Technische Universität Berlin **SoSe 2016**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Wilhelm Stannat

Übungsblatt 3 „Wahrscheinlichkeitstheorie III “

Aufgabe 1. *Maximum der Brownschen Bewegung*
Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Brownsche Bewegung und

$$M_t := \sup_{0\leq s\leq t} B_s\,, \quad t\geq 0\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 2.11, dass $P_{M_t} = P_{|B_t|}$ für alle $t\geq 0$, d.h. für alle $b>0$ ist

$$P\left(M_t > b\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_b^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)\,dx\,.$$

Aufgabe 2. *Zur Hölderstetigkeit der Brownschen Bewegung*
Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Brownsche Bewegung. Zeigen Sie: Für alle $s\geq 0$ und alle $\varepsilon>0$ ist

$$P\left[\,\exists C\,\in[0,\infty)\text{ mit }|B_t-B_s|\leq C\sqrt{|t-s|}\quad\forall t\text{ mit }|t-s|\leq\varepsilon\right]=0\,.$$

M.a.W.: der typische Pfad einer stetigen Brownschen Bewegung ist in keinem Punkt Hölderstetig mit Exponent $\frac{1}{2}$.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $C\geq 0$

$$\sum_{n=1}^\infty P\left[|B_{s+2^{-n}} - B_{s+2^{-(n+1)}}|\geq C2^{-\frac{n=1}{2}}\right]=\infty$$

und wenden Sie das Lemma von Borel-Cantelli an.)

Aufgabe 3. *Zur Itô-Formel - I*

Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Brownsche Bewegung. Zeigen Sie mit Hilfe der Itô-Formel:

(i) $B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s\,dB_s$.

(ii) $dY_t = Y_t\,dX_t + \frac{1}{2}Y_t dt$ für $Y_t = e^{B_t}$.

(iii) $dY_t = f(B_t)Y_t\,dB_t + \frac{1}{2}f^2(B_t)Y_t\,dt$ für $Y_t = \exp\left(\int_0^t f(B_s)\,dB_s\right)$, $f\in C^1(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4. *Zur Itô-Formel - II*
Die Funktion $t \mapsto X_t$, $t \geq 0$, sei stetig mit stetiger quadratischer Variation $\langle X \rangle$. Zeigen Sie, dass für $f \in C^1(\mathbb{R})$, $G \in C^2(\mathbb{R})$ das Ito-Integral

$$\int_0^t f(X_s) dG(X_s)$$

existiert und übereinstimmt mit

$$\int_0^t f(X_s) G'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f(X_s) G''(X_s) d\langle X \rangle_s \; .$$