Technische Universität Berlin **SoSe 2016**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Wilhelm Stannat

Übungsblatt 7 „Wahrscheinlichkeitstheorie III “

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie jeweils eine stochastische Differentialgleichung, deren Generator mit L auf $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ übereinstimmt:

(a) $Lf(x) = \alpha x f'(x) + \frac{1}{2}\beta^2 f''(x)$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$,
(b) $Lf(x) = \alpha f'(x) + \frac{1}{2}\beta^2 x^2 f''(x)$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$,
(c) $Lf(x,y) = \alpha\partial_x f + \beta\partial_y f + \frac{1}{2}\left(\partial_x^2 f + \partial_y^2 f\right)$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$,
(d) $Lf(x,y) = \log(1+x^2)\partial_x f + y\partial_y f + x^2\partial_x^2 f + 2xy\partial_{xy}^2 f + 2y^2\partial_y^2 f$.

Aufgabe 2.
Es sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass die beschränkte Lösung $u(t,x)$ des Cauchy-Problems

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \frac{1}{2}\Delta u + \rho u\,, t>0, x\in\mathbb{R}^d\\ u(0,x) &= f(x)\,, f\in C_b^2(\mathbb{R}^d)\end{aligned}$$

($\rho \in \mathbb{R}$ konstant) wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned}u(t,x) &= E\left(e^{\rho t} f(W_t + x)\right)\\ &= \frac{e^{\rho t}}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{2t}\right)\,dy\,, t>0\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3.
Es sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass die beschränkte Lösung $u(t,x)$ des Cauchy-Problems

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \frac{1}{2}\beta^2 x^2 \partial_x^2 u + \alpha x\partial_x u\,, t>0, x\in\mathbb{R}\\ u(0,x) &= f(x)\,, f\in C_b^2(\mathbb{R})\end{aligned}$$

($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstant) wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned}u(t,x) &= E\left(f\left(x\exp\left(\beta W_t + (\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)t\right)\right)\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} f\left(x\exp\left(\beta y + (\alpha-\frac{1}{2}\beta^2)t\right)\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)\,dy\,, t>0\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 4.
Zeigen Sie in der Situation des Beispiels 5.16 aus der Vorlesung (Black & Scholes Formel zur Optionspreisbewertung): Ist $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ konvex, stückweise C^2 und $h(0) = h'(0) = 0$, so gilt

$$E\left(e^{-r(T-t)}h(Y_T) \mid \mathcal{F}_t\right) = \int_0^\infty h''(q) v_{q,T}(t, Y_t)\, dq\,.$$

Hierbei bezeichnet $v_{q,T}$ die Funktion $v(t,x)$ aus (5.24) im Beispiel, die von den Parametern q und T abhängt.