Technische Universität Berlin **SoSe 2016**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Wilhelm Stannat

Übungsblatt 5 „Wahrscheinlichkeitstheorie III "

Aufgabe 1. *Charakterisierung des stochastischen Integrals*

Es sei $M \in \mathcal{H}^0$ und $H \in \mathcal{L}^2(\bar{\Omega}, \mathcal{P}, P_M)$, also das stochastische Integral $H.M \in \mathcal{H}^0$. Zeigen Sie, dass $H.M$ das eindeutig bestimmte (stetige, $\mathcal{L}^2$-beschränkte) Martingal in $\mathcal{H}^0$ ist mit

$$\langle H.M, N\rangle_t = \int_0^t H_s \, d\langle M, N\rangle_s \,,$$

für alle $N \in \mathcal{H}^0$.

Aufgabe 2. *Verteilung stochastischer Integrale*
Es sei (W_t) eine stetige 1-dimensionale Brownsche Bewegung. Für $f \in L^2\left([0,T]\right)$ ist das Itô-Integral $\int_0^T f(s)\, dW_s$ bekanntlich $N\left(0, \int_0^T f^2(s)\, ds\right)$-verteilt. Hängt f zusätzlich von ω ab, ist dies im allgemeinen nicht mehr richtig.
Zeigen Sie, dass aber immer noch gilt: Ist $f : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ produktmessbar und adaptiert, und ist

$$\tau_{\sigma^2} := \inf\left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t f^2(s,\cdot)\, ds \geq \sigma^2 \right\} \leq T \qquad \mathrm{P} - f.s.$$

(und für $T = +\infty$ $\tau_{\sigma^2} < \infty$ P-f.s.) so ist

$$\int_0^{\tau_{\sigma^2}} f(s,\cdot) dW_s \qquad N(0,\sigma^2) - \text{verteilt.}$$

Aufgabe 3. *Stochastische Differentialgleichungen, Beispiele*

Es sei W_t, $t \geq 0$, eine Brownsche Bewegung. Verifizieren Sie in jedem einzelnen Fall, dass der Prozess X_t, $t \geq 0$, die jeweilige stochastische Differentialgleichung löst:

(i) $X_t = e^{W_t}$ löst $dX_t = \frac{1}{2} X_t\, dt + X_t\, dW_t$

(ii) $X_t = \frac{W_t}{1+t}$ löst $dX_t = -\frac{1}{1+t} X_t\, dt + \frac{1}{1+t}\, dW_t$

(iii) $X_t = (a\sin(W_t), b\cos(W_t))^T$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, löst $dX_t = -\frac{1}{2} X_t\, dt + M X_t\, dW_t$, mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{b} \\ -\frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. *Stochastische Differentialgleichungen, starke Eindeutigkeit*

Zeigen Sie, dass für die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + dW_t \,, X_0 = \xi_0$$

mit $b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt, Borel-messbar und monoton fallend in x, d.h.

$$b(t, x) \leq b(t, y) \text{ für } t \geq 0, y \leq x \,,$$

starke Eindeutigkeit gilt.