Technische Universität Berlin **SoSe 2016**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Wilhelm Stannat

Übungsblatt 2 „Wahrscheinlichkeitstheorie III “

Aufgabe 1. *Alternative Charakterisierung der Brownschen Bewegung*
$(X_t)_{t\geq 0}$ sei ein stochastischer Prozess mit unabhängigen und stationären Inkrementen (d.h. für $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ sind die Inkremente $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$, $1 \leq i \leq n$, unabhängig und für $s > 0$, $t \geq 0$ ist die Verteilung von $X_{t+s} - X_t$ unabhängig von t). Weiterhin sei $E[X_t] = 0$ und $E[X_t^2] = t$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie: Ist für alle $c > 0$ die Verteilung von X_t gleich der Verteilung von $c^{-1}X_{c^2t}$ für alle $t \geq 0$, so ist $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

Aufgabe 2. *Langzeitverhalten der geometrischen Brownschen Bewegung*

Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und

$$Y_t := e^{\beta t} e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t}$$

für α, $\beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
(i) Var $(Y_t) = e^{2\beta t}(e^{\alpha^2 t} - 1)$.
(ii) $\lim_{t\to\infty} Y_t = \begin{cases} \infty & \text{falls } \beta > \frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & \text{falls } \beta < \frac{\alpha^2}{2} \end{cases}$ P-f.s.
(iii) Vergleichen Sie das Ergebnis aus (ii) mit dem Langzeitverhalten von $E(Y_t)$ und Var (Y_t).
(iv)* Was kann man im Falle $\beta = \frac{\alpha^2}{2}$ über das Langzeitverhalten von Y_t aussagen?

Aufgabe 3. *Verteilung des Maximums eines Brownschen Pfades*
Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Brownsche Bewegung und

$$M_t := \sup_{0\leq s\leq t} B_s\,, \quad t \geq 0\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 2.11, dass $P_{M_t} = P_{|B_t|}$ für alle $t \geq 0$, d.h. für alle $b > 0$ ist

$$P\left(M_t > b\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_b^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)\, dx\,.$$

Aufgabe 4. *Dichte von T_b*

(i) Es sei α, $\beta > 0$.

(a) Zeigen Sie:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\alpha^2 t - \frac{\beta^2}{t}}\, dt = \sqrt{\pi}\frac{e^{-2\alpha\beta}}{\alpha}\,.$$

(Hinweis: Substituieren Sie $s = \alpha\sqrt{t} - \frac{\beta}{\sqrt{t}}$, um zu zeigen, dass

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\alpha^2 t - \frac{\beta^2}{t}}\, dt = \frac{e^{-2\alpha\beta}}{\alpha} \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\, ds\,.)$$

(b) Zeigen Sie mithilfe von Teil (a)

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-\alpha^2 t - \frac{\beta^2}{t}}\, dt = \frac{e^{-2\alpha\beta}}{\beta}\,.$$

(ii) Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ Brownsche Bewegung und für $b > 0$

$$T_b := \inf\{t \geq 0 \mid B_t > b\}$$

die erste Passierzeit von b. Dann gilt

$$P(T_b \leq t) = \int_0^t \frac{b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{b^2}{2s}}\, ds\,, t > 0\,.$$