg, ... mit direkten Methoden der Variationsrechnung

Ansätze zur Konstruktion von Schätzern

durch Minimierung einer Verlustfunktion

$$\int L(\hat{X}, x) \eta^Y(dx) \quad \text{bzgl. } \eta^Y$$

- ▶ maximum a posteriori Schätzer - Modalwert von η^Y
- ▶ posterior median Schätzer - Median von η^Y
 L^1 -optimal, dh $L(\hat{X}, x) = |\hat{X} - x|$
 - ▶ allg. Schätzer des $\frac{p_0}{p_0+p_1}$ -Quantils von η^Y minimiert
 $L(\hat{X}, x) = p_0(x - \hat{X})^+ + p_1(x - \hat{X})^-$
 - ▶ robuster Schätzer
 - ▶ numerisch aufwändig

Ansätze zur Konstruktion von Schätzern

durch Minimierung einer Verlustfunktion

$$\int L(\hat{X}, x) \eta^Y(dx) \quad \text{bzgl. } \eta^Y$$

- ▶ maximum a posteriori Schätzer - Modalwert von η^Y
- ▶ posterior median Schätzer - Median von η^Y
- ▶ minimum mean square error Schätzer $E(X|Y = y)$ L^2 -optimal, dh $L(\hat{X}, x) = |\hat{X} - x|^2$
 - ▶ erlaubt Hilbertraummethoden
 - ▶ (schnelle) rekursive Variante für Markovsche Signale

Informationsgewinn durch Bayessche Schätzung

Bsp additiver Messfehler

$$Y = X + e$$

▶ $\hat{X}^{emp} = Y$

$$\text{Var} \left(\hat{X}^{emp} - X \right) = \text{Var}(e)$$

▶ für die Bayessche Schätzung $\hat{X}^{Bayes} = E(X | Y)$ dagegen

$$\text{Var} \left(\hat{X}^{Bayes} - X \right) = - \text{Var} \left(\hat{X}^{Bayes} - \hat{X}^{emp} \right) + \text{Var} \left(\hat{X}^{emp} - X \right)$$

Illustration $X, e \in \mathbb{R}^1$, unabhängig, $N(m_X, q_X)$, $N(0, q_e)$

$$\hat{X}^{Bayes} = \frac{q_X}{q_X + q_e} Y + \frac{q_e}{q_X + q_e} m_X$$

Fragen bzgl η^Y

- ▶ Existenz und Darstellung von η^Y
(zB Existenz einer regulären bedingten Verteilung)
- ▶ Stetigkeit von η^Y bzgl. Y und P_X , Sensitivität
- ▶ Wohldefiniertheit Bayesscher Schätzer (zB MAP) und weitere Schätztheorie
- ▶ quantitative Erfassung des Informationsgewinns
- ▶ Numerische Aspekte von η^Y
(zB wie kann η^Y auf dem Rechner approximiert werden?)

Numerische Aspekte von η^Y

- ▶ geschlossene Formeln selten
 - ▶ klassischer Fall: X, Y gemeinsam Gaußsch verteilt $\implies \eta^Y$ ebenfalls Gaußsch (Grundlage des Kalman Filters)
 - ▶ Verallgemeinerungen
 - ▶ konjugierte Familien \mathcal{P} (dh $P_X \in \mathcal{P} \implies \hat{\mu} \in \mathcal{P}$)
 - ▶ exponentielle Familien $\mathcal{P} = \{p(x, \theta) \propto \exp(\theta^T c(x)) \mid \theta \in \Theta\}$
 - ▶ Projektionen auf geeignete Familien \mathcal{P}

markiert den zeitweiligen Endpunkt der Entwicklung der Bayesschen Analysis in den 1970er Jahren
(vielleicht analog zum Stand in den Part. DGL vor Entwicklung der Funktionalanalysis)

- ▶ mit wachsender Rechnerleistung seit den 1980er Jahren enorm gestiegenes Interesse an numerischen Verfahren zur Approximation von η

Fallbeispiel 1 - Stochastisches Filter Markovscher Signale

(S) $X = (X_t)$ Markovsches Signal

z.B. $dX_t = B(X_t) dt + C(X_t) dW_t$

(O) $dY_t = G(X_t) dt + \Gamma de_t$

- ▶ (e_t) -Brownsche Bewegung (generisch)
- ▶ $\Gamma\Gamma^T$ - Kovarianzmatrix des Messfehlers, dEh $\Gamma\Gamma^T = Id$

NB $Y|X$ Brownsche Bewegung mit Drift

Kallianpur-Striebel Formel

Girsanov-Theorems

$$Y | X \sim \exp \left(\int_0^T G(X_t) dY_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|G(X_t)\|^2 dt \right) P_0(dY.)$$

wobei $P_0 =$ Wienermaß, daher

$$\begin{aligned} X | Y &\sim \frac{\exp \left(\int_0^T G(X_t) dY_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|G(X_t)\|^2 dt \right) P(dX)}{\int \exp \left(\int_0^T G(X_t) dY_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|G(X_t)\|^2 dt \right) P(dX)} \quad (1) \\ &= \eta_T^{Y_{0:T}}(dX_{0:T}) \end{aligned}$$

Rem (renorm.) Pfadintegraldarstellung, Ausgangspunkt numerischer Approximationen, zB particle filter

zugehörige SPDE

- ▶ Zakai-Gleichung für nicht normalisierte bedingte Verteilung

$$\int f d\mu_t = E \left(f(X_t) \exp \left(\int_0^T G(X_t) dY_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|G(X_t)\|^2 dt \right) \right)$$

$$d\mu_t = A^* \mu_t dt + G \mu_t dY_t$$

also: äußere Störung der Fokker-Planck Gleichung

- ▶ Kushner-Stratonovich Gleichung für normalisierte bedingte Verteilung $\eta = \eta^Y$

$$d\eta_t = \hat{A} \eta_t dt + \left(G^T - \langle G^T, \eta_t \rangle \right) \eta_t dZ_t$$

wobei

$$dZ_t = dY_t - \langle G, \eta_t \rangle dt \quad (\text{Innovationsprozess})$$

Pfadweise Filtergleichung

$$\begin{aligned}\int f d\eta_t &= \frac{\int f(x) e^{Y_t \cdot G(x)} \hat{\eta}_t(dx)}{\int e^{Y_t \cdot G(x)} \hat{\eta}_t(dx)} \\ &= \frac{E \left[f(\bar{X}_t) \exp(Y_t G(\bar{X}_t)) \exp\left(\int_0^t G(Y_s, \bar{X}_s) ds\right) \right]}{E \left[\exp(Y_t G(\bar{X}_t)) \exp\left(\int_0^t G(Y_s, \bar{X}_s) ds\right) \right]}\end{aligned}$$

wobei

$$\frac{d}{dt} \hat{\eta}_t = A_t^* \hat{\eta}_t + (G(Y_t, \cdot) - \langle G(Y_t, \cdot), \hat{\eta}_t \rangle) \hat{\eta}_t$$

mit

- ▶ (\bar{X}_t) - Markovprozess mit Generator $A_t := A - Y_t \langle (CC^T) DG, \cdot \rangle$
- ▶ $G(Y, \cdot) = \exp(Y \cdot G(\cdot)) A(\exp(-Y \cdot G(\cdot))) - \frac{1}{2} \|G(\cdot)\|^2$

Offene Frage Darstellungen von η^Y im Falle Markovscher Signale mit multipl. Messfehler

Bsp Stochastische Volatilität von Preisprozessen

$$dY_t = r_t Y_t dt + \sigma_t dY_t$$

Zur Stabilität und Sensitivität von η^Y

Transferoperator

$$\eta^Y = \Phi(Y, \mu), \quad \Phi(y, \mu) = \frac{e^{-I(y,x)} \mu(dx)}{\int e^{-I(y,x)} \mu(dx)}$$

generisches Problem für Bayessche Analysis: Stabilität bzgl.
 $\mu = P_X$

klassische Bedingungen für Stabilität

kompakter Zustandsraum oder beschränkter Messfehler: Φ Kontraktion bzgl.
 $\|\cdot\|_{tv}$ oder Hilbertmetrik (im wesentlichen Dobrushin)

Eigener Ansatz: LogKonkavität von $\mu = e^{-V} dx$

\mathcal{M}_{\logKonk} = alle logkonkaven Maße

- ▶ identifiziere Bedingungen für (S) und (O), unter denen

$$\Phi(Y, \varphi \mathcal{M}_{\logKonk}) \subseteq \varphi \mathcal{M}_{\logKonk} \quad \text{für Referenzdichte } \varphi$$

- ▶ quantifiziere Kontraktion mithilfe von Funktionalungleichungen (zB Poincare)

aus **verschiedenen Perspektiven:**

- ▶ **Zustandsraum** zeitabhängiges Analogon zu Brascamp/Lieb
- ▶ **Pfadraum** Kopplungsmethoden

Typisches Resultat

$$(S) \quad dX_t = B(X_t) dt + CdW_t \quad \text{auf } \mathbb{R}^d$$

$$(O) \quad dY_t = GX_t dt + \Gamma de_t, \quad Y_0 = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^p$$

wobei

- ▶ $(W_t)_{t \geq 0}, (e_t)_{t \geq 0}$ unab. Brownsche Bewegungen
- ▶ $B(x) = B_1 x + Q \nabla \varphi(x), Q = CC^T > 0$
- ▶ $V(x) := \frac{1}{2} \langle (\Gamma \Gamma^T)^{-1} Gx, Gx \rangle + \langle B_1 x, \nabla \log \varphi(x) \rangle + \frac{1}{2} \frac{\text{tr}(Q \varphi''(x))}{\varphi}(x)$ glm.
strikt konvex
 $\exists K > 0$ mit $V'' \geq K$

Theorem [St 08, im Oxford Handb on Nonlin Filtering]

Es sei

- ▶ $Y \in H_{\frac{1}{3}}, Y_0 = 0$
- ▶ $\mu_1 := P_{X_0}$ die wahre Anfangsverteilung von (S)
- ▶ μ_2 absolutstetig mit Dichte m_2 so dass
 - ▶ $\varphi^{-1}m_2$ logkonkav mit $(\varphi^{-1}m_2)'' > K_*$
 - ▶ $\frac{d\mu_1}{d\mu_2}$ Lipschitz, $\geq \delta > 0$

dann folgt

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{\kappa_*}{2} t} \|\hat{\eta}_t^1 - \hat{\eta}_t^2\|_{tv} < \infty$$

Hierbei ist

$$\kappa_* := \min \left\{ \lambda : \lambda \text{ Eigenwert von } \sqrt{Q}K_*\sqrt{Q} + \frac{1}{2}(B_1 + B_1^T) \right\}$$

und K_* eindeutig bestimmte positiv definite Lösung von

$$K_*QK_* + B_1^T K_* + K_*B_1 - K = 0$$

Offene Fragen

- ▶ nichtuniforme Abschätzungen
- ▶ Stabilität bei multiplikativem Messfehler

Teilchenfilter

fixiere Beobachtung $Y_{0:t}$, $\eta_t = \eta_t^{Y_{0:t}}$

Grundidee approximiere die posterior Verteilung mithilfe der empirischen Verteilung eines **gewichteten Teilchensystems**

$$\eta_t \sim \eta_t^N = \sum_{i=1}^N \frac{w_t(i)}{\sum_{j=1}^N w_t(j)} \delta_{X_t(i)} \quad \in \mathcal{M}_1(S)$$

wobei $X_t(i)$ Position des i . Signals

insbes.
$$\int f d\eta_t \sim \int f d\eta_t^N = \frac{\sum_{i=1}^N w_t(i) f(X_t(i))}{\sum_{j=1}^N w_t(j)}$$

Monte Carlo Teilchenfilter

gegeben N unabhängige Kopien von \bar{X}_t

$$\bar{X}_t^{(1)}, \dots, \bar{X}_t^{(N)}$$

definiere nichtnormalisierte Gewichte

$$w_t(i) = \exp \left(Y_t G(\bar{X}_t^{(i)}) + \int_0^t G(Y_s, \bar{X}_s^{(i)}) ds \right)$$

so dass

$$\int f d\eta_t^N = \frac{\sum_{i=1}^N \exp \left(Y_t G(\bar{X}_t^{(i)}) + \int_0^t G(Y_s, \bar{X}_s^{(i)}) ds \right) f(\bar{X}_t^{(i)})}{\sum_{i=1}^N \exp \left(Y_t G(\bar{X}_t^{(i)}) + \int_0^t G(Y_s, \bar{X}_s^{(i)}) ds \right)}$$

Bem

- ▶ **LLN** $\eta_t^N \rightarrow \eta_t$ (im quadr. Mittel)
- ▶ **CLT** $\sqrt{N} \left(\int f d\eta_t^N - \int f d\eta_t \right) \xrightarrow{w} N(0, V_t(f))$

für geeignete f und

$$V_t(f) = \text{Var}_P \left(\frac{w_t}{\int w_t dP} (f(\bar{X}_t) - \eta_t(f)) \right)$$

Nachteil $P_{X_{0:t}}$ und $w_t(i)$ können singular werden, dh η_t^N degeneriert mit wachsendem t

Illustration - deterministisches Signal

$$(S) \quad dX_t = B(X_t) dt \quad \text{auf } \mathbb{R}^d$$

$$\int f d\eta_t = \frac{\int f(x) w_t(Y_{0:t}, x) \mu(dx)}{\int w_t(Y_{0:t}, x) \mu(dx)}$$

$$w_t(Y_{0:t}, x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \|G(X_s(x)) - G(X_s^{true})\|^2 ds\right) \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \|G(X_s^{true})\|^2 ds + \int_0^t G(X_s(x)) de_s$$

$$\text{mit } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t G(X_s(x)) de_s \rightarrow 0 \quad P - \text{f.s.}$$

Moran Teilchenapproximation

Idee nutze die Beschreibung von η_t durch die Zakai-SPDE
zu $N \geq 2$ betrachte N unabhängige Kopien

$$\bar{X}_t^{(1)}, \dots, \bar{X}_t^{(N)}$$

Paar-Wechselwirkung

- ▶ jedes Teilchen $\bar{X}_t^{(i)}$ besitzt exp. Lebenszeit mit Rate $\frac{1}{n}$
- ▶ *stirbt* ein Teilchen wird es ersetzt durch die Kopie eines der übrigen $n - 1$ Teilchen mit Wkeit proportional zu $G(Y_t, \bar{X}_t^{(j)})$

erhalte dadurch einen neuen Prozess

$$M_t^{(1)}, \dots, M_t^{(N)}$$

und nehme $\eta_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{M_t^{(i)}}$ als Approximation für

$$\hat{\eta}_t \propto \exp(-Y_t G(\bar{X}_t)) \eta_t$$

Generator

$$L_t^N f(x) = \underbrace{A_t^N f(x)}_{\text{unabh. Kopien}} + \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N G(Y_t, x_i) \underbrace{(\Phi_{ij}^{(N)} f(x) - f(x))}_{\text{Ersetzungsoperator}}$$

unabh. Kopien

Ersetzungsoperator

mit $\Phi_{ij}^{(N)} f(x_1, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_N)$

zB $\Phi_{12}^{(2)} f(x_1, x_2) = f(x_1, x_1), \quad \Phi_{21}^{(2)} f(x_1, x_2) = f(x_2, x_2)$

Theorem [Del Moral, Miclo 2000]

- ▶ A "regulär" (zB $CC^T \in C_p^4(\mathbb{R}^d)$, $B \in C_p^3(\mathbb{R}^d)$)
- ▶ G beschränkt
- ▶ $(Y_0^{(i)})$ iid (μ)

dann

- ▶ **LLN** $\hat{\eta}_t^N \rightarrow \hat{\eta}_t$ (im quadratischen Mittel)
- ▶ **CLT** $\sqrt{N} \left(\int f d\hat{\eta}_t^N - \int f d\hat{\eta}_t \right) \xrightarrow{w} N(0, V_t(f))$
für geeignete f

$$V_t(f) = \text{Var}_{\hat{\eta}_t}(f) + 2 \int_0^t \int f_{s,t}^2 G(Y_s, \cdot) d\hat{\eta}_s ds$$

mit

$$f_{s,t} = \frac{E_{s,x} \left[f(\bar{X}_t) \exp \left(\int_s^t G(Y_u, \bar{X}_u) du \right) \right]}{\int E_{s,\bar{x}} \left[\exp \left(\int_s^t G(Y_u, \bar{X}_u) du \right) \right] d\hat{\eta}_s(\bar{x})}$$

Funktionaler Zentraler Grenzwertsatz für $\hat{\eta}_t^N$

Promotionsprojekt Schäfer (TU Darmstadt), in Progress

Ann

- ▶ $d = 1$
- ▶ $G(y_t, \cdot) \geq 0$ glm beschränkt

und schreibe $d\hat{\eta}_t = \hat{\eta}_t dx$, dann sollte $\sqrt{N}(\hat{\eta}^N - \hat{\eta}.)$ im Verteilung gegen die Lösung $X_t dx$ der SPDE

$$dX_t = (A_t^* X_t + G(y_t, \cdot) X_t - \langle \hat{\eta}_t, G(y_t, \cdot) \rangle X_t - \langle X_t, G(y_t, \cdot) \rangle \hat{\eta}_t) dt + C_t^* dW_t$$

konvergieren, wobei

- ▶ (W_t) - Wienerprozess auf $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}^2)$
- ▶ $C_t(f) = (\Psi_t(f), \Phi_t(f))$, mit
 - ▶ $\Psi_t(f) = C \frac{df}{dx} \sqrt{\hat{\eta}_t}$
 - ▶ $\Phi_t(f) = \left((x, y) \mapsto (f(x) - f(y)) \sqrt{G(y_t, x) \hat{\eta}_t(x) \hat{\eta}_t(y)} \right)$

Weiterhin nichtasymptotische Abschätzungen bzgl. $\hat{\eta}^N$

Fallbeispiel 2 - Bayessche inverse Probleme

Bsp 2D-Navier-Stokes auf \mathbb{T}^2

zu $u_0 \in H := L^2_{\sigma,0}(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ sei $u_t(u_0) \in L^\infty([0, T]; H) \cap L^2([0, T]; H^{1,2}(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2))$
eindeutig bestimmte schwache Lösung

- ▶ a priori-Verteilung für u_0 : $N(\bar{u}_0, (-\Delta_S)^{-(1+\varepsilon)})$, $\varepsilon > 0$
- ▶ $Y = u_T(u_0) + e$, $e \sim N(0, (-\Delta_S)^{-\gamma})$, $\gamma > -\varepsilon$

führt für $y \in D((-\Delta_S)^{-\frac{\gamma}{2}})$ zur posterior Verteilung

$$\eta^Y \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \langle (-\Delta_S)^{-\gamma}(y - u_T(u_0)), (y - u_T(u_0)) \rangle_H\right) N(\bar{u}_0, (-\Delta_S)^{-(1+\varepsilon)})(du_0)$$

MAP-Schätzung entspricht der Minimierung von

$$\langle (-\Delta_S)^{-\gamma}(y - u_T(u_0)), (y - u_T(u_0)) \rangle_H + \langle (-\Delta_S)^{-(1+\varepsilon)}(\bar{u}_0 - u_0), (\bar{u}_0 - u_0) \rangle_H$$

bzgl. u_0

Fragen

- ▶ numerische Algorithmen zur Approximation von η^Y (zB Stuart, Warwick)
- ▶ funktionale ZGS für asymptotische Varianzen