Technische Universität Berlin **SoSe 2016**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Wilhelm Stannat

Übungsblatt 6 „Wahrscheinlichkeitstheorie III “

Aufgabe 1. *Ausintegration unabhängiger Variablen*
Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilung μ und $\mathcal{A}_0$ Unter-σ-Algebra auf einem (gemeinsamen) zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Weiter sei X unabhängig von $\mathcal{A}_0$ und $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}_0$-messbar. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, \cdot)\mu(dx)$$

ist Version der bedingten Erwartung $E\left(f(X, \cdot) \mid \mathcal{A}_0\right)$. Insbesondere folgt

$$E\left(f(X, \cdot)\right) = \int_{\mathbb{R}} E\left(f(x, \cdot)\right)\, \mu(dx)\,.$$

Beispiel: Ist $(W_t)_{t\geq 0}$ 1-dimensionale $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung, so folgt beispielsweise für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $s > t$

$$P\left(W_s \in A \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} \int_{A-W_t} e^{-\frac{x^2}{2(s-t)}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} \int_{A} e^{-\frac{(x-W_t)^2}{2(s-t)}}\, dx\,.$$

Aufgabe 2. *Feynman-Kac Formel*
Es sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $V \in C(D)$, $V \leq 0$, $f \in C(\partial D)$ und $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\frac{1}{2}\Delta u + Vu = 0\,, \qquad u = f \text{ auf } \partial D\,.$$

Zeigen Sie, dass dann die Darstellung

$$u(x) = E_x\left(f(W_{T_D}) \exp\left(\int_0^{T_D} V(W_s)\, ds\right)\right)$$

für $x \in D$ gilt. Hierbei ist

$$T_D = \inf\{t > 0 : W_t \notin D\}$$

die erste Austrittszeit der Brownschen Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$ aus D.

(Hinweis: Betrachten Sie den Prozess $u(W_t) \exp\left(\int_0^t V(W_s)\, ds\right)$.)

Aufgabe 3.
Zeigen Sie unter geeigneten Annahmen dass für die Lösung der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\Delta u - \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + V = 0 \text{ auf } D \subset \mathbb{R}^d$$

mit Randbedingung $u = f$ auf ∂D gilt:

$$u(x) = -\log E_x \left(\exp \left(-f(W_{T_D}) - \int_0^{T_D} V(W_s)\, ds \right) \right) \ .$$

(Hinweis: Betrachten Sie die Transformation $v(x) := e^{-u(x)}$.)

Aufgabe 4. *zeitabhängige Feynman-Kac Formel*
Es sei W_t, $t \geq 0$, eine d-dimensionale Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass für eine Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{2}\Delta u(t,x) + \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + V(t,x)u(t,x) = 0$$

auf $(0, t_0) \times \mathbb{R}^d$ mit Randbedingung $u(t_0, x) = f(x)$ unter geeigneten Annahmen an $V(t,x)$ und $f(x)$ die Feynman–Kac–Formel

$$u(t,x) = E_x \left(f(W_{t_0 - t}) \exp \left(\int_t^{t_0} V(s, W_{s-t})\, ds \right) \right)$$

gilt.