Technische Universität Berlin **SoSe 2016**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Wilhelm Stannat

Übungsblatt 8 „Wahrscheinlichkeitstheorie III “

Aufgabe 1.
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $b \in C^1(D; \mathbb{R}^d) \cap C(\bar{D}; \mathbb{R}^d)$ und $u \in C^2(D) \cap D(\bar{D})$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\Delta u + b \cdot \nabla u = 0 \text{ auf } D\,, u = f \text{ auf } \partial D\,.$$

Zeigen Sie, dass u stochastisch dargestellt werden kann als

$$u(x) = E_x\left(f(X_{T_D})M_{T_D}\right)$$

mit $M_t = \exp\left(\int_0^t b(X_s)\,dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|b\|^2(X_s)\,ds\right)$.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass M lokales Martingal ist mit $dM = bM\,dX$ und $d\langle M, X\rangle = \langle b, M\rangle\,dt$ und wenden Sie anschließend die Itô-Formel an.)

Aufgabe 2.
Es sei $Y.$ ein stetiges lokales Martingal bis ∞ mit lokalisierender Folge (T_n) und $Z_t = \exp\left(Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t\right)$, $t \geq 0$. Weiterhin sei (S_n) lokalisierende Folge für (Z_t). Zeigen Sie:

(i) (Z_t) ist ein Supermartingal.

(ii) $(Z_{t\wedge S_n})_{t\geq 0}$ ist gleichgradig integrierbar genau dann wenn $E(Z_t) = 1$.

(iii) $(Z_t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal genau dann wenn $E(Z_t) = 1$ für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 3.
Es sei $(W_t)_{t\in[0,1]}$ stetige Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit rechtsstetiger Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$. Weiter seien Q ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß und $b = (b_t)_{t\in[0,1]}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$-adaptierter Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $X_t := W_t - \int_0^t b_s\,ds$ ist eine $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung unter Q und

(b) $\int_0^1 b_s^2\,ds < \infty$ Q-f.s.

Zeigen Sie, dass dann die Verteilung von W unter Q absolutstetig zur Verteilung von W unter P ist.

(Hinweis: Zeigen Sie die Aufgabe zunächst für $b_t^N := b_t 1_{\{\int_0^t b_s^2\,ds \leq N\}}$, $t \geq 0$.)

Aufgabe 4.
Es sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Brownsche Bewegung mit Start in Null auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Es sei $Y_t = W_t + t$, $t \geq 0$.

(i) Bestimmen Sie für alle $T < \infty$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q_T auf $\mathcal{F}_T^W := \sigma\left(\{W_t \mid t \in [0,T]\right)$ so dass $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ Brownsche Bewegung unter Q_T bis T ist.

(ii) Zeigen Sie, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathcal{F}_\infty^W$ existiert mit

$$Q_{|\mathcal{F}_T} = Q_T \text{ für alle } T \geq 0\,.$$

Zeigen Sie, dass

$$P\left(\lim_{t\to\infty} Y_t = \infty\right) = 1$$

während

$$Q\left(\lim_{t\to\infty} Y_t = \infty\right) = 0\,.$$

Warum widerspricht dies nicht dem Girsanov Theorem?