Technische Universität Berlin **SoSe 2016**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Wilhelm Stannat

Übungsblatt 1 „Wahrscheinlichkeitstheorie III “

In den ersten drei Aufgaben sei $(N_t)_{t\geq 0}$ stets ein Poissonprozess mit Intensität λ.

Aufgabe 1. *Endlichdimensionale Verteilungen des Poissonprozesses*
Für $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ gilt

$$P\left[N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } k_1, \ldots, k_n \text{ nicht monoton wachsend} \\ \prod_{i=1}^n e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!} & \text{falls } 0 = k_0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_n \,. \end{cases}$$

Aufgabe 2. *Martingale des Poissonprozesses*
Es sei $\mathcal{F}_t := \sigma\{N_s \,:\, s \in [0,t]\}$. Dann sind folgende Familien von Zufallsvariablen $(\mathcal{F}_t)$-Martingale:

(i) $(N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$

(ii) $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t\geq 0}$

(iii) $\left(\exp\left(\alpha N_t + \lambda t(1 - e^\alpha)\right)\right)_{t\geq 0}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. *Konstruktion eines Poissonprozesses*
Es sei $T_1, T_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$P(T_i \in dt) = \lambda e^{-\lambda t}\, dt\,, t \geq 0\,.$$

Es sei $S_0 = 0$ und $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$ für $n \geq 1$.
S_n kann man sich vorstellen als die Zeit, in der der n-te Kunde an einen Schalter kommt und T_i als die Wartezeit zwischen $(i-1)$-tem und i-tem Kunden.
Wir definieren

$$N_t := \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}}$$

und $\mathcal{F}_t := \sigma\{N_s : s \leq t\}$ für $0 \leq t < \infty$.
N_t ist dann die Anzahl der Kunden bis zur Zeit t.

a) Zeigen Sie für $0 \leq s < t$: $P(S_{N_s+1} > t \mid \mathcal{F}_s) = e^{-\lambda(t-s)}$.

(Hinweis: Es sei $A \in \mathcal{F}_s$ und $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass ein $B \in \sigma(T_1, \ldots, T_n)$ existiert mit

$$A \cap \{N_s = n\} = B \cap \{N_s = n\}\,.$$

Benutzen Sie dann die Unabhängigkeit zwischen T_{n+1} und dem Paar $(S_n, 1_B)$ um zu folgern

$$P(\{S_{N_s+1} > t\} \cap A \cap \{N_s = n\}) = e^{-\lambda(t-s)} P(A \cap \{N_s = n\})$$

und summieren Sie die letzte Gleichheit über n.)

b) Zeigen Sie für $0 \leq s < t$: Die Zufallsvariable $N_t - N_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda(t-s)$, d.h.

$$P(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} .$$

(Hinweis: Es sei A und n wie im Hinweis zu a). Benutzen Sie

$$P(\{N_t - N_s \geq k\} \cap \{N_s = n\} \cap A) = P(\{S_{N_s+1} + Y_{k-1} \leq t\} \cap \{N_s = n\} \cap A) ,$$

wobei $Y_{k-1} = T_{n+2} + \ldots + T_{n+k}$ unabhängig von $\sigma(T_1, \ldots, T_{n+1})$ ist mit Verteilung $\Gamma_{\lambda,k-1}$, also

$$P(Y_{k-1} \in dt) = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!} t^{k-2} e^{-\lambda t} \, dt \;\text{ für } k \geq 2.)$$

c) Zeigen Sie, dass $M_t := N_t - \lambda t$, $t \geq 0$, ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist.

Aufgabe 4.
Es sei $0 \leq t_1 < t_2 \ldots < t_n$ und $B = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})^T$ normalverteilt mit Mittel 0 und Kovarianzmatrix $(t_i \wedge t_j)_{1 \leq i,j \leq n}$. Zeigen Sie, dass dann die Inkremente

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

unabhängig, $N(0, t_i - t_{i-1})$-verteilt sind. Hierbei setzen wir $t_0 = 0$.

Aufgabe 5.
Es sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine stetige Brownsche Bewegung und $\gamma > \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass für $a > 0$, $\varepsilon > 0$ gilt

$$P[|B_t| \leq a \cdot t^\gamma \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq \varepsilon] = 0,$$

d.h. ein typischer Pfad einer Brownschen Bewegung bleibt auf keinem Intervall $[0, \varepsilon]$ innerhalb der Fläche $\{|y| \leq a \cdot t^\gamma\}$.