Wahrscheinlichkeitstheorie III

Prof. Dr. Wilhelm Stannat

- Korrigierte Fassung vom 10.7.2014 -

Inhaltsverzeichnis

Der vorliegende Text ist eine Zusammenfassung der Vorlesung **Wahrscheinlichkeitstheorie III** im Sommersemester 2016 an der TU Berlin.

Korrekturen und Kommentare bitte per Email an `stannat@math.tu-berlin.de`

1 Martingale in stetiger Zeit

1.1 Grundlagen stochastischer Prozesse in stetiger Zeit

Wir führen zunächst einige grundlegende Konzepte für stochastische Prozesse ein und wiederholen bei der Gelegenheit einige bereits bekannte Konzepte der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Definition 1.1. Es seien $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(E, \mathcal{E})$ messbare Räume und I eine nichtleere Indexmenge. Eine Familie $X = (X_t)_{t\in I}$ von messbaren Abbildungen von $(\Omega, \mathcal{F})$ nach $(E, \mathcal{E})$ heißt **($(E, \mathcal{E})$-wertiger) Prozess**. Ist zusätzlich ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{F})$ gegeben, so heißt X **stochastischer Prozess**.

Wir erinnern an die Definition der **Borelschen σ-Algebra**. Ist (E, d) ein metrischer Raum, z.B., $\mathbb{R}^d$ mit der üblichen Euklidischen Metrik, oder - allgemeiner - ein topologischer Raum, so bezeichnet $\mathcal{B}(E)$ die Borelsche σ-Algebra auf E, dh, die kleinste σ-Algebra auf E, die alle offenen Teilmengen von E enthält.
Ist $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum und I eine beliebige Indexmenge, so ist der Produktraum E^I bekanntlich definiert als die Menge aller Abbildungen $x : I \to E$, $i \mapsto x_i$. Dann ist die **Produkt-σ-Algebra** $\mathcal{E}^I$ definiert als die kleinste σ-Algebra, für die alle Projektionen $\pi_i : E^I \to E$, $\pi_i(x) = x_i$, $i \in I$, messbar sind.
Unmittelbar aus dieser Definition folgt: Ist $X = (X_t)_{t\in I}$ ein $(E, \mathcal{E})$-wertiger Prozess, so ist $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E}^I)$ immer messbar bzgl. der Produkt-σ-Algebra.

Bemerkung 1.2. Für überabzählbare Indexmengen I ist die Produkt-σ-Algebra relativ grob. Teilmengen von E^I, die nicht durch abzählbar viele Indizes $i \in I$ vollständig bestimmt sind, liegen niemals in $\mathcal{E}^I$. Beispiel:

$$\{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \mid \sup_{s\in[0,1]} f(s) \le 1\}$$

ist niemals in der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{B}^{[0,1]}$ enthalten, egal welche σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$ gewählt wird.

Ist X ein $(E, \mathcal{E})$-wertiger stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so bezeichnet

$$P_X(A) := P \circ X^{-1}(A) := P(X \in A)\,, A \in \mathcal{E}^I$$

die **Verteilung von** X unter P. Alternative Schreibweise für P_X ist $\mathcal{L}(X)$.

Definition 1.3. Es seien X und Y zwei $(E, \mathcal{E})$-wertige stochastische Prozesse auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und mit gemeinsamer Indexmenge I.

(i) X heißt **Modifikation** von **Y**, falls für alle $t \in I$

$$P\,(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \in I\,.$$

(ii) X und Y heßen **ununterscheidbar (oder äquivalent)** falls

$$P\,(X_t = Y_t \quad \forall t \in I) = 1\,.$$

Bemerkung 1.4. (i) Für allgemeine Bildräume muss die Menge $\{X_t = Y_t\}$ nicht messbar sein, auch wenn es X_t und Y_t sind. Daher muss man in Teil (i) der Definition 1.3 eigentlich annehmen, dass die Menge $\{X_t = Y_t\}$ eine $\mathcal{F}$-messbare Menge F_0 enthält mit $P(F_0) = 1$. Analog muss man in Teil (ii) der Definition annehmen, dass die Menge $\{X_t = Y_t \, \forall t \in I\}$ einen $\mathcal{F}$-messbare Menge mit $P(F_0) = 1$ enthält.

(ii) Sind X und Y Modifikationen voneinander, so haben sie dieselbe Verteilung $P_X = P_Y$.

(iii) Sind X und Y ununterscheidbar, so sind sie insbesondere auch Modifikationen voneinander.

(iv) Sind X und Y Modifikationen voneinander und ist die Indexmenge I höchstens abzählbar, so sind sie auch ununterscheidbar.

Beispiel 1.5. $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, P Gleichverteilung auf $[0,1]$, $I = [0,1]$,

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t = \omega \\ 0 & \text{falls } t \neq \omega\,, \end{cases} \qquad Y_t(\omega) \equiv 0$$

Dann sind X und Y Modifikationen voneinander, aber nicht ununterscheidbar.

1.2 Filtrationen und Stoppzeiten

Von nun an betrachten wir stochastische Prozesse und Filtrationen bezüglich der Indexmenge $I = [0,\infty)$. Man kann jedoch auch beliebige Teilmengen $I \subseteq [0,\infty)$ und sogar allgemeiner beliebige partiell geordnete Indexmengen zulassen.

Definition 1.6. Ein $(E,\mathcal{E})$-wertiger Prozess X auf $(\Omega,\mathcal{F})$ heißt **messbar**, falls für alle $A \in \mathcal{E}$ $X^{-1}(A) \in \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}$.

Definition 1.7. Es sei $(\Omega,\mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Eine Familie $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ heißt **Filtration**, falls $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für alle $0 \leq s \leq t$ gilt.

Für eine gegebene Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ interpretieren wir $\mathcal{F}_t$ als die zur Zeit t zur Verfügung stehende Information.

Definition 1.8. Ein $(E,\mathcal{E})$-wertiger Prozess X mit Indexmenge I auf einem messbaren Raum $(\Omega,\mathcal{F})$ mit Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ heißt $\mathbb{F}$-adaptiert, falls für alle $t \geq 0$ die Abbildung X_t $\mathcal{F}_t/\mathcal{E}$-messbar ist.
Die Filtration $\mathcal{F}_t := \sigma\left(\{X_s \mid s \leq t\}\right)$ heißt **natürliche Filtration von X (oder auch die von X erzeugte Filtration**.

Definition 1.9. Für eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ definieren wir

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s\,.$$

Die Familie $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ ist wieder einer Filtration und es gilt $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+}$. $\mathcal{F}_{t+}$ enthält neben den zur Zeit t zur Verfügung stehenden Informationen $\mathcal{F}_t$ auch noch weitere Informationen, die in Bezug auf $\mathcal{F}_t$ "infinitesimal" in der Zukunft liegen.

Definition 1.10. Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$ heißt **rechtsstetig**.

Definition 1.11. Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ heißt **normal**, falls gilt:

(a) $\mathcal{F}_0$ enthält alle P-Nullmengen in $\mathcal{F}$.

(b) $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$, d.h. die Filtration ist rechtsstetig.

Man sagt in diesem Falle auch, dass die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ **den üblichen Bedingungen genügt**.

Definition 1.12. Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration und $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ eine Abbildung.

(i) τ heißt **Stoppzeit** bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \qquad \forall t \geq 0\,.$$

(ii) τ heißt **schwache Stoppzeit oder Optionszeit** bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls

$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t \qquad \forall t \geq 0\,.$$

Bemerkung 1.13. (i) Jede Stoppzeit ist auch eine schwache Stoppzeit, aber im allgemeinen gilt eben nicht die Umkehrung.

(ii) Ist $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetig, so ist auch umgekehrt jede schwache Stoppzeit eine Stoppzeit.

Begründung: Ist τ eine schwache Stoppzeit, so folgt

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\tau < t + \frac{1}{n}\} \quad \in \quad \mathcal{F}_{t+} \quad \forall t \geq 0\,.$$

Beispiel 1.14. Es sei $\Omega = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge,

$$X_t(a) := t \quad \text{und} \quad X_t(b) := -t$$

für $t \geq 0$. Weiter sei $(\mathcal{F}_t)_{t-ge0}$ die von X erzeugte Filtration, also

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{P}(\Omega) \text{ für } t > 0\,.$$

Dann ist die Abbildung

$$\tau(\omega) := \inf\{t \geq 0 \mid X_t(\omega) > 0\}$$

eine schwache Stoppzeit aber keine Stoppzeit. Man beachte, dass die gegebene Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ auch in der Tat nicht rechtsstetig ist.

Bemerkung 1.15. Für **diskrete** Indexmengen, zum Beispiel $I = \mathbb{N}_0$, folgt für jede Abbildung τ aus

$$\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{für alle } t \in I$$

dass τ eine $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit ist. Dies ist für überabzählbare Indexmengen jedoch im allgemeinen falsch. Es gilt zwar für jede Stoppzeit τ nach wie vor, dass

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{für alle } t \geq 0$$

aber eben im allgemeinen nicht die Umkehrung. Für ein Beispiel betrachte auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F}) = ([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)))$ den Prozess

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = \omega \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die von X erzeugte Filtration. Dann gilt offenbar $\mathcal{F}_t = \sigma(\{\{\omega\} \mid \omega \leq t\})$. Betrachte nun die Abbildung

$$\tau(\omega) := \inf\{t \geq 0 \mid X_t(\omega) = 1\}\,.$$

Dann ist τ sogar keine schwache Stoppzeit, denn $\{\tau < t\} \notin \mathcal{F}_t$ für $t > 0$, obwohl $\{\tau = t\} = \{t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$.

Definition 1.16. Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration und τ eine Stoppzeit (bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$). Dann ist das folgende Mengensystem

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0\}$$

eine σ-Algebra (Beweis?). Sie heißt σ-**Algebra der** τ-**Vergangenheit**.

Lemma 1.17. Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration und τ, σ Stoppzeiten (bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$). Dann gilt:

(i) $\mathcal{F}_\tau$ ist eine σ-Algebra.

(ii) Ist $\tau \equiv t$ für ein $t \geq 0$, so ist $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.

(iii) τ ist $\mathcal{F}_\tau$-messbar.

(iv) Für $0 \leq \sigma \leq \tau$ folgt $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$ (sogar wenn σ keine Stoppzeit ist!).

(v) $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

(vi) Ist σ_n, $n \geq 1$ eine beliebige Folge von Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, so ist $\overline{\sigma} = \sup_n \sigma_n$ wieder eine Stoppzeit und $\underline{\sigma} := \inf_n \sigma_n$ eine schwache Stoppzeit.

Bemerkung 1.18. Ist τ eine schwache Stoppzeit, so ist $\mathcal{F}_\tau$ im allgemeinen keine σ-Algebra, da sie nicht notwendigerweise die ganze Menge Ω enthält. In der Tat ist offensichtlich $\mathcal{F}_\tau$ eine σ-Algebra genau dann wenn τ eine Stoppzeit ist.

1.2.1 Eintrittszeiten

Wir wollen im folgenden untersuchen, unter welchen Bedingungen Eintrittszeiten eines Prozesses Stoppzeiten sind.

Definition 1.19. Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und X ein $(E, \mathcal{E})$-wertiger Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Für eine Teilmenge $G \subseteq E$ definieren wir folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned} S_G(\omega) &:= \inf\{t > 0 \mid X_t(\omega) \in G\} && \text{erste Trefferzeit von } G \\ T_G(\omega) &:= \inf\{t \geq 0 \mid X_t(\omega) \in G\} && \text{erste Eintrittszeit in } G\,. \end{aligned}$$

Im folgenden sei eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ auf einem zugrundeliegenden messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ gegeben. Wir geben im folgenden Satz erste Resultate an, wann Eintrittszeiten bzw. Trefferzeiten (schwache) Stoppzeiten sind. Eine entscheidende Verbesserung dieses Satzes werden wir dann am Ende diese Abschnittes in Theorem 1.29 erhalten.

Satz 1.20. Es sei (E,d) ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{E}$ und X ein E-wertiger adaptierter Prozess. Dann gilt:

(i) Ist $G \subseteq E$ offen und besitzt X rechtsstetige Pfade, so sind S_G und T_G schwache Stoppzeiten.

(ii) Ist $G \subseteq E$ abgeschlossen und besitzt X stetige Pfade, so ist T_G eine Stoppzeit.

Beweis. (i) Offensichtlich gilt für $t > 0$ aufgrund der Rechtsstetigkeit

$$\{T_G < t\} = \bigcup_{0<s<t} \{X_s \in G\} = \bigcup_{s\in(0,t)\cap\mathbb{Q}} \{X_s \in G\} \in \mathcal{F}_t \,.$$

Eine entsprechende Argumentation gilt auch für S_G.
(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $G_n := \{x \in E \mid d(x,G) > \frac{1}{n}\}$. Dann ist G_n offen und $T_{G_n} < T_G$ auf der Menge $\{T_G \in (0,\infty)\}$. In der Tat: da G abgeschlossen und X stetig, muss $X_{T_G} \in G$ gelten auf der Menge $\{T_G < \infty\}$. Ist $T_G > 0$, so folgt hieraus insbesondere $T_{G_n} < T_G$. Die Folge $T_{G_n}(\omega)$ ist offensichtlich aufsteigend und damit konvergent gegen ein $T(\omega) \leq T_G(\omega)$. Aufgrund der Stetigkeit muss Gleichheit $T(\omega) = T_G(\omega)$ gelten. Hieraus folgt

$$\{T_G \leq t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{T_{G_n} < t\} \in \mathcal{F}_t$$

da $\{T_{G_n} < t\} \in \mathcal{F}_t$ nach Teil (i). □

Definition 1.21. Ein E-wertiger Prozess X heißt **progressiv messbar** bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls für alle $t \geq 0$ die Abbildung

$$X : [0,t] \times \Omega \to E \,, (s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$$

$\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar ist.

Bemerkung 1.22. (i) Die **progressive σ-Algebra** (zur Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) ist das Mengensystem

$$\{A \subset [0,\infty) \times \Omega \mid A \cap ([0,t] \times \Omega) \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\} \,.$$

Man mache sich klar, dass ein E-wertiger Prozess X progressiv messbar ist, genau dann wenn $X : [0,\infty) \to E$ messbar bzgl. der progressiven σ-Algebra ist.

(ii) Ein progressiv messbarer Prozess X ist adaptiert. Die Umkehrung gilt jedoch im allgemeinen nicht, d.h. ein adaptierter Prozess ist nicht notwendigerweise progressiv messbar. Ein Beispiel wird zum Ende des Abschnittes gegeben.

Satz 1.23. Ist X ein $(E,\mathcal{E})$-wertiger progressiv messbarer Prozess (bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) und sei T eine Stoppzeit. Dann gilt:

(i) X_T ist $\mathcal{F}_T$-messbar, i.e., für alle $B \in \mathcal{E}$ ist die Menge

$$\{\omega \mid T(\omega) < \infty \text{ und } X_{T(\omega)}(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_T \,.$$

(ii) Der gestoppte Prozess $(X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ ist wieder progressiv messbar.

Beweis. (i) Es sei $t \in [0,\infty)$ fest gewählt. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega &\to [0,t] \times \Omega \\ \omega &\mapsto (T(\omega) \wedge t, \omega) \end{aligned}$$

$\mathcal{F}_t/\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar, denn für $0 \leq a \leq t$ und $A \in \mathcal{F}_t$ gilt

$$\varphi^{-1}([a,t] \times A) = A \cap \{\omega \mid T(\omega) \geq a\} \in \mathcal{F}_t$$

und das System dieser Mengen ist ein Erzeuger der σ-Algebra $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$. Für $B \in \mathcal{E}$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \{T < \infty \,, X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} &= \{X_{T\wedge t} \in B\} \cap \{T \leq t\} \\ &= \{X \circ \varphi \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

sowie

$$\{T < \infty \,, X_T \in B\} = \bigcup_{n\geq 1} \{T \leq n \,, X_T \in B\} \in \mathcal{F} \,.$$

(ii) Der Beweis ist ähnlich zum Beweis von Teil (i). □

Lemma 1.24. Es sei (E,d) ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{E}$ und $X_n : (\Omega,\mathcal{F}) \to (E,\mathcal{E})$, $n \geq 1$, messbar. Es gelte $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann ist X ebenfalls messbar.

Beweis. Es sei $A \subseteq E$ abgeschlossen und $A_n := \{x \in E \mid d(x,A) < \frac{1}{n}\}$. Dann ist die Menge A_n offen und

$$X^{-1}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} X_m^{-1}(A_n) \in \mathcal{F} \,.$$

□

Bemerkung 1.25. Das vorangegangene Lemma gilt nicht für beliebige topologische Räume, nicht einmal für kompakte Hausdorffräume. Betrachte beispielsweise das Einheitsinterval $[0,1]$ mit der gewöhnlichen Topologie, $E := [0,1]^{[0,1]}$ mit der Produkttopologie. Dann existiert eine Folge von stetigen (und damit messbaren) Abbildungen $X_n : [0,1] \to E$, die punktweise gegen eine nicht messbare Abbildung X konvergiert!

Satz 1.26. Ist X ein rechtsstetiger (oder linksstetiger) adaptierter Prozess (bzgl der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) mit Werten in einem metrischen Raum (E,d), so ist X auch progressiv messbar.

Beweis. Fixiere $t \geq 0$ und definiere für $n \in \mathbb{N}$ den stochastischen Prozess

$$X_s^n := \begin{cases} X_{\frac{k+1}{2^n}t} & s \in [\frac{k}{2^n}t, \frac{k+1}{2^n}t) \text{ für } 0 \leq k < 2^n \\ X_t & \text{für } s = t\,. \end{cases}$$

Dann ist X^n progressiv messbar, denn für $B \in \mathcal{E}$ gilt offenbar

$$\begin{aligned} &\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \mid X_s^n(\omega) \in B\} \\ &\quad = \bigcup_{0 \leq k < 2^n} \left([\frac{k}{2^n}t, \frac{k+1}{2^n}t) \times \{X_{\frac{k+1}{2^n}t}(\omega) \in B\} \right) \cup (\{t\} \times \{X_t(\omega) \in B\}) \end{aligned}$$

$\in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$. Aufgrund der Rechtsstetigeit der Pfade $s \mapsto X_s(\omega)$ gilt $\lim_{n\to\infty} X_s^n(\omega) = X_s(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $s \in [0,t)$ (und trivialerweise $\lim_{n\to\infty} X_t^n(\omega) = X_t(\omega)$) so dass aufgrund des vorangegangenen Lemmas auch X progressiv messbar ist.

Im Falle eines linksstetigen adaptierten Prozesses X betrachte man entsprechend

$$X_s^n := \begin{cases} X_{\frac{k}{2^n}t} & s \in (\frac{k}{2^n}t, \frac{k+1}{2^n}t] \text{ für } 0 \leq k < 2^n \\ X_0 & \text{für } s = 0\,. \end{cases}$$

□

Definition 1.27. Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{E})$. Dann bezeichne $\mathcal{F}^\mu$ die **Vervollständigung von $\mathcal{F}$ bezüglich** μ, dh, die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{F}$ und alle Teilmengen von μ-Nullmengen in $\mathcal{F}$ enthält. Der Schnitt

$$\mathcal{F}^u = \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F})} \mathcal{F}^\mu$$

heißt **universelle Vervollständigung von $\mathcal{F}$**.

Der folgende Projektionssatz ist fundamental für die Prozesstheorie. Ein Beweis findet sich in [DM78].

Theorem 1.28. Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, E ein Polnischer Raum (dh, ein vollständiger separabler metrischer Raum (zB $\mathbb{R}^n$ oder abgeschlossene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$, oder $C([0,T];U)$) und $\mathcal{R}$ die Borelsche σ-Algebra auf E. Für $A \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{F}$ gilt dann

$$pr_\Omega(A) \in \mathcal{F}^u\,,$$

wobei $pr_\Omega(A) := \{\omega \mid \exists s \in E, X_s(\omega) \in A\}$ die Projektion der Menge A auf Ω bezeichnet.

Damit sind wir jetzt in der Lage, die Aussage von Satz 1.20 entscheidend zu verbessern.

Theorem 1.29. Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ messbarer Raum und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ Filtration mit $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^u$ für alle $t \geq 0$. Weiter sei X eine $(E, \mathcal{E})$-wertiger progressiv messbarer Prozess und es sei $A \in \mathcal{E}$. Dann sind sowohl S_A als auch T_A schwache Stoppzeiten.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass für alle $t > 0$ sowohl $\{S_A < t\}$ als auch $\{T_A < t\} \in \mathcal{F}_t$ liegen. Für T_A betrachte dazu die Menge

$$A_t := \{(s,\omega) \mid 0 \leq s < t, X_s(\omega) \in A\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(s,\omega) \mid 0 \leq s \leq t - \frac{1}{n}, X_s(\omega) \in A\}\,.$$

A_t liegt in $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ und somit folgt

$$\{T_A < t\} = pr_\Omega(A_t) \in \mathcal{F}_t$$

aufgrund von Theorem 1.28. Für S_A betrachte entsprechend die Menge

$$\tilde{A}_t := \{(s,\omega) \mid 0 < s < t, X_s(\omega) \in A\} = A_t \setminus \{(0,\omega) \mid \omega \in \Omega\} \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t\,.$$

□

Wir sind jetzt auch in der Lage, einen adaptierten Prozess anzugeben, der nicht progressiv messbar ist.

Beispiel 1.30. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}) = ([0,1], \mathcal{B})$ wobei $\mathcal{B}$ die Vervollständigung von $\mathcal{B}([0,1])$ bezüglich des Lebesguemaßes bezeichnet. Es sei $\mathcal{B}_0$ die Unter-σ-Algebra aller Mengen U mit $\lambda(U) = 0$ oder $\lambda(U) = 1$. Weiter sei $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}_0$ für alle $t \geq 0$. Definiere nun die Menge

$$A = \{(x,x) \mid x \in [0, \frac{1}{2}]\} \subseteq [0,\infty) \otimes \Omega\,.$$

Dann gilt offenbar $A \in \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}$ aber für alle $t > 0$ ist $A \cap ([0,t] \times \Omega) \notin \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ (andernfalls wäre $pr_\Omega(A \cap ([0,t] \times \Omega)) = [0, t \wedge \frac{1}{2}] \in \mathcal{F}_t^u$ was nicht richtig sein kann, da $[0, t \wedge \frac{1}{2}]$ für $t > 0$ weder Null- noch Einsmenge ist. Es folgt, dass die Indikatorfunktion 1_A ein adaptierter Prozess aber kein progressiv messbarer Prozess ist.

1.3 Martingale

Wir haben die Martingaltheorie in diskreter Zeit in der VL Wahrscheinlichkeitstheorie II bereits kennengelernt. Wir werden in diesem Abschnitt die wesentlichen Sätze der Theorie

(I) Maximalungleichung

(II) Stoppsatz

(III) Martingalkonvergenzsätze

auf den Fall kontinuierlicher Indexmengen I übertragen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns wieder auf $I = [0,\infty)$. Zunächst kurz zur Auffrischung die Definitionen:

Definition 1.31. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration. Ein adaptierter ($\mathbb{R}$-wertiger) stochastischer Prozess $(M_t)_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}^1(P)$, dh, P- integrierbar, heißt

(i) **Martingal**, falls

$$M_s = E(M_t|\mathcal{F}_s) \quad \forall s \leq t$$

(ii) **Submartingal**, falls

$$M_s \leq E(M_t|\mathcal{F}_s) \quad \forall s \leq t \quad (\text{"im Mittel aufsteigend"})$$

(iii) **Supermartingal**, falls

$$M_s \geq E(M_t|\mathcal{F}_s) \quad \forall s \leq t \quad (\text{"im Mittel absteigend"})$$

Einige Beispiele für Martingale in stetiger Zeit.

Brownsche Bewegung

Definition 1.32. Es sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Eine $\mathbb{F}$-**Brownsche Bewegung (oder $\mathbb{F}$-Wienerprozess)** ist ein $\mathbb{R}$-wertiger adaptierter stochastischer Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $B_0 = 0$ P-f.s.

(ii) Für $0 \leq s < t$ ist das Inkrement $B_t - B_s$ **unabhängig von** $\mathcal{F}_s$ und $\mathcal{N}(0, t-s)$-verteilt.

(iii) B besitzt stetige Pfade.

Zum Vergleich: Eine Brownsche Bewegung im Sinne der Definition wie sie in der VL Wahrscheinlichkeitstheorie II gegeben wurde ist eine $\mathbb{F}$- Brownsche Bewegung bzgl der von B erzeugten Filtration $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(\{B_s \mid s \leq t\})$. Umgekehrt ist natürlich jede $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung eine Brownsche Bewegung (im Sinne der Definition der VL WT II).

Martingale einer $\mathbb{F}$-Brownschen Bewegung

Lemma 1.33. Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung. Dann sind die folgenden Prozesse Martingale bzgl $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$:

(i) $(B_t)_{t\geq 0}$.

(ii) $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$.

(iii) $(\exp(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t))_{t\geq 0} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. (i)

$$\begin{aligned} E(B_t \,|\mathcal{F}_s) &= E(B_s + (B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s) \\ &= \underbrace{E(B_s|\mathcal{F}_s)}_{=B_s} + \underbrace{E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s)}_{=E(B_t - B_s)=0} = B_s \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} E(B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s) &= E(B_t^2 - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s) + B_s^2 - t \\ &= E((B_t - B_s)^2 + 2(B_t - B_s)\, B_s \mid \mathcal{F}_s) + B_s^2 - t \\ &= \underbrace{E((B_t - B_s)^2)}_{=t-s} + 2B_s \underbrace{E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s)}_{=E(B_t - B_s)=0} + B_s^2 - t \\ &= B_s^2 - s \end{aligned}$$

(iii) $G_t^\alpha := \exp(\alpha B_t - \frac{1}{2}\,\alpha^2 t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E(G_t^\alpha|\mathcal{F}_s) &= E(\exp(\alpha(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\alpha^2(t-s)) \mid \mathcal{F}_s)G_s^\alpha \\ &= \underbrace{E(\exp(\alpha\,\underbrace{(B_t - B_s)}_{\sim\mathcal{N}(0,t-s)}))}_{\exp(\frac{1}{2}\alpha^2(t-s))}\exp(-\frac{1}{2}\,\alpha^2(t-s))\,G_s^\alpha \\ &= G_s^\alpha. \end{aligned}$$

□

Poissonprozess

Definition 1.34. Ein **homogener Poissonprozess mit Rate** $\lambda > 0$ ist ein $\mathbb{R}$-wertiger stochastischer Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $N_0 = 0$ P-f.s.

(ii) Für $0 \leq t_0 < \cdots < t_{n+1}$ sind die Inkremente

$$N_{t_{i+1}} - N_{t_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

unabhängig, Poiss($\lambda(t_{i+1} - t_i)$)-verteilt.

(iv) N besitzt rechtsstetige Pfade.

Im Unterschied zur Bronwschen Bewegung besitzt ein Poissonprozess monoton wachsende Pfade, stückweise konstant mit Sprungstellen der Höhe $+1$.

Lemma 1.35. Es sei $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Poissonprozess. Dann sind die folgenden Prozesse Martingale bzgl der von N erzeugten Filtration $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(\{N_s \mid s \leq t\})$, $t \geq 0$:

(i) $(N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$ (kompensierter Poissonprozess).

(ii) $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t\geq 0}$.

(iii) $(\exp(\alpha N_t + \lambda t(1 - e^\alpha)))_{t\geq 0} \quad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. Zunächst ist klar, dass wie im Falle der Brownschen Bewegung auch in diesem Fall für $0 \leq s < t$ das Inkrement $N_t - N_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s^0$ ist und

$$\begin{aligned} E(N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s^0) &= E(N_t - N_s) = \lambda(t-s) \\ E((N_t - N_s)^2 \mid \mathcal{F}_s^0) &= E((N_t - N_s)^2) = (\lambda(t-s))^2 + \lambda(t-s) \\ E(\exp(\alpha(N_t - N_s)) \mid \mathcal{F}_s^0) &= E(\exp(\alpha(N_t - N_s))) = \exp(\lambda(t-s)(e^\alpha - 1))\,. \end{aligned}$$

Damit können wir nun analog zum Fall der Brownschen Bewegung zeigen:

(i)

$$\begin{aligned} E(N_t - \lambda t\ |\mathcal{F}_s^0) &= E(N_s + (N_t - N_s) \mid \mathcal{F}_s^0) - \lambda t \\ &= \underbrace{E(N_s|\mathcal{F}_s^0)}_{=N_s} + E(N_t - N_s|\mathcal{F}_s^0) = N_2 + \lambda(t-s) - \lambda t = N_s - \lambda s \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
E((N_t-\lambda t)^2-\lambda t \mid \mathcal{F}_s^0) &= E(N_t^2-N_s^2 \mid \mathcal{F}_s^0)+N_s^2-2\lambda t E(N_t \;\mid\; \mathcal{F}_s^0)+(\lambda t)^2-\lambda t \\
&= E((N_t-N_s)^2+2(N_t-N_s)\,N_s \mid \mathcal{F}_s^0)+N_s^2-2\lambda t E((N_t-N_s) \;\mid\; \mathcal{F}_s^0) \\
&\qquad -2N_s\lambda t+(\lambda t)^2-\lambda t \\
&= E((N_t-N_s)^2)+2N_s\lambda(t-s)+N_s^2-2\lambda t\lambda(t-s)-2N_s\lambda t+(\lambda t)^2-\lambda t \\
&= (\lambda(t-s))^2-\lambda s-2N_s s+N_s^2+2\lambda t\lambda s-(\lambda t)^2=(N_s-\lambda s)^2-\lambda s\,.
\end{aligned}$$

(iii) $G_t^\alpha := \exp(\alpha N_t-\lambda t(1-e^\alpha)))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
E(G_t^\alpha|\mathcal{F}_s^0) &= E(\exp(\alpha(N_t-N_s)-\lambda(t-s)(1-e^\alpha))) \mid \mathcal{F}_s^0)G_s^\alpha \\
&= E(\exp(\alpha(N_t-N_s)))e^{-(\lambda(t-s)(e^\alpha-1))})\,G_s^\alpha=G_s^\alpha.
\end{aligned}$$

□

(I) Maximalungleichung

Wie im diskreten Fall bereits bemerkt, impliziert die Martingaleigenschaft eines stochastischen Prozesses $(M_t)_{t\geq 0}$, dass M_t alle Informationen über den Prozess bis zur Zeit t enthält, da

$$M_s = E(M_t\,|\mathcal{F}_s)\,.$$

Für nichtnegative Submartingale $(X_t)_{t\geq 0}$ wird wegen $X_s \leq E(X_t \mid \mathcal{F}_s)$ der Prozess X bis zur Zeit t zumindest noch im Mittel durch X_t kontrolliert. Entsprechend gilt auch im Falle kontinuierlicher Indexmengen die Maximalungleichung:

Theorem 1.36. Maximalungleichung (Doobsche Ungleichung) Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges nichtnegatives Submartingal und

$$X_t^* := \sup_{0\leq s\leq t} X_s\,,\quad t\geq 0\,.$$

Dann gilt:

(i)

$$P(X_t^*\geq R)\leq \frac{1}{R}\,E(X_t\,;X_t^*\geq R)\leq \frac{1}{R}\,E(X_t)\quad \forall R>0.$$

Insbesondere ist $\{X_s\,:\,s\in[0,t]\}$ gleichgradig integrierbar $\forall t>0$.

(ii) Ist $X_t\in\mathcal{L}^p(P)$ für ein $p>1$ so gilt

$$E((X_t^*)^p)^{\frac{1}{p}}\leq \frac{p}{p-1}\;E(X_t^p)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Bemerkung 1.37. (i) Ist $(X_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetiges Submartingal, nicht notwendigerweise nichtnegativ, so gilt folgende Variante der Maximalungleichung :

$$P(X_t^*\geq R)\leq \frac{1}{R}\,E(X_t^+\,;X_t^*\geq R)\leq \frac{1}{R}\,E(X_t^+)\quad \forall R>0. \tag{1.1}$$

Begründung: In diesem Falle ist $(X_t^+)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges nichtnegatives Submartingal mit

$$X_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} X_s \leq \sup_{0\leq s\leq t} X_s^+\,,$$

also $P(X_t^* \geq R) \leq P(\sup_{0\leq s\leq t} X_s \geq R)$, und somit folgt (1.1) aus Teil (i) von Theorem 1.36.

(ii) Ist (M_t) ein rechtsstetiges Martingal, so ist $(|M_t|)$ ein nichtnegatives Submartingal. Damit folgt dann für rechtsstetige Martingale:

$$P(\sup_{0\leq s\leq t} |M_s| \geq R) \leq \frac{1}{R}\, E(|M_t|\,; M_t^* \geq R) \leq \frac{1}{R}\, E(|M_t|) \quad \forall R > 0\,,$$

$$E((\sup_{0\leq s\leq t} |M_s|)^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}\; E(|M_t|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \forall p > 1\,.$$

Beweis. (i) Ganz analog zum Beweis im diskreten Falle gilt zunächst für festes $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
P\left(\max_{0\leq k\leq n} X_{\frac{k\cdot t}{n}} \geq\ R\right) &= \sum_{l=0}^{n} P\left(X_{\frac{l\cdot t}{n}} \geq R\,;\ \max_{0\leq k\leq l} X_{\frac{k\cdot t}{n}} < R\right) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Markovsche Ungl.}}}{\leq} \frac{1}{R}\sum_{l=0}^{n} E\Big(\underbrace{X_{\frac{l\cdot t}{n}}}_{E(\,X_t\,|\,\mathcal{F}_{\frac{l\cdot t}{n}})}\ ;\ X_{\frac{l\cdot t}{n}} \geq R,\ \max_{0\leq k<l} X_{\frac{k\cdot t}{n}} \leq R\Big) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ X_t \text{ Submartingal}}}{\leq} \frac{1}{R}\sum_{l=0}^{n} E\Big(E(X_t \mid \mathcal{F}_{\frac{lt}{n}}));\ \underbrace{X_{\frac{l\cdot t}{n}} \geq R,\ \max_{0\leq k<l} X_{\frac{k\cdot t}{n}} < R}_{\in\mathcal{F}_{\frac{lt}{n}}}\Big) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Projektivität}}}{=} \frac{1}{R}\sum_{l=0}^{n}\ E\left(X_t;\ X_{\frac{l\cdot t}{n}} \geq R,\ \max_{0\leq k<l} X_{\frac{k\cdot t}{n}} < R\right) \\
&= \frac{1}{R} E\left(X_t\,;\ \max_{0\geq k\geq n} X_{\frac{k\cdot t}{n}} \geq R\right) \leq \frac{1}{R} E\left(X_t\,;\ X_t^* \geq R\right)
\end{aligned}$$

Rechtsstetigkeit von (X_t) $\Rightarrow$ $\max_{0\geq k\geq n}\ X_{\frac{k\cdot t}{n}}\ \uparrow\ X_t^*$ für $n\to\infty$, so dass für alle $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
P(X_t^* \geq R) &\leq \lim_{n\to\infty} P\left(\max_{0\geq k\geq n} X_{\frac{k\cdot t}{n}} \geq R - \varepsilon\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{R-\varepsilon} E(X_t;\ X_t^* \geq R)
\end{aligned}$$

woraus sich im Grenzwert $\varepsilon \downarrow 0$ Teil (i) ergibt.

(ii) Der Beweis von Teil (ii) ist vollkommen identisch mit dem Beweis der entsprechenden Aussage im diskreten Fall:

$$\begin{aligned}
E((X_t^*)^p) &= E\left(p\int_0^{X_t^*} u^{p-1}\ du\right) = E\left(p\int_0^{\infty} 1_{\{u\leq X_t^*\}} u^{p-1}\ du\right) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} p\int_0^{\infty} \underbrace{E(1_{\{u\leq X_t^*\}})}_{\leq \frac{1}{u}E(X_t;\,X_t^*\geq u)\ \text{nach (i)}}\ u^{p-1}\ du \leq p\int_0^{\infty} E\left(X_t\ ;\ X_t^* \geq u\right)\ u^{p-2}\ du \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} p\ E\Big(\underbrace{\int_0^{X_t^*} u^{p-2}\ du}_{\frac{1}{p-1}(X_t^*)^{p-1}} \cdot \mid X_t \mid\Big) \leq \frac{p}{p-1}\ E\left(X_t^p\right)^{\frac{1}{p}}\ E\left((X_t^*)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Hölder-Ungleichung angewandt mit p und $q = \frac{p}{p-1}$. □

(II) Stoppsatz

Wir haben in der VL WT II den Stoppsatz für Martingale in diskreter Zeit kennengelernt: Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-Martingal dann gilt für beschränkte $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-Stoppzeiten S, T mit $S \leq T$, dass

$$E\left(X_T \mid \mathcal{F}_S\right) = X_S\,.$$

Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Submartingal, so gilt exakt mit demselben Beweis entsprechend

$$E\left(X_T \mid \mathcal{F}_S\right) \geq X_S\,.$$

In dieser Form werden wir den Stoppsatz auf den zeitkontinuierlichen Fall übertragen. Dazu einige Vorbereitungen.
Von nun an sei wieder $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration (mit kontinuierlicher Indexmenge $[0,\infty)$) auf einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Lemma 1.38. Es sei T eine $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit. Dann gilt:

(i) $\exists$ Stoppzeiten T_n mit $T_n(\Omega)$ endlich $\forall n$ und $T_n(\omega) \downarrow T(\omega) \forall n \geq n_0(\omega)$.

(ii) Sei S eine $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit und $B \in \mathcal{F}_S$, dann gilt:

$$B \cap \{S \leq T\}, B \cap \{S < T\} \in \mathcal{F}_{S\wedge T}\,.$$

(iii) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ $\mathbb{R}^d$-wertig und adaptiert. Ist $(X_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetig, so ist X_T $\mathcal{F}_T$-messbar.

Beweis. (i) Betrachte:

$$T_n(\omega) := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[}(T(\omega)) + n 1_{[n,\infty[}(T(\omega))\,.$$

(ii)

$$\begin{aligned} B \cap \{S \leq T\} \cap \{S \wedge T \leq t\} &= \underbrace{(B \cap \{S \leq t\})}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \{S \leq T\} \\ &= (B \cap \{S \leq t\}) \cap \underbrace{\{S \wedge t \leq T \wedge t\}}_{\mathcal{F}_{S\wedge t}\text{-messbar}} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

Dann gilt auch

$$B \cap \{S < T\} = (B \cap \{S \leq T\}) \backslash \{S \geq T\} \in \mathcal{F}_{S\wedge T}\,.$$

(iii) Nach Satz 1.26 ist $(X_t)_{t\geq 0}$ progressiv messbar und damit X_T nach Satz 1.23 $\mathcal{F}_T$-messbar. □

Theorem 1.39. Stoppsatz Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsseitig stetiges Submartingal, S, T beschränkte Stoppzeiten mit $S \leq T$. Dann gilt:

$$X_S \leq E(X_T | \mathcal{F}_S)\,.$$

Falls (X_t) Martingal, so gilt $X_S = E(X_T \mid \mathcal{F}_S)$. Insbesondere ist für jedes rechtsstetige nichtnegative Submartingal $(X_t)_{t\geq 0}$ und jedes $t \geq 0$ die Familie

$$\{X_T : T \text{ Stoppzeit }, T \leq t\}$$

gleichgradig integrierbar.

Beweis. Zunächst sei $X_t \geq 0\ \forall t$. Es sei $S \leq T \leq t$ und $\mathcal{G}$ die Menge aller Stoppzeiten mit $S \leq t$ und

$$X_S \leq E\left(X_t \mid \mathcal{F}_S\right) .$$

Dann gilt für alle Stoppzeiten S mit $S(\Omega)$ endlich nach dem Stoppsatz für Martingale in diskreter Zeit, dass $S \in \mathcal{G}$. In der Tat: ist $S(\Omega) = \{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ eine Aufzählung des Wertebereiches von S, so können wir nach Übergang zu

$$\mathcal{A}_n := \begin{cases} \mathcal{F}_{i_n} & \text{für } 0 \leq n \leq k \\ \mathcal{F}_{i_k} & \text{sonst} \end{cases} .$$

X_t, $t \in S(\Omega)$, als $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$-Submartingal auffassen. Der diskrete Stoppsatz impliziert nun, dass $X_S \leq E\left(X_t \mid \mathcal{A}_S\right)$. Nun gilt aber $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{A}_S$ (warum?) und damit folgt aus der Projektivität der bedingten Erwartung

$$X_S = E\left(X_S \mid \mathcal{F}_S\right) \leq E\left(E\left(X_t \mid \mathcal{A}_S\right) \mid \mathcal{F}_S\right) = E\left(X_t \mid \mathcal{F}_S\right) .$$

Die Familie $\{X_S \mid S \in \mathcal{G}\}$ ist gleichgradig integrierbar, denn

$$\begin{aligned} \sup_{S\in\mathcal{G}} E(X_S; X_S \geq R) &\leq \sup_{S\in\mathcal{G}} E(X_t; X_S \leq R) \\ &\leq \sup_{S\in\mathcal{G}} E(X_t; X_t^* \geq R) \underset{R\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

aufgrund der Doobschen Maximalungleichung Satz 1.36.

Sei $S_n := \frac{[2^n S]+1}{2^n} \wedge t$, T_n analog. Dann folgt $S_n \downarrow S$, $S_n(\Omega)$ endlich, $S_n \leq T_n$, also

$$\lim_{n\to\infty} X_{S_n} = X_S, \quad \lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T \quad P\text{-f.s.}$$

und in $\mathcal{L}^1(P)$ wegen gleichgradiger Integierbarkeit. Mit dem diskreten Stoppsatz folgt

$$\begin{aligned} X_S = E\left(X_S \mid \mathcal{F}_S\right) &= \lim_{n\to\infty} E\left(X_{S_n} \mid \mathcal{F}_S\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} E\left(E\left(X_{T_n} \mid \mathcal{F}_{S_n}\right) \mid \mathcal{F}_S\right) \\ &\underset{\mathcal{F}_S\subseteq\mathcal{F}_{S_n}}{=} \lim_{n\to\infty} E\left(X_{T_n} \mid \mathcal{F}_S\right) = E\left(X_T \mid \mathcal{F}_S\right) . \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathcal{G}$ gleich der Menge aller Stoppzeiten S mit $S \leq t$, also auch der Zusatz bewiesen.

Jetzt der allgemeine Fall: X_t nicht notwendigerweise ≥ 0. Dann ist $Y_t^{(n)} := X_t \vee (-n) + n$, $t \geq 0$ ein Submartingal, ≥ 0. Also $Y_S^{(n)} \leq E\left(Y_T^{(n)} \mid \mathcal{F}_S\right)$, und damit

$$X_S \leq X_S \vee (-n) \leq E\left(X_T \vee (-n) \mid \mathcal{F}_S\right) . \tag{1.2}$$

Da $T \leq t$ folgt

$$X_T \vee (-n) \leq E(\underbrace{X_t \vee (-n)}_{\leq |X_t|} \mid \mathcal{F}_T) \leq E\left(|X_t| \mid \mathcal{F}_T\right) =: Y$$

Mithilfe des Satzes von der monotonen Integration (Levischer Konvergenzsatz) folgt nun

$$\begin{aligned} E\left(Y \mid \mathcal{F}_S\right) - \lim_{n\to\infty} E\left(X_T \vee (-n) \mid \mathcal{F}_S\right) &= \lim_{n\to\infty} E(\underbrace{Y - X_T \vee (-n)}_{\leq Y - X_T} \mid \mathcal{F}_S) = E\left(Y - X_T \mid \mathcal{F}_S\right) \\ &= E\left(Y \mid \mathcal{F}_S\right) - E\left(X_T \mid \mathcal{F}_S\right) . \end{aligned}$$

Mit $n \to \infty$ in (1.2) folgt $X_S \leq E\left(X_T \mid \mathcal{F}_S\right)$. $\square$

Wir geben zum Schluss noch einige Ergänzungen zum Stoppsatz.

Satz 1.40. Es sei $(X_t)_{t\leq 0}$ rechtsstetiges Martingal, T eine Stoppzeit, dann ist $(X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ wieder ein rechtsstetiges Martingal.

Beweis. Für $0 \leq s \leq t$ und $B \in \mathcal{F}_s$ folgt $B \cap \{s < T\} \in \mathcal{F}_{T\wedge s}$ und damit

$$\begin{aligned} E\left(X_{T\wedge t}, B\right) &= E\left(X_{T\wedge t}, B\cap\{s<T\}\right) + E(\underbrace{X_{T\wedge t}}_{=X_{T\wedge s}}, B\cap\{T\leq s\}) \\ &= E\left(X_{T\wedge s}, B\cap\{s<T\}\right) + E\left(X_{T\wedge s}, B\cap\{T\leq s\}\right) \\ &= E\left(X_{T\wedge s}, B\right) \end{aligned}$$

□

Korollar 1.41. Es sei (X_t) $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert, rechtsstetig. Dann ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal genau dann wenn $E\left(X_T\right) = E\left(X_0\right)$ für alle beschränkten Stoppzeiten T.

Beweis. $''\Rightarrow''$ folgt aus dem Stoppsatz.
$''\Leftarrow''$ wie im diskreten Fall: Es sei $s < t$ und $A \in \mathcal{F}_s$. Wir haben zu zeigen, dass $E\left(X_t 1_A\right) = E\left(X_s 1_A\right)$. Zu diesem Zwecke definieren wir uns die folgende beschränkte Stoppzeit: $T_A := s1_A + t1_{A^c}$. Dann folgt wegen

$$E\left(X_{T_A}\right) = E\left(X_0\right) = E\left(X_t\right)$$

dass

$$E\left(X_s 1_A\right) = E\left(X_{T_A}\right) - E\left(X_t 1_{A^c}\right) = E\left(X_t\right) - E\left(X_t 1_{A^c}\right) = E\left(X_t 1_A\right)\,.$$

□

Bemerkung 1.42. Wie bereits im diskreten Fall angemerkt, wird der Stoppsatz für unbeschränkte Stoppzeiten im allgemeinen falsch. Als Beispiel betrachten wir diesmal eine stetige Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ mit Start in 0 und

$$T := \inf\{t \geq 0 : B_t > +1\}\,.$$

Dann gilt (wie im Falle der symmetrischen Irrfahrt) $T < \infty$ P-f.s. (Beweis später), $B_T \equiv +1$ (Begründung!), also

$$E(B_T) = 1 \quad \text{aber} \quad E(B_0) = 0\,.$$

(III) Martingalkonvergenzsätze

Als nächstes übertragen wir die Martingalkonzergenzsätze auf den stetigen Fall. Dazu benötigen wir in einem ersten Schritt die Verallgemeinerung des Doobschen Uprcrossing Lemmas auf rechtsstetige Submartingale.

Es sei im folgenden wieder eine Filtration $(\mathcal{F}_{t\geq 0})$ auf einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben. Weiter sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein reellwertiger adaptierter rechtsstetiger Prozess.

Für $a < b$ und $t_0 > 0$ sei

$$U(a, b; t_0)(\omega) := \inf\{n \geq 0 \mid t \mapsto X_t(\omega) \text{ überquert } [a, b] \text{ höchstens } n\text{-mal in } [0, t_0)\}$$

die Anzahl der (abgeschlossenen) Aufwärtsüberquerungen des Intervalls $[a, b]$ in der Zeit bis t_0.

Theorem 1.43. (Doob's Upcrossing Lemma) Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges Submartingal, $t_0 > 0$ und $a < b$. Dann gilt:

$$E\left(U(a,b;t_0)\right) \leq \frac{E\left((X_{t_0}-a)^+\right)}{b-a}\,.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze $X_k^n := X_{\frac{k}{2^n}}$. Dann ist (X_k^n) ein $(\mathcal{F}_{k2^m})$-Submartingal. Weiter sei $k_0^n := \max\{k \mid \frac{k}{2^n} < t_0\}$ und $U_n(a,b,k_0^n)$ die Anzahl der Aufwärtsüberquerungen des diskreten Submartingals X^n bis k_0^n. Dann gilt nach der diskreten Version des Upcrossing Lemmas (Theorem 4.13, VL WT II)

$$E\left(U_n(a,b;k_0^n)\right) \leq \frac{E\left((X_{k_0^n}-a)^+\right)}{b-a} \leq \frac{E\left((X_{t_0}-a)^+\right)}{b-a}\,.$$

wobei in der letzen Ungleichung die Submartingaleigenschaft von $(X_t-a)^+$ ausgenutzt wurde, so dass also wegen $k_0^n < t_0$ folgt $E\left((X_{k_0^n}-a)^+\right) \leq E\left((X_{t_0}-a)^+\right)$.
Aufgrund der Rechtsstetigkeit von $t \mapsto X_t$ folgt offenbar $U_n(a,b;k_0^n) \uparrow U(a,b;t_0)$ woraus sich mithilfe der monotonen Integration ergibt

$$E\left(U(a,b;t_0)\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(U_n(a,b;k_0^n)\right) \leq \frac{E\left((X_{t_0}-a)^+\right)}{b-a}\,.$$

□

Ganz analog zum diskreten Fall ergibt sich nun aus Doob's Uprcrossing Lemma auch im stetigen Fall der f.s.-Konvergenzsatz:

Korollar 1.44. (f.s. (Sub-) Martingalkonvergenzsatz) Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetiges Submartingal. Dann gilt:

(i) $\exists X_{t-}(\omega) := \lim_{s\nearrow t} X_s(\omega) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ P-f.a. ω und $X_{t-} \in \mathcal{L}^1(P)$ $\forall t \in (0,\infty)$

(ii) Falls zusätzlich

$$\sup_{t\geq 0} E\left(|X_t|\right) < \infty$$

so gilt $\exists X_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty} X_t(\omega) \quad \in \mathbb{R}$ P.f.a. ω und $X_\infty \in \mathcal{L}^1(P)$.

Beweis. (i) Nach Doob's Upcrossing Lemma gilt $E(U(a,b;t)) < \infty$, also $U(a,b;t) < \infty$ P-f.s $\forall t$, $a < b \in \mathbb{R}$, und damit existiert X_{t-} wie in (i) P-f.s. (Beweis wie im diskreten Fall). Mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\begin{aligned} E(|X_{t-}|) &\leq \liminf_{s\nearrow t} E(|X_s|) \quad (|X_s| = X_s^+ + X_s^- = 2X_s^+ - X_s) \\ &= \liminf_{s\nearrow t} 2\underbrace{E(X_s^+)}_{\leq E(X_t^+)} - \underbrace{E(X_s)}_{\geq E(X_0)} \\ &\leq 2E(X_t^+) - E(X_0) \quad < \infty, \text{ also } X_{t-} \in \mathcal{L}^1(P). \end{aligned}$$

(ii) Für $a < b$ gilt

$$U(a,b;t) \uparrow U(a,b;\infty)\,, \quad t \uparrow \infty$$

also

$$E(U(a,b;\infty)) = \lim_{t\uparrow\infty} E(U(a,b;t)) \leq \lim_{t\uparrow\infty} \frac{E((X_t-a)^+)}{b-a}$$
$$\leq \sup_{t\geq 0} \frac{E(|X_t|)+|a|}{b-a} < \infty$$

und damit existiert X_∞ wie in (ii) P-f.s. Wie in (i) zeigt man $X_\infty \in \mathcal{L}^1(P)$. □

Der $\mathcal{L}^p$-Martingalkonvergenzsatz gilt dann genauso wie im diskreten Fall:

Korollar 1.45. ($\mathcal{L}^P$-Martingalkonvergenzsatz) Es sei (X_t) rechtstetiges Martingal.

(i) ("$p=1$ Fall") Äquivalent sind:

   (a) (X_t) ist gleichgradig integrierbar.
   (b) $X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$ existiert in $\mathcal{L}^1(P)$.
   (c) $\exists\, Y \in \mathcal{L}^1(P)$ mit $X_t = E(Y \mid \mathcal{F}_t)$ für alle $t \geq 0$.

   In diesem Falle gilt: $X_\infty = E(Y \mid \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t)$ P-f.s. und für alle $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$-Stoppzeiten S, T mit $S \leq T$ gilt

$$X_S = E(X_T \mid \mathcal{F}_S)\,.$$

   Insbesondere ist $(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$-Martingal. Hierbei ist $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t = \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$.

(ii) ("$p>1$ Fall") Äquivalent sind:

   (a) $\sup_{t\geq 0} E\left(|X_t|^p\right) < \infty$.
   (b) $X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$ existiert in $\mathcal{L}^p(P)$.

Der Beweis lässt sich unter Ausnutzung des f.s.-Martingalkonvergenzsatzes Korollar 1.44 Wort für Wort aus dem diskreten Fall übertragen (siehe Korollar 4.16, VL WT II).

Wie einschränkend ist nun die Annahme an ein Submartingal, rechtsstetige Pfade zu besitzen? Eine Antwort hierauf gibt der nächste Satz.

Theorem 1.46. Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Submartingal. Weiterhin sei die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetig. Ist dann ebenfalls $t \mapsto E(X_t)$ rechtsstetig, so besitzt $(X_t)_{t\geq 0}$ eine rechtsstetige Modifikation $(\bar{X}_t)_{t\geq 0}$ die an jeder Stelle $t>0$ f.s.-linksseitige Limiten besitzt (und die natürlich ebenfalls ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Submartingal ist).

Der Beweis verläuft wieder über die diskrete Version von Doob's Upcrossing Lemma, angewandt aus das Submartingal $(X_t)_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,\infty)}$. In der Tat ergibt sich daraus, dass für alle $t \geq 0$

$$\exists X_{t+} = \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}\cap(0,\infty)} X_s \qquad P\text{-f.s.}$$

und aufgrund der Rechtsstetigkeit von $t \mapsto E(X_t)$ ergibt sich $X_t = X_{t+}$. Da die zugrundeliegende Filtration rechtsstetig ist, ist auch $(X_{t_+})_{t\geq 0}$ adaptiert und damit ist alles Wesentliche gezeigt. Einen detaillierten Beweis findet man in [KS91].

Beispiel 1.47. Das folgende $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Submartingal (X_t) besitzt keine rechtsstetige Modifikation. $\Omega = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, P Gleichverteilung auf Ω, $X_t(\omega) = 0$ für $t \in [0, 1]$,

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega = a \\ -1 & \text{für } \omega = b \end{cases} \quad \text{falls } t > 1 \text{ ist.}$$

Es sei $\mathbb{F}$ die von X erzeugte Filtration. Dann ist X offenbar ein $\mathbb{F}$-Martingal, das keine rechtsstetige Modifikation zulässt (warum?). Da $E(X_t) \equiv 0$, ist also insbesondere die Filtration $\mathbb{F}$ nicht rechtsstetig.

1.4 Semimartingale und quadratische Variation

In gesamten Abschnitt betrachten wir ausschließlich stetige Martingale bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ auf einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definition 1.48. (i) $\mathcal{A}^+$ bezeichne die Menge aller stetigen reellwertigen adaptierten stochastischen Prozesse mit monoton wachsenden Pfaden.

(ii) Für einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ definieren wir den zugehörigen **Variationsprozess**

$$V_t(\omega) := \sup_{\Delta} \sum_i \left| X_{t_{i+1}\wedge t}(\omega) - X_{t_i \wedge t}(\omega) \right|, t \geq 0$$

wobei das Supremum über alle endlichen Teilmengen $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subset [0, \infty)$ genommen wird. Der stochastische Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt von **lokal beschränkter Variation**, falls $V_t(\omega) < \infty$ für alle $\omega \in \Omega$ und für alle $t \geq 0$.

(iii) $\mathcal{A}$ bezeichne die Menge aller stetigen reellwertigen adaptierten stochastischen Prozesse von lokal beschränkter Variation.

Bemerkung 1.49. (i) $(X_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{A}$ impliziert für den zugehörigen Variationsprozess $(V_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{A}^+$

(ii) $X \in \mathcal{A}$ genau dann wenn $X = U - L$ für Prozesse $U, L \in \mathcal{A}^+$. Zum Beweis der Implikation $\Rightarrow$ setze man einfach $U = \frac{1}{2}(V_t + X_t)$ und $L = \frac{1}{2}(V_t - X_t)$. Beide sind monoton wachsend (und stetig) und offensichtlich gilt $U - L = X$. Die umgekehrte Implikation $\Leftarrow$ ist klar.

Definition 1.50. (i) Ein adaptierter reellwertiger stochastischer Prozess $M = (M_t)_{t\geq 0}$ heißt **lokales Martingal bzgl. der Filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls eine aufsteigende Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\geq 1}$ existiert mit $\tau_n \uparrow \infty$ P-f.s., so dass für alle n der gestoppte Prozess

$$N_t^n := M_{\tau_n \wedge t}, t \geq 0$$

ein Martingal ist. Die Folge $(\tau_n)_{n\geq 1}$ heißt **lokalisierende Folge** des lokalen Martingals M.

(ii) $\mathcal{M}_{loc}$ bezeichne die Familie aller stetigen lokalen Martingale, $\mathcal{M}_{loc}^0$ die Unterfamilie aller stetigen lokalen Martingale M mit $M_0(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Schließlich bezeichne $\mathcal{M}$ die Familie aller stetigen lokalen Martingale.

Bemerkung 1.51. Jedes Martingal ist natürlich auch ein lokales Martingal (z.B. mit lokalisierender Folge $\tau_n = n$, $n \geq 1$). Umgekehrt ist nicht jedes lokale Martingal auch ein Martingal. Als Beispiel betrachte man für eine stetige 3-dimensionale Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ (mit Start in 0) den Prozess $M_t := \frac{1}{|x+B_t|}$, $t \geq 0$, für ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dann ist M ein lokales Martingal, aber kein Martingal. Der Beweis wird später mithilfe der Itô-Formel gegeben.

Satz 1.52. Es sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal. Ist dann $(M_t)_{t\geq 0}$ gleichgradig integrierbar, zB wenn

$$E\left(\sup_{t\geq 0} |M_t|\right) < \infty\,,$$

so ist M ein Martingal.

Beweis. Es sei (τ_n) lokalisierende Folge, dann ergibt sich mithilfe des Konvergenzsatzes von Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} M_{t\wedge\tau_n} = M_t$$

in $\mathcal{L}^1(P)$ und damit für $0 \leq s \leq t$

$$E\left(M_t \mid \mathcal{F}_s\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(M_{t\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\right) = \lim_{n\to\infty} M_{s\wedge\tau_n} = M_s\,.$$

□

Definition 1.53. Ein stetiger stochastischer Prozess der Form $X = M + A$ mit $M \in \mathcal{M}_{loc}$ und $A \in \mathcal{A}$ heißt **stetiges Semimartingal**. $\mathcal{S}$ bezeichne die Familie aller stetigen Semimartingale. Wir bezeichnen die Zerlegung $X = M + A$ als **Doob-Meyer Zerlegung (bzw. Semimartingalzerlegung)** des Semimartingals X.

Wir werden später sehen, dass die Klasse der stetigen Semimartingale die richtige Klasse stochastischer Integratoren bildet. Das folgende Theorem besagt, dass die Zerlegung eines Semimartingals in lokales Martingal und adaptierten Prozess mit monoton wachsenden Pfaden eindeutig ist, wenn man $M_0 = 0$ annimmt.

Theorem 1.54. (Eindeutigkeit der Doob-Meyer Zerlegung) .

$$\mathcal{M}^0_{loc} \cap \mathcal{A} = \{0\}\,.$$

Insbesondere ist für $X \in \mathcal{S}$ die Zerlegung $X = M + A$ eindeutig, wenn man annimmt, dass $M_0 = 0$ ist.

Beweis. Es sei $X \in \mathcal{M}^0_{loc} \cap \mathcal{A}$, also insbesondere X ein stetiges lokales Martingal von beschränkter Variation. Weiter sei V der zugehörige Variationsprozess. Wir nehmen zunächst an, dass

$$|X_t(\omega)| + V_t(\omega) \leq K$$

gleichmäßig beschränkt in t und ω durch eine gemeinsame Konstante K. Zu $\varepsilon > 0$ definiere man iterativ Stoppzeiten durch $T_0 := 0$ und

$$T_{n+1} = \inf\{t \geq T_n \mid |X_t - X_{T_n}| \geq \varepsilon\}\,, n \in \mathbb{N}\,.$$

Zu fest gewähltem t sei $S_n := T_n \wedge t$. Dann folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
E\left(X_{S_n}^2\right) &= E\left(\sum_{k=0}^{n-1} X_{S_{k+1}}^2 - X_{S_k}^2\right) \\
&= E\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(X_{S_{k+1}} - X_{S_k}\right)^2\right) + 2E\left(\sum_{k=0}^{n-1} X_{S_k}\left(X_{S_{k+1}} - X_{S_k}\right)\right) \\
&= E\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(X_{S_{k+1}} - X_{S_k}\right)^2\right) \le \varepsilon E\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|X_{S_{k+1}} - X_{S_k}\right|\right) \le \varepsilon E(V_t) \le \varepsilon K
\end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten auf die dritte Formelzeile den Stoppsatz auf die beschränkten Stoppzeiten S_n angewandt haben, woraus insbesondere

$$E\left(X_{S_k}\left(X_{S_{k+1}} - X_{S_k}\right)\right) = E\left(X_{S_k} E\left(X_{S_{k+1}} - X_{S_k} \mid \mathcal{F}_{S_k}\right)\right) = 0$$

folgt. Da $T_n \uparrow \infty$ folgt hieraus

$$E(X_t^2) \le \varepsilon K$$

und wegen $\varepsilon > 0$ damit $E(X_t^2) = 0$, also $X_t = 0$ P-f.s. und dies schließlich für alle t.

Für den allgemeinen Fall betrachte man lokalisierende Folgen

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_n &:= \inf\{t \ge 0 \mid |X_t| \ge n\} \\
\hat{T}_n &:= \inf\{t \ge 0 \mid V_t \ge n\}
\end{aligned}$$

und $\bar{T}_n := \tau_n \wedge \tilde{T}_n \wedge \hat{T}_n \uparrow \infty$ (Begründung?). Dann folgt aus dem bisher gezeigten, angewandt auf $(X_{\bar{T}\wedge t})_{t\ge 0}$, dass $X_{\bar{T}_n \wedge t} = 0$ für alle n, somit $X_t = 0$ (im Grenzwert $n \to \infty$) und das schließlich für alle t. □

Bemerkung 1.55. Die Aussage des letzten Theorems kann man auch so deuten: Ein stetiges lokales Martingal von beschränkter Variation ist konstant (und damit letztlich trivial). Jedes nichttriviale stetige lokale Martingal ist damit also notwendigerweise von unbeschränkter Variation! Die Annahme der Stetigkeit bei dieser Aussage ist entscheidend wie das Beispiel des kompensierten Poissonprozesses $(N_t - \lambda t)_{t\ge 0}$ zeigt. Dieser ist ein Martingal mit Pfaden von beschränkter Variation, da beide, $t \mapsto N_t$ und $t \mapsto \lambda t$ monoton wachsend sind.

Definition 1.56. Es sei $\mathcal{D}$ die Familie aller unbeschränkten Teilmengen $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots\} \subseteq [0, \infty)$. Für einen stochastischen Prozess X und $\Delta \in \mathcal{D}$ definieren wir

$$T_t^\Delta(X) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right)^2 + \left(X_t - X_{t_n}\right)^2, t \ge 0$$

wobei n so gewählt, dass $t_n \le t < t_{n+1}$. Wir sagen, dass X **endliche quadratische Variation** besitzt, falls ein Prozess $\langle X, X\rangle$ existiert, so dass für alle $t \ge 0$ $T_t^\Delta(X)$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\langle X, X\rangle_t$ konvergiert für $|\Delta| \to 0$, wobei $|\Delta| := \sup\{|t_{n+1} - t_n| \mid n \ge 1\}$ die Feinheit der Zerlegung Δ bezeichnet. Alternativ verwenden wir auch die Bezeichnung $\langle X\rangle_t$ statt $\langle X, X\rangle_t$.

Bemerkung 1.57. Für die Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\ge 0}$ haben wir bereits gezeigt, dass $B_t^2 - t$ ein Martingal ist. Aus Theorem 1.61 folgt daher $\langle B\rangle_t = t$, d.h. die Bronwsche Bewegung besitzt endliche quadratische Variation t.

Theorem 1.58. (Existenz der quadratischen Variation für gleichmäßig beschränkte stetige Martingale) Es sei $M \in \mathcal{M}^0_{loc}$ stetiges lokales Martingal, gleichmäßig beschränkt in (t, ω), also insbesondere sogar Martingal. Dann ist M von endlicher quadratischer Variation und $\langle M \rangle_t$ ist der eindeutig bestimmte Prozess in $\mathcal{A}^+$ für den $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ ein Martingal ist.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Theorem 1.54. Bleibt also die Existenz zu zeigen. Zu gegebener Zerlegung Δ und $t_k \le s \le t_{k+1}$ gilt

$$E\left((M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_s\right) = E\left((M_{t_{k+1}} - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right) + (M_s - M_{t_k})^2$$

und daher folgt für $0 \le s < t$

$$\begin{aligned} E\left(T_t^\Delta(M) \mid \mathcal{F}_s\right) &= T_s^\Delta(M) + E\left((M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right) \\ &= T_s^\Delta(M) - M_s^2 + E\left(M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right) . \end{aligned}$$

Insbesondere ist daher $t \mapsto M_t^2 - T_t^\Delta(M)$ ein stetiges Martingal, jedoch ist $T_t^\Delta(M)$ noch nicht der gesuchte Prozess, da nicht notwendigerweise monoton wachsend.

Wir zeigen im folgenden, dass $T_t^\Delta(M)$ für $|\Delta| \to 0$ in Wahrscheinlichkeit konvergiert. Dazu sei $a > 0$ fest gewählt. Für zwei Zerlegungen Δ und Δ' bezeichne $\Delta\Delta'$ die Vereinigung der beiden Zerlegungen, d.h. ihre gemeinsame Verfeinerung. Dann ist $X_t := T_t^\Delta(M) - T_t^{\Delta'}(M)$ ein Martingal und gleichmäßig beschränkt auf $[0, t] \times \Omega$ für alle $t \ge 0$. Dann ist aber auch

$$t \mapsto X_t - T_t^{\Delta\Delta'}(X)$$

wieder ein Martingal, das in $t = 0$ verschwindet. Insbesondere ist $E\left((T_a^\Delta(M) - T_a^{\Delta'}(M))^2\right) = E\left(X_a^2\right) = E\left(T_a^{\Delta\Delta'}(M)\right)$. Wir wollen im folgenden zeigen, dass

$$E\left(X_a^2\right) \to 0 \quad \text{für} \quad |\Delta| + |\Delta'| \to 0 \,. \tag{1.3}$$

Einen Beweis dieser Aussage findet man in [RY94]. Da $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vollständig, existiert also eine Zufallsvariable $\langle M \rangle_a$, so dass $\lim_{|\Delta| \to 0} T_a^\Delta(M) = \langle M \rangle_a$ in $L^2(P)$.

Es bleibt zu zeigen, dass der Prozess $t \mapsto \langle M \rangle_t$ eine Modifikation in $\mathcal{A}^+$ besitzt, die in $t = 0$ verschwindet und für die $t \mapsto M_t^2 - \langle M \rangle_t$ ein Martingal ist. Doob's Maximal-Ungleichung impliziert, dass für alle $a > 0$ der Prozess $T_t^\Delta(M) - \langle M \rangle_t$ gleichmäßig auf $[0, a]$ gegen 0 in L^2 konvergiert. Insbesondere besitzt $\langle M \rangle_t$ eine stetige Modifikation. Klar ist ebenfalls, dass $\langle M \rangle_0 = 0$ und dass der Prozess $\langle M \rangle_t$ monoton wachsende Pfade besitzt. Als Grenzwert adaptierter Prozesse, ist auch der Grenzwert adaptiert. Als L^2-Grenzwert der Martingale $t \mapsto M_t^2 - T_t^\Delta(M)$ ist schließlich auch $t \mapsto M_t^2 - \langle M \rangle_t$ ein Martingal. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Wir werden im folgenden Theorem 1.58 auf allgemeine $M \in \mathcal{M}_{loc}$ verallgemeinern.

Lemma 1.59. Es sei M wie in Theorem 1.58. und T (beliebige) Stoppzeit. Weiterhin sei $M_t^T := M_{T \wedge t}$ das durch T gestoppte lokale Martingal. Dann gilt

$$\langle M^T \rangle_t = \langle M \rangle_{T \wedge t} \,.$$

Beweis. Der Stoppsatz impliziert, dass der Prozess $t \mapsto M_{T \wedge t}^2 - \langle M \rangle_{T \wedge t}$ ein Martingal ist. Aus der Eindeutigkeit (Theorem 1.54) folgt somit

$$\langle M^T \rangle_t = \langle M \rangle_{T \wedge t} \,, t \ge 0 \,.$$

□

Definition 1.60. Es seien X^n und Y rellwertige stochastische Prozesse. Wir sagen dass X^n **gegen Y lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit konvergiert,** $\lim_{n\to\infty} X^n = Y$ **ucp** (aus dem Englischen: uniformly on compact sets in probability), falls für alle $t > 0$ $\sup_{0\le s\le t} |X_s^n - Y_s| \to 0$ in Wahrscheinlichkeit.

Theorem 1.61. (Existenz der quadratischen Variation für stetige lokale Martingale) Es sei $M \in \mathcal{M}_{loc}^0$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Prozess $\langle M\rangle \in \mathcal{A}^+$ mit $\langle M\rangle_0 = 0$ so dass

$$M^2 - \langle M\rangle \quad \in \mathcal{M}_{loc}\,.$$

Weiterhin gilt $\langle M\rangle = \lim_{|\Delta|\to 0} T^\Delta(M)$ ucp, d.h. lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt wieder aus Theorem 1.54. Definiere $T_n := \inf\{t \ge 0 \mid |M_t| = n\}$ und $M^n := M^{T_n}$. Dann ist M^n ein beschränktes stetiges Martingal. Theorem 1.58 impliziert die Existenz eines Prozesses $\langle M^n\rangle \in \mathcal{A}^+$ mit $\langle M^n\rangle_0 = 0$ so dass

$$(M^n)^2 - \langle M^n\rangle$$

ein Martingal ist. Für $m \le n$ gilt $(M^n)^{T_m} - \langle M^m\rangle$ und damit nach Lemma 1.59

$$\langle M^n\rangle_{T_m\wedge t} = \langle M^m\rangle_t\,. \tag{1.4}$$

Für festes $t \ge 0$ und auf der Menge $\{\omega \mid T_m(\omega) \ge t\}$ definieren wir

$$\langle M\rangle_t = \langle M^m\rangle_t\,.$$

Dann ist $\langle M\rangle$ wohldefiniert wegen (1.4) und gleich $\lim_{n\to\infty}\langle M^n\rangle$. Da außerdem $(M^n)^2 - \langle M^n\rangle$ Martingal ist für alle n ergibt sich, dass $M^2 - \langle M\rangle \in \mathcal{M}_{loc}$.

Zum Beweis des zweiten Teils des Theorems wähle $\delta > 0$ und $t > 0$ fest. Betrachte die Stoppzeiten T_n wie oben und wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $P(T_k < t) \le \delta$. Auf der Menge $\{s \le T_k\}$ gilt

$$\langle M\rangle_s = \langle M\rangle_{T_k\wedge s} = \langle M^{T_k}\rangle_s\,.$$

Daher folgt für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
P\left(\sup_{0\le s\le t} |T_s^\Delta(M) - \langle M\rangle_s| \ge \varepsilon\right) &\le \delta + P\left(\sup_{0\le s\le T_k} |T_s^\Delta(M) - \langle M\rangle_s| \ge \varepsilon, T_k \ge t\right)\\
&= \delta + P\left(\sup_{0\le s\le T_k} |T_s^\Delta(M^{T_k}) - \langle M^{T_k}\rangle_s| \ge \varepsilon, T_k \ge t\right)\\
&\le \delta + P\left(\sup_{0\le s\le T_k} |T_s^\Delta(M^{T_k}) - \langle M^{T_k}\rangle_s| \ge \varepsilon\right)\,.
\end{aligned}$$

Theorem 1.58, angewandt auf das beschränkte Martingal M^{T_k}, impliziert nun

$$\limsup_{|\Delta|\to 0} P\left(\sup_{0\le s\le t} |T_s^\Delta(M^{T_k}) - \langle M^{T_k}\rangle_s| \ge \varepsilon\right) = 0\,.$$

Da $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt die Behauptung. $\square$

Theorem 1.62. Es seien $M,\, N \in \mathcal{M}_{loc}^0$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Prozess $\langle M, N\rangle \in \mathcal{A}$ mit $\langle M, N\rangle_0 = 0$ so dass

$$M \cdot N - \langle M, N\rangle \in \mathcal{M}_{loc}\,.$$

Darüberhinaus gilt

$$\lim_{|\Delta|\to 0} T^{\Delta}(M, N) = \langle M, N\rangle \qquad ucp$$

wobei

$$T_t^{\Delta}(M, N) := \sum_k (M_{t_{k+1}\wedge t} - M_{t_k\wedge t})(N_{t_{k+1}\wedge t} - N_{t_k\wedge t})\,.$$

Beweis. Definiere

$$\langle M, N\rangle := \frac{1}{4}\left(\langle M+N, M+N\rangle - \langle M-N, M-N\rangle\right)\,.$$

Wegen

$$M \cdot N = \frac{1}{4}\left((M+N)^2 - (M-N)^2\right)\,,$$

folgt aus Theorem 1.61, dass $M \cdot N - \langle M, N\rangle \in \mathcal{M}_{loc}$. Als Differenz zweier Prozesse in $\mathcal{A}^+$ liegt $\langle M, N\rangle$ in $\mathcal{A}$, woraus die Behauptung folgt. □

Schließlich zeigen wir noch die Existenz der quadratischen Variation für allgemeine stetige Semimartingale.

Satz 1.63. Es sei $X \in \mathcal{S}$ ein stetiges Semimartingal, $X = M + A$ mit $M \in \mathcal{M}_{loc}^0$ und $A \in \mathcal{A}$. Dann folgt

$$T^{\Delta}(X) \to \langle M\rangle\, ucp\,.$$

Man beachte: Die quadratische Variation des Semimartingals hängt nur von M, also dem Martingalanteil des Semimartingals X, ab und ist im übrigen unabhängig von A.

Beweis. Es gilt

$$T_t^{\Delta}(X) = \sum_k (X_{t_{k+1}\wedge t} - X_{t_k\wedge t})^2 = T_t^{\Delta}(M) + 2T_t^{\Delta}(M, A) + T_t^{\Delta}(A)\,.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}|T_t^{\Delta}(M, A)| &= |\sum_k (M_{t_{k+1}\wedge t} - M_{t_k\wedge t})(A_{t_{k+1}\wedge t} - A_{t_k\wedge t})| \\ &\leq \sup_{t_k\in\Delta\,, t_k\leq t} |M_{t_{k+1}} - M_{t_k}| \sum_k |A_{t_{k+1}\wedge t} - A_{t_k\wedge t}| \to 0\end{aligned}$$

denn M besitzt stetige Pfade, also ist $t \mapsto M_t(\omega)$ lokal gleichmäßig stetig, und damit

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sup_{t_k\in\Delta\,, t_k\leq t} |M_{t_{k+1}} - M_{t_k}| = 0\,.$$

Analog zeigt man

$$\begin{aligned}T_t^{\Delta}(A) &= \sum_k (A_{t_{k+1}\wedge t} - A_{t_k\wedge t})^2 \\ &\leq \sup_{t_k\in\Delta\,, t_k\leq t} |A_{t_{k+1}} - A_{t_k}| \sum_k |A_{t_{k+1}\wedge t} - A_{t_k\wedge t}| \to 0\,.\end{aligned}$$

Nun folgt die Behauptung des Satzes aus Theorem 1.61. □

Zum Abschluss des Abschnittes noch einige Aussagen zur Struktur stetiger quadrat-integrierbarer Martingale.

Definition 1.64. Es sei

$$\mathcal{H} := \{M \in \mathcal{M} \mid \sup_{t\geq 0} E\left(|M_t|^2\right) < \infty\}$$

die Menge der $\mathcal{L}^2$-beschränkten stetigen Martingale.

Theorem 1.65. (i) Es sei $M \in \mathcal{H}$, dann konvergiert M gegen M_∞ f.s. und in $\mathcal{L}^2$.

(ii) $\mathcal{H}$ ist (nach Übergang zu Äquivalenzklassen) ein (reeller) Hilbertraum bezüglich der Norm

$$\|M\|_{\mathcal{H}} := \lim_{t\to\infty} E\left(M_t^2\right)^{\frac{1}{2}} = E\left(M_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

(iii) Die folgende Norm

$$\|M\| := E\left(\sup_{t\geq 0} M_t^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist äquivalent zu $\|M\|_{\mathcal{H}}$.

(iv) Ist $M \in \mathcal{H}^0$ (Unterraum aller Martingale M in $\mathcal{H}$ mit $M_0 = 0$), so existiert $\langle M\rangle_\infty = \lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t$ P-f.s. und es gilt

$$\|M\|_{\mathcal{H}}^2 = E\left(\langle M\rangle_\infty\right) .$$

Beweis. (i) Folgt aus dem Martingalkonvergenzsatz 1.45.

(ii) Die zweite Gleichheit folgt aus der L^2-Konvergenz. Bleibt nur noch die Vollständigkeit von $\mathcal{H}$ zu zeigen. Zu diesem Zwecke sei M^n eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$. Dann ist insbesondere M_∞^n, $n \geq 1$, Cauchy-Folge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und damit konvergent gegen ein M_∞, also $\lim_{n\to\infty} M_\infty^n = M_\infty$ in $L^2(P)$. Dann aber folgt auch

$$\lim_{n\to\infty} M_t^n = \lim_{n\to\infty} E\left(M_\infty^n \mid \mathcal{F}_t\right) = E\left(M_\infty \mid \mathcal{F}_t\right)$$

in $L^2(P)$ für alle $t \geq 0$. Die Familie der bedingten Erwartungen $E\left(M_\infty \mid \mathcal{F}_t\right)$, $t \geq 0$, ist offensichtlich ein quadratintegrierbares Martingal. Wir wollen im folgenden zeigen, dass es ein stetige Modifikation besitzt. Dazu beachte man, dass die Doobsche Maximalungleichung 1.36 impliziert, dass

$$P\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left(M_t^n - M_t^m\right)^2 \geq \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{für } m, n \to \infty\,.$$

M.a.W., die Folge M^n ist sogar lokal gleichmäßig konvergent und daher ist

$$M_t^\infty := \lim_{n\to\infty} M_t^n = E\left(M_\infty \mid \mathcal{F}_t\right), t \geq 0$$

eine stetige Modifikation.

(iii) Die Äquivalenz der Normen folgt aus den beiden folgenden Ungleichungen

$$E\left(\sup_{t\geq 0} M_t^2\right) \leq 4E\left(M_\infty^2\right) \leq 4E\left(\sup_{t\geq 0} M_t^2\right)$$

(siehe Doobsche Maximalungleichung 1.36).

(iv) Aus Theorem 1.61 folgt, dass $M_t^2 - \langle M\rangle_t \in \mathcal{M}_{loc}$. Es sei wie üblich $T_n := \inf\{t \geq 0 \mid |M_t| = n\}$. Dann folgt

$$E\left(M^2_{T_n\wedge t}\right) = E\left(\langle M\rangle_{T_n\wedge t}\right) .$$

Aus dem Lemma von Fatou folgt für $n \to \infty$ und $t \to \infty$

$$E\left(M^2_\infty\right) \leq \liminf_{n\to\infty, t\to\infty} E\left(M^2_{T_n\wedge t}\right) = \liminf_{n\to\infty, t\to\infty} E\left(\langle M\rangle_{T_n\wedge t}\right) = E\left(\langle M\rangle_\infty\right) ,$$

wobei in der letzten Gleichheit monotone Integration angewandt wurde.
Umgekehrt folgt

$$E\left(\langle M\rangle_\infty\right) = \lim_{n\to\infty, t\to\infty} E\left(\langle M\rangle_{T_n\wedge t}\right) = \lim_{n\to\infty, t\to\infty} E\left(M^2_{T_n\wedge t}\right) \leq E\left(M^2_\infty\right)$$

aus dem Stoppsatz 1.39 angewandt auf das Submartingal M_t^2. $\square$

Literaturverzeichnis

[I] Grundlegende Texte

[Ba91] H. Bauer, Maß- und Integrationstheorie, 2. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, 1991.

[Ba02] H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie, 5. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, 2002.

[Ev10] L.C. Evans, An Introduction to Stochastic Differential Equations, AMS, Providence, 2010.

[Kl06] A. Klenke, Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer, New York, 2006.

[KS91] I. Karatzas and S. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, second edition, Springer, New York, 1991.

[St13] W. Stannat, Wahrscheinlichkeitstheorie I, Vorlesungsskript, TU Berlin, 2015.

[St14] W. Stannat, Wahrscheinlichkeitstheorie II, Vorlesungsskript, TU Berlin, 2016.

[II] Ergänzende Texte

[DM78] C. Dellacherie, P.A: Meyer, Probabilities and Potential, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[Kh12] R. Khasminskii, Stochastic Stability of Differential Equations, 2. Auflage, Springer, New York, 2012.

[Pr92] P. Protter, Stochastic Integration and Stochastic Differential Equations, second edition, Springer, New York, 1992.

[RY94] D. Revuz and M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, 2. Auflage, Springer, 1994.

[RW94] L.C.G. Rogers and D. Williams, Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume I: Foundations, 2. Auflage, Wiley, 1994.