Technische Universität Berlin **SoSe 2016**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Wilhelm Stannat

Übungsblatt 4 „Wahrscheinlichkeitstheorie III “

Aufgabe 1. *Stochastisches Integral nach Wiener-Paley*

Es sei (B_t), $t \geq 0$, eine stetige Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $B_0 = 0$.

(i) Es sei $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion von beschränkter Variation mit $h(1) = 0$. Zeigen Sie, daß für einen typischen Brownschen Pfad die Relation

$$\int_0^1 h(s)\, dB_s(\omega) = -\int_0^1 B_s(\omega)\, dh(s) \tag{1}$$

gilt und folgern Sie, dass

$$E[\int_0^1 h(s)\, dB_s] = 0\ .$$

(ii) Wiener und Paley benutzten (1) zur *Definition* des stochastischen Integrals auf der linken Seite (die rechte Seite ist ja maßtheoretisch wohldefiniert) und setzten sie mit Hilfe der Isometrie

$$E\left[\left(\int_0^1 h(s)\, dB_s\right)^2\right] = \int_0^1 h(s)^2\, ds \tag{2}$$

auf beliebige deterministische Integranden $h \in L^2([0,1])$ fort. Beweisen Sie (2) und skizzieren Sie die Konstruktion des *Wienerintegrals* durch Isometrie.

Aufgabe 2. *Stochastische Integrale als Gaußsche Zufallsvariablen*
Es sei (B_t) eine stetige Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $B_0 = 0$ und $\Phi(h) := \int_0^1 h(s)\, dB_s$, $h \in L^2([0,1])$, das in Aufgabe 1 konstruierte stochastische Integral. Zeigen Sie:

(i) $\Phi(h)$ ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittel 0 und Varianz $\int_0^1 h^2(s)\, ds$.

(ii) $E[\Phi(h)\, \Phi(g)] = \int_0^1 h(s)\, g(s)\, ds$ für alle $h, g \in L^2([0,1])$.

Aufgabe 3. *Exponentielle Martingale*
Es sei M ein stetiges lokales Martingal bis $T = \infty$ mit $M_0 = 0$ und stetiger quadratischer Variation $\langle M \rangle$. Zeigen Sie mit Hilfe der zeitabhängigen Itô-Formel, dass

$$\exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t\right)\ , \quad t \geq 0$$

wieder ein stetiges lokales Martingal ist.

Aufgabe 4. *Exponentielle Martingalungleichung*
Es sei M ein stetiges lokales Martingal bis $T = \infty$ mit $M_0 = 0$ und stetiger quadratischer Variation $\langle M \rangle$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3, dass für alle ε, $\delta > 0$ die folgende Ungleichung

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} M_s \geq \varepsilon \text{ und } \langle M \rangle_t \leq \delta\right) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\delta}\right), \quad t \geq 0$$

gilt.