# 2 Brownsche Bewegung

Wir haben die Brownsche Bewegung bereits als Grenzwert reskalierter Irrfahrten in der VL WTH II kennengelernt (siehe dazu Abschnitt 5.2). In diesem Kapitel wollen wir in aller Kürze grundlegende Eigenschaften der Brownschen Bewegung zusammenfassen.

## 2.1 Der Wienerraum

Gegeben sei im folgenden eine stetige Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ im Sinne der Definition 1.32, wobei die zugehörige Filtration zunächst einmal keine Rolle spielt. Den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnen wir mit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Der Zustandsraum einer stetigen Brownschen Bewegung ist dann der reelle Vektorraum $C([0,\infty))$ aller stetigen Funktionen $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Für $t \in [0,\infty)$ bezeichne

$$\pi_t : C([0,\infty)) \to \mathbb{R}\,, f \mapsto f(t)\,,$$

die *Auswertung* der Funktion $f$ in $t$. Wenn wir $f$ als Vektor in $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ auffassen, so ist $\pi_t(f)$ also die Projektion des Vektors $f$ auf die $t$-te Koordinate. Wir betrachten nun auf $C([0,\infty))$ als $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}$ die kleinste $\sigma$-Algebra, bzgl. der alle Projektionen $\pi_t$ messbar sind, d.h.

$$\mathcal{F} := \sigma(\{\pi_t \mid t \geq 0\})\,.$$

Bzgl. dieser $\sigma$-Algebra wird die Abbildung

$$\Phi : \Omega \to C([0,\infty))\,, \omega \mapsto (t \mapsto B_t(\omega))\,, \quad \mathcal{A}/\mathcal{F} - \text{messbar.}$$

*Definition* 2.1. Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Brownsche Bewegung, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dann heißt das Bildmaß $W := P \circ \Phi^{-1}$ von $P$ unter der Transformation $\Phi$ auf $(C([0,\infty)), \mathcal{F})$ **Wienermaß**, $(C([0,\infty), \mathcal{F}, W)$ heißt **(klasssischer) Wienerraum**, und $(C([0,\infty)), \mathcal{F}, (\pi_t)_{t\geq 0}, W)$ **kanonisches Modell der Brownschen Bewegung.**

Wir geben im folgenden für die $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}$ eine alternative Charakterisierung. Dazu beachte, dass die folgende Abbildung

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \max_{t\in[0,n]} |f(t) - g(t)| \right) \wedge 1\,, \quad f, g \in C([0,\infty))$$

eine Metrik auf $C([0,\infty))$ definiert. Bezüglich dieser Metrik ist $C([0,\infty))$ ein vollständiger separabler metrischer Raum. Wie üblich bezeichne $\mathcal{B}(C([0,\infty)))$ die zugehörige Borelsche $\sigma$-Algebra. Dann gilt das folgende Lemma.

**Lemma 2.2.** $\mathcal{F} = \mathcal{B}(C([0,\infty)))$.

*Beweis.* Für alle $t \geq 0$ ist $f \mapsto f(t)$, $C([0,\infty)) \to \mathbb{R}$ stetig, also $\pi_t$ Borel-messbar, und damit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(C([0,\infty)))$.

Umgekehrt zeigen wir zunächst, dass $\mathcal{F}$ alle offenen Kugeln

$$B_\varepsilon(f_0) := \{f \in C([0,\infty)) \mid d(f,f_0) < \varepsilon\}\,, f_0 \in C([0,\infty))\,, \varepsilon > 0\,,$$

bezüglich der Metrik $d$ enthält. Dies folgt jedoch unmittelbar aus

$$B_\varepsilon(f_0) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left\{ f \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \max_{t \in \mathbb{Q}\cap[0,n]} |f(t) - f_0(t)| \right) \wedge 1 \le \varepsilon - \frac{1}{m} \right\}}_{\in \mathcal{F}}\,.$$

Da $C([0,\infty))$ separabler metrischer Raum, kann jede offene Menge $U \subseteq C([0,\infty))$ als abzählbare Vereinigung offener Kugeln geschrieben werden. Es folgt, dass $U \in \mathcal{F}$. Da das System aller offenen Mengen die Borelsche $\sigma$-Algebra erzeugt, ergibt sich hieraus die Inklusion $\mathcal{B}(C([0,\infty))) \subseteq \mathcal{F}$. $\square$

## 2.2 Existenz des Wienermaßes

Ziel dieses Abschnittes ist die Konstruktion des Wienermaßes und damit die Konstruktion einer stetigen Brownschen Bewegung. Wir werden drei alternative Konstruktionen vorstellen, von denen eine bereits in Kapitel 5 der VL WTH II ausführlich dargestellt wurde.

(1) **Wiener-Lévy Konstruktion** Brownschen Bewegung als zufällige Überlagerung deterministischer Pfade

Es seien $Y_n$, $n \ge 1$, unabhängig, zentriert, $\sim N,(0,1)$. Weiter sei $\varphi_n$, $n \ge 1$, eine Orthonormalbasis des (reellwertigen) Hilbertraumes $L^2([0,\infty))$, d.h., $\varphi_n$ sind quadratintegrierbare Funktionen auf $[0,\infty)$ mit $\int \varphi_n \varphi_m \, dx = \delta_{nm}$ und jede Funktion $h \in L^2([0,\infty))$ lässt sich darstellen als Reihe

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \varphi_n \qquad \text{mit } h_n = \int h \varphi_n \, dx\,, n \ge 1\,.$$

Dann definiert

$$B_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\omega) \int_0^t \varphi_n \, dx$$

eine stetige Brownsche Bewegung (siehe [KS91]).

(2) **Invarianzprinzip von Donsker** Brownsche Bewegung als Grenzwert reskalierter Irrfahrten (siehe WTH II, Kapitel 5)

Es seien $X_n$, $n \ge 1$, iid, mit $E(X_k) = 0$ und Var $(X_k) = 1$, und

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n\,, n \ge 1\,, \quad S_0 := 0$$

die zugehörige Irrfahrt. Weiter sei

$$B_t^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}} \left( S_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor) X_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right)\,, t \ge 0$$

die lineare Interpolation der mit $n$ in der Zeit und $\frac{1}{\sqrt{n}}$ im Raum reskalierten Irrfahrt. Dann gilt das Invarianzprinzip von Donsker

$$\lim_{n\to\infty} P \circ (B^{(n)})^{-1} = W \quad \text{schwach,}$$

d.h., die Verteilung der reskalierten Irrfahrt konvergiert schwach gegen die Verteilung einer stetigen Brownschen Bewegung. Wir haben diesen Satz (im Spezialfall des Zeitintervalls $[0,1]$) als Theorem 5.12 in der VL WTH II bewiesen.

(3) **Konstruktion über den Konsistenzsatz (bzw. Fortsetzungssatz) von Kolmogorov**

Ausgangspunkt dieser Konstruktion des Wienermaßes sind die endlichdimensionalen Randverteilungen einer Brownschen Bewegung. Dazu erinnern wir zunächst an das folgende Lemma 5.6 aus Kapitel 5.2 der VL WTH II.

**Lemma 2.3.** Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ und $B = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_m})$ ein Zufallsvektor. Weiter sei $B_{t_0} := 0$. Dann sind äquivalent:

(i) $B$ ist normalverteilt mit Erwartungswertvektor $0$ und Kovarianzmatrix $(\min(t_i, t_j))_{1\le i,j\le m}$.

(ii) Die Inkremente
$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$
sind unabhängig normalverteilt mit Erwartungswert $0$ und Varianz $t_i - t_{i-1}$ für $1 \le i \le m$.

Mit anderen Worten: Ist $(B_t)_{t\ge0}$ eine (stetige) Brownsche Bewegung, so ist für jede endliche Teilmenge $J = \{t_1, t_2, \ldots t_m\} \subseteq [0,\infty)$ der Vektor $B = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_m})$ normalverteilt mit Mittel $0$ und Kovarianzmatrix $Q_J := (\min(t_i, t_j))_{1\le i,j\le m}$. Es sei $\mathcal{D}_0$ die Familie aller endlichen Teilmengen von $[0,\infty)$. Dann gilt:

**Satz 2.4.** Die Familie $\{N(0, Q_J) \mid J \in \mathcal{D}_0\}$ ist konsistent, d.h. für $J_1 \subseteq J_2$ und

$$\pi^{J_2}_{J_1} : \mathbb{R}^{|J_2|} \to \mathbb{R}^{|J_1|}, (x_j)_{j\in J_2} \mapsto (x_j)_{j\in J_1}$$

gilt:
$$\pi^{J_2}_{J_1}(N(0, Q_{J_2})) = N(0, Q_{J_1})\,.$$

*Beweis.* Es reicht, die Behauptung zu zeigen für $J_2 = \{t_1, \ldots, t_m\}$ und $J_1 = J_2 \setminus \{t_{i_0}\}$ für ein $i_0$. Es sei $B = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_m})$ ein Zufallsvektor mit Verteilung $N(0, Q_{J_2})$. Nach Lemma 2.3 sind $X_j := B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$, $j = 1, \ldots, m$, (mit $B_{t_0} := 0$), unabhängig $N(0, t_j - t_{j-1})$-verteilt und es gilt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 \end{bmatrix} X\,.$$

Es sei nun $\check{B} = [B_{t_1}, \dots, B_{t_{i_0-1}}, B_{t_{i_0+1}}, \dots, B_{t_m}]^T$. Dann gilt

$$\check{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{i_0-1} \\ X_{i_0} + X_{i_0+1} \\ X_{i_0+1} \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \check{X}$$

$$\text{mit } \check{X}_1, \dots, \check{X}_m \text{ unabhängig, } \begin{cases} N(0, t_i - t_{i-1})\text{-verteilt für } i \neq i_0 \\ N(0, t_{i_0+1} - t_{i_0-1})\text{-verteilt für } i = i_0 + 1 \end{cases}.$$

Also hat $\check{B} = (B_{t_i})_{t_i \in J_1} = \pi^{J_2}_{J_1}(B)$ die Verteilung $N(0, Q_{J_1})$. □

Aus dem Konsistenzsatz von Kolmogorov (siehe Kapitel 2, Theorem 2.2 in [KS91]) folgt nun:

**Korollar 2.5.** Es existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{W}$ auf $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)})$ mit

(i) $\omega(0) = 0$ $\tilde{W}$-f.s.

(ii) Für $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ sind die Inkremente

$$\omega(t_1) - \omega(t_0), \dots, \omega(t_n) - \omega(t_{n-1})$$

unabhängig $N(0, t_i - t_{i-1})$-verteilt.

Der Prozess

$$\tilde{B}_t : \mathbb{R}^{[0,\infty)} \to \mathbb{R}\,, \omega \mapsto \tilde{B}_t(\omega) = \omega(t)$$

besitzt noch keine stetige Pfade. Der folgende Satz zeigt jedoch, dass man $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ geeignet modifizieren kann.

**Theorem 2.6. (Kolmogorov-Chentsov)** Es sei $T > 0$ und $(\tilde{X}_t)_{t\in[0,T]}$ stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$\exists\, \alpha, \beta > 0 \text{ mit } \quad \sup_{s,t\in[0,T]} \frac{E(|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|^\alpha)}{|t-s|^{1+\beta}} < \infty$$

Dann gibt es für alle $\gamma \in (0, \frac{\beta}{\alpha})$ eine Modifikation $(X_t)_{t\in[0,T]}$ von $(\tilde{X}_t)_{t\in[0,T]}$ und eine strikt positive Zufallsvariable $h > 0$ mit

$$\sup_{\substack{s,t\in[0,T] \\ 0<|t-s|<h(\omega)}} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\gamma} < \infty\,.$$

*Beweis.* O.B.d.A. sei $T = 1$. Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$P\left(|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{M}{\varepsilon^\alpha}|t-s|^{1+\beta}$$

mit

$$M = \sup_{s,t\in[0,T]} \frac{E\left(|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|^\alpha\right)}{|t-s|^{1+\beta}}\,.$$

Also

$$\begin{aligned} &P\left(\max_{0\le k<2^n} |\tilde{X}_{\frac{k+1}{2^n}} - \tilde{X}_{\frac{k}{2^n}}| \ge 2^{-\gamma n}\right) \\ &\quad\le \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(|\tilde{X}_{\frac{k+1}{2^n}} - \tilde{X}_{\frac{k}{2^n}}| \ge 2^{-\gamma n}\right) \le M \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{\alpha\gamma n}\left(12^n\right)^{1+\beta} = M 2^{(\alpha\gamma-\beta)n}. \end{aligned}$$

Da $\alpha\gamma < \beta$, ist $\sum_{n=0}^\infty 2^{(\alpha\gamma-\beta)n} < \infty$, also nach Borel-Cantelli

$$P\Bigg(\underbrace{\left\{\omega \mid \max_{0\le k<2^n} |\tilde{X}_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - \tilde{X}_{\frac{k}{2^n}}(\omega)| \ge 2^{-\gamma n} \text{ für } \infty\text{-viele } n\right\}}_{=:N}\Bigg) = 0\,.$$

Für alle $\omega \in \Omega \setminus N$ gibt es ein $n(\omega) \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{0\le k<2^n} |\tilde{X}_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - \tilde{X}_{\frac{k}{2^n}}(\omega)| < 2^{-\gamma n}\,\forall n \ge n(\omega)\,.$$

Es sei $D = \{\frac{k}{2^n} \mid k = 0,\dots,2^n, n \ge 0\}$ und $h(\omega) = 2^{-n(\omega)}$. Für $s,t \in D$ mit $|t-s| < h(\omega)$ zeigt man nun

$$|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)| \le C|t-s|^\gamma$$

für eine Konstante $C$ (siehe Kapitel 2, Theorem 2.8 in [KS91]). Damit ist $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega)$ gleichmäßig stetig auf $D$ und besitzt somit eine stetige Fortsetzung $t \mapsto X_t(\omega)$ auf $[0,1]$. Für $\omega \in N$ setzen wir $X_t(\omega) = 0\ \forall t$. Damit folgt $X_t = \tilde{X}_t$ P-f.s. auf $D$ und somit $P(X_t = \tilde{X}_t) = 1\ \forall\, t$, denn zu $t \in [0,1]$ gibt es eine Folge $(s_n) \subseteq D$ mit $s_n \to t$ und wegen $\tilde{X}_{s_n}(\omega) = X_{s_n}(\Omega)$ für alle $\omega \in \Omega \setminus N$, $X_{s_n}(\omega) \to X_t(\omega)$ für alle $\omega$ und $\tilde{X}_{s_n} \to \tilde{X}_t$ $P$-stochastisch. □

**Korollar 2.7.** Es existiert eine Modifikation $(B_t)_{t\le 0}$ von $(\tilde{B}_t)_{t\le 0}$, so dass $(B_t)_{t\le 0}$ eine stetige Brownsche Bewegung ist.

*Beweis.* Für $s < t$ ist $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s$ $N(0, t-s)$-verteilt, also

$$\begin{aligned} E\left(|\tilde{B}_t - \tilde{B}_s|^\alpha\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right)\,dx \\ &= (t-s)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\,dx\,. \end{aligned}$$

Damit sind die Annahmen für Theorem 2.6 erfüllt für alle $\alpha > 2$ und $\beta = \frac{\alpha}{2} - 1$. Also existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Modifikation $(B_t^n)_{t\in[0,n]}$ von $(\tilde{B}_t)_{t\in[0,n]}$. Offenbar gilt $B_t^n = B_t^m$ $P$-f.s. auf $[0,n]$ für $n \le m$, und damit gibt es eine Nullmenge $N$ mit

$$B_t(\omega) := B_t^{n+1}(\omega)\,, \quad t \in [n, n+1[$$

ist stetig für $\omega \in \Omega \setminus N$. □

*Bemerkung* 2.8. Wir haben insbesondere gezeigt, dass die Pfade der Bronwschen Bewegung lokal Hölderstetig sind mit Hölderexponent $\gamma < \frac{1}{2}$ (optimal bis auf logarithmische Terme).

## 2.3 Martingale der Brownschen Bewegung und Anwendungen des Stoppsatzes

Im ganzen Abschnitt sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine rechtsstetige Filtration und $(B_t)_{t\leq 0}$ eine $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung auf einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zum Beispiel können wir eine stetige Brownsche Bewegung mit $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^0$, $t \geq 0$, betrachten, wobei $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\left(\{B_s \mid s \in [0,t]\}\right)$ die von $B$ erzeugte Filtration ist.
Für $a < 0 < b$ sei

$$T_{a,b} = \inf\{t \geq 0 \mid B_t(\omega) \notin [a,b]\}$$

die erste Austrittszeit aus dem Intervall $[a,b]$. Dann ist $T_{a,b}$ eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit, denn $T_{a,b}$ ist gleich der ersten Eintrittszeit $T_G$ in die offene Menge $G = \mathbb{R} \setminus [a,b]$, diese ist nach Satz 1.20 eine schwache Stoppzeit, und nach Bemerkung 1.13 sind für rechtsstetige Filtrationen schwache Stoppzeiten auch Stoppzeiten.
Analog zum Fall symmetrischer Irrfahrten gilt nun:

**Satz 2.9.**

$$P(B_{T_{a,b}} = a) = \frac{b}{b + |a|} \quad \text{und } E(T_{a,b}) = |a| \cdot b\,.$$

*Beweis.* Setze $T := T_{a,b}$. Da $(B_t)_{t\geq 0}$ $\mathbb{F}$-Martingal ist (siehe Lemma 1.33) folgt aus dem Stoppsatz

$$0 = E(B_{T\wedge n}) \overset{n\to\infty}{\to} E(B_T) = aP(B_T = a) + bP(B_T = b)\,.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $T < \infty$ $P$-f.s. (Beweis später). Die Anwendung des Lebesgueschen Konvergenzsatzes ist gerechtfertigt, da $|B_{T\wedge n}| \leq |a| \vee b$. Hieraus ergibt sich dann schließlich $P(B_T = a) = \frac{b}{b+|a|}$.
Ganz analog beweist man die zweite Gleichheit durch Anwendung des Stoppsatzes auf das Martingal $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$. Diesmal folgt aus dem Stoppsatz für alle $n \in \mathbb{N}$
$0 = E\left(B_{T\wedge n}^2 - T \wedge n\right)$ und im Grenzübergang $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(B_{T\wedge n}^2\right) = E\left(B_T^2\right) = a^2 P\left(B_T = a\right) + b^2 P\left(B_T = b\right)\,.$$

Mithilfe der monotonen Integration gilt andererseits $\lim_{n\to\infty} E(T \wedge n) = E(T)$ und damit

$$E(T) = (a^2 - b^2)P(B_T = a) + b^2 = |a| \cdot b\,.$$

□

**Korollar 2.10.** Es sei

$$T_b := \inf\{t \geq 0 \mid B_t > b\} \quad \text{Passierzeit zu } b\,.$$

Dann gilt: $T_b < \infty$ $P$-f.s., aber $E(T_b) = \infty$.

*Beweis.* Für $a < 0$ gilt

$$P(T_b < \infty) \geq P(T_b = T_{a,b}) = P(B_{T_{a,b}} = b) = \frac{|a|}{b + |a|}\,.$$

Für $a \to -\infty$ folgt $\frac{|a|}{b+|a|} \to 1$, also $P(T_b < \infty) = 1$.

Andererseits gilt wegen $T_b \geq T_{a,b}$

$$E(T_b) \geq E(T_{a,b}) = |a| \cdot b \overset{|a|\to\infty}{\to} \infty\,.$$

□

**Satz 2.11.** Es sei $\mu_b$ die Verteilung von $T_b$. Dann gilt für die Laplacetransformierte

$$E(e^{-\lambda T_b}) = e^{-b\sqrt{2\lambda}}, \quad \lambda \geq 0\,.$$

Hieraus folgt insbesondere

$$\mu_b\,(dt) = \begin{cases} \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{b^2}{2t}} & ; t > 0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

*Beweis.* Diesmal betrachten wir für $\alpha \geq 0$ das exponentielle Martingal $G_t^\alpha = \exp(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t)$. Anwendung des Stoppsatzes ergibt

$$1 \overset{Stoppsatz}{=} \lim_{n\to\infty} E(G^\alpha_{T_b\wedge n}) \overset{Lebesgue}{=} E(G^\alpha_{T_b}) = e^{\alpha b} E(e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 T_b})$$

wobei die Anwendung des Lebesgueschen Konvergenzsatzes gerechtfertigt ist wegen $G^\alpha_{T_b\wedge n} \leq e^{\alpha b}$ für alle $n$. Setzt man schließlich $\alpha = \sqrt{2\lambda}$, so erhält man die erste Behauptung. Der Zusatz ist eine Übung. □

## 2.4 Pfadeigenschaften der Brownschen Bewegung

Im ganzen Abschnitt sei $(B_t)_{t\geq 0}$ stetige $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

**Satz 2.12.** Die folgenden Prozesse sind wieder stetige Brownsche Bewegungen:

(i) $\tilde{B}_t := -B_t$, $t > 0$. (Symmetrie)

(ii) $\tilde{B}_t := cB_{\frac{t}{c^2}}$, $t \geq 0$, wobei $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (Reskalierung in Raum und Zeit)

(iii) $\tilde{B}_t := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}} & ; t > 0 \\ 0 & ; t = 0 \end{cases}$ (Zeitumkehr)

*Beweis.* (i) Offensichtlich.

(ii) $(\tilde{B}_t)$ ist wieder stetig. Für $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ sind die Inkremente

$$B_{\frac{t_i}{c^2}} - B_{\frac{t_{i-1}}{c^2}} \quad i = 1, \ldots, n$$

unabhängig, $N(0, \frac{t_i}{c^2} - \frac{t_{i-1}}{c^2})$-verteilt, und damit

$$cB_{\frac{t_i}{c^2}} - cB_{\frac{t_{i-1}}{c^2}} \quad i = 1, \ldots, n$$

unabhängig, $N(0, t_i - t_{i-1})$-verteilt.

(iii) Für $0 < t_1 < \ldots < t_n$ ist der Vektor $B = [B_{\frac{1}{t_n}}, \ldots, B_{\frac{1}{t_1}}]^T$ normalverteilt mit Mittel $0$ und Kovarianzmatrix Cov $(B) = \left(\frac{1}{t_i} \wedge \frac{1}{t_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Daher ist der Vektor $\tilde{B} = [t_n B_{\frac{1}{t_n}}, \ldots, t_1 B_{\frac{1}{t_1}}]^T$ normalverteilt mit Mittel $0$ und Kovarianzmatrix

$$\text{Cov}\,(\tilde{B}) = \left(t_i t_j \cdot \frac{1}{t_i} \wedge \frac{1}{t_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = (t_i \wedge t_j)_{1\leq i,j\leq n}\,.$$

Damit stimmt die Kovarianzmatriz der endlichdimensionalen Verteilungen von $\tilde{B}$ mit der Kovarianzmatrix der endlichdimensionalen Verteilungen einer Brownschen Bewegung überein. Es bleibt nur noch die Stetigkeit zu zeigen. Die Stetigkeit in $t > 0$ ist klar, in $t = 0$ folgt sie aus dem folgenden Gesetz der großen Zahlen.

□

**Satz 2.13.** (starkes Gesetz der großen Zahlen) Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ stetige Brownsche Bewegung. Dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad \text{P-f.s.}$$

(also Wachstum eines typischen Brownschen Pfades für $t \to \infty$ schwächer als linear).

*Beweis.* $(|B_t|)_{t\geq 0}$ ist ein stetiges Submartingal. Eine Anwendung der Maximalungleichung ergibt für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{t\in[2^n,2^{n+1}]} \frac{|B_t|}{t} \geq \varepsilon\right) &\leq P\left(\sup_{t\in[2^n,2^{n+1}]} |B_t| \geq \varepsilon 2^n\right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon 2^n} E(|B_{2^{n+1}}|) \leq \frac{1}{\varepsilon 2^n} \underbrace{E(B_{2^{n+1}}^2)^{\frac{1}{2}}}_{=2^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} 2^{-\frac{n}{2}} . \end{aligned}$$

Folglich ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sup_{t\in[2^n,2^{n+1}]} \frac{|B_t|}{t} \geq \varepsilon\right) < \infty$$

summierbar für alle $\varepsilon > 0$ und damit

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|B_t|}{t} = 0 \quad \text{P-f.s. nach Borel-Cantelli.}$$

□

### Nicht-Differenzierbarkeit der Brownschen Pfade

Wir haben bereits in Kapitel 1 gesehen, dass eine stetige Brownsche Bewegung $B = (B_t)_{t\geq 0}$ die stetige quadratische Variation $\langle B\rangle_t = t$ besitzt. Insbesondere gilt nach Theorem 1.61

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i\in\tau_n \\ t_i\leq t}} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 = t$$

lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit (und damit auch $P$-f.s. entlang einer weiteren Teilfolge). Insbesondere ist also ein typischer Brownscher Pfad von unbeschränkter Variation, da die quadratische Variation von stetigen Funktionen mit beschränkter Variation verschwindet. Dies deutet darauf hin, dass ein typischer Brownscher Pfad nirgends differenzierbar ist. Dies ist in der Tat der Fall, wie folgender Satz zeigt:

**Satz 2.14.** (Paley-Wiener, Zygmund) Ein typischer Pfad der Brownschen Bewegung ist nirgends differenzierbar.

*Beweis.* Idee: Ist $B_t$ differenzierbar in $t \in ]0,1[$, so bleibt der Differentialquotient in einer Umgebung $U(t)$ von $t$ beschränkt, etwa durch eine Konstante $C$. Wähle nun $n$ so groß, dass $t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+3}{n}\right] \subseteq U(t)$. Dann gilt für $k = i+1, i+2, i+3$

$$\begin{aligned} |X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}}| &\le |X_{\frac{k}{n}} - X_t| + |X_t - X_{\frac{k-1}{n}}| \\ &\le C(|\frac{k}{n} - t| + |\frac{k-1}{n} - t|) \le \frac{7C}{n} \end{aligned}$$

Also

$$N := \{\omega \in \Omega \mid t \mapsto X_t(\omega) \text{ irgendwo differenzierbar}\}$$

$$\subseteq \tilde{N} := \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \ge m} \underbrace{\bigcup_{i=0}^{n-3} \bigcap_{k=i+1}^{i+3} \{|X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}}| \le \frac{l}{n}\}}_{=:A_{n,l}} .$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Inkremente gilt

$$P(A_{n,l}) \le n \left( P\left( |Y| \le \frac{l}{\sqrt{n}} \right) \right)^3$$

mit $Y = \sqrt{n}\left(X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}}\right)$ $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Insbesondere also

$$P(A_{n,l}) \le n \left( \frac{l}{\sqrt{n}} \right)^3 = \frac{l^3}{\sqrt{n}}$$

(daher haben wir oben $3$ gewählt). Es folgt

$$P\left( \bigcap_{n \ge m} A_{n,l} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad P\left(\tilde{N}\right) = 0 .$$

□

Ohne Beweis geben wir schließlich noch zwei Sätze an:

**Satz 2.15.** (Satz vom iterierten Logarithmus)

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log\left(\frac{1}{t}\right)}} = +1 \quad , \liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log\left(\frac{1}{t}\right)}} = -1 \text{ P-f.s.}$$

*Bemerkung* 2.16. Durch Zeitumkehr folgt hinaus

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = +1 \quad , \liminf_{t \to \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = -1 \text{ P-f.s.}$$

**Satz 2.17.** (Levy) Es sei

$$W_h(\omega) := \underbrace{\sup_{\substack{t \in [0,1-h] \\ h' \le h}} |B_{t+h'}(\omega) - B_t(\omega)|}_{\text{"Stetigkeitsmodul"}}$$

Dann gilt

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{W_h}{\sqrt{2h \log\left(\frac{1}{h}\right)}} = 1 \quad \text{P-f.s.}$$

## 2.5 Die Brownsche Bewegung als Markovprozess

Wir wollen in diesem Abschnitt die Brownsche Bewegung als Markovprozess kennenlernen. Die allgemeine Theorie (zeitstetiger) Markovprozesse werden wir in Kapitel 6 dieser VL noch genau studieren. An dieser Stelle wollen wir den Begriff nur soweit entwickeln, wie er zum weiteren Verständnis der Brownschen Bewegung hilfreich ist.
Zur Erinnerung: Im Rahmen zeitdiskreter stochastischer Prozesse $(X_t)$ haben wir die Markoveigenschaft kennengelernt als folgende Eigenschaft

$$P\left(X_{t+s} \in A \mid \mathcal{F}_s^0\right) = P\left(X_{t+s} \in A \mid X_s\right)$$

wobei $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\left(\{X_s \mid s \in [0,t]\}\right)$ die von $(X_t)$ erzeugte Filtration ist.
Eine für unsere Zwecke geeignetere Formulierung wird in der folgenden Definition gegeben. Im folgenden sei $(X_t)_{t\geq 0}$ $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess, $(\mathcal{F}_t)$-adapiert.

*Definition* 2.18. Eine Familie von $\mathbb{R}^d$-wertigen stochastischen Prozessen $((X_t)_{t\geq 0}, (P_x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt **Markovprozess**, falls gilt:

(i) $x \mapsto P_x(\Gamma)$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-messbar $\quad \forall\, \Gamma \in \mathcal{F}$

(ii) $P_x(X_0 = x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

(iii) $\exists$ Filtration $(\mathcal{F}_t)$, so dass $(X_t)_{t\geq 0}$ adaptiert an $(\mathcal{F}_t)$ und

$$P_x(X_{t+s} \in A \mid \mathcal{F}_s) = P_{X_s}(X_t \in A) \quad P_x\text{-f.s.} \quad \forall\, 0 \leq s, t, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\,, x \in \mathbb{R}^d \tag{2.1}$$

Wir bezeichnen (2.1) als **Markoveigenschaft bzgl. der Filtration** $(\mathcal{F}_t)$.

*Definition* 2.19. Es sei $d \geq 1$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration. Ein $\mathbb{R}^d$-wertiger $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ heißt **d-dimensionale $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung mit Start in** $x$ falls gilt:

(i) $B_0 = x$ P-f.s.

(ii) Für $0 \leq s < t$ ist das Inkrement $B_t - B_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und $\mathcal{N}(0, (t-s)\cdot I)$-verteilt.

(iii) $B$ besitzt stetige Pfade.

*Bemerkung* 2.20. Ist $(B_t)$ eine d-dimensionale $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung mit Start in $x$. Dann sind die Komponenten $(B_t^{(1)}), \ldots, (B_t^{(d)})$ unabhängige $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung mit Start in $x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}$.

**Konstruktion:** $B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)}$ unabhängige $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegungen (mit Start in $0$). Dann ist $x + (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})$, eine d-dimensionale $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung mit Start in $x$

*Definition* 2.21. Es sei $d \geq 1$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration. Eine **d-dimensionale $\mathbb{F}$-Brownsche Familie** ist eine Familie $((B_t)_{t\geq 0}, (P_x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $x \mapsto P_x(\Gamma)$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-messbar $\forall\, \Gamma \in \mathcal{F}$

(ii) Für $x$ ist $(B_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$ d-dimensionale $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung mit Start in $x$.

**Konstruktion** (im kanonischen Modell)
$(C([0,\infty)),\mathcal{F},W)$ klassischer Wienerraum

$$\left.\begin{array}{l} \Omega = C([0,\infty);\mathbb{R}^d) = C([0,\infty))^d \\ \mathcal{F}^d = \mathcal{B}(C([0,\infty);\mathbb{R}^d) \overset{!}{=} \mathcal{B}(C([0,\infty)))^d \\ W^d = \otimes_{i=1}^d W \end{array}\right\} \text{Produktraum}$$

$P_x := W^d \circ T_x^{-1}$, wobei

$$\begin{aligned} T_x : C([0,\infty);\mathbb{R}^d) &\to C([0,\infty);\mathbb{R}^d) \\ f &\mapsto (t \mapsto x + f(t)) \end{aligned}$$

Translation um $x$, schließlich

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\,, \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^0\,, \quad \mathcal{F}_t^0 := \sigma\left(\{\pi_s \mid s \in [0,t]\}\right)$$

mit $\pi_t$ kanonische Projektion Dann ist $((\pi_t)_{t\geq 0},(P_x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ d-dimensionale $\mathbb{F}$-Brownsche Familie.

**Satz 2.22.** Es sei $\mathbb{M} = ((B_t)_{t\geq 0},(P_x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ d-dimensionale $\mathbb{F}$-Brownsche Familie auf $(\Omega,\mathcal{F})$. Dann ist $\mathbb{M}$ ein Markovprozess.

*Beweis.* Die ersten beiden Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 2.18 sind klar. Es bleibt, die Markoveigenschaft (2.1) bzgl. der Filtration $\mathbb{F}$ zu zeigen. Diese folgt direkt aus der Tatsache, dass für $s \geq 0$ der stochastische Prozess

$$B_t^{(s)} := B_{t+s} - B_s\,, t \geq 0\,,$$

wieder eine d-dimensionale Brownsche Bewegung mit Start in $0$ bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_t^{(s)} := \mathcal{F}_{t+s}$, $t \geq 0$, und unabhängig von $\mathcal{F}_s$. Damit ist

$$B_{t+s} = B_s + B_t^{(s)}\,, t \geq 0\,,$$

d-dimensionale Brownsche Bewegung mit Start in $B_s$. Es folgt

$$\begin{aligned} P_x(B_{t+s} \in A \mid \mathcal{F}_s) &= P_x(B_s + B_t^{(s)} \in A \mid \mathcal{F}_s) = P_{B_s}(B_t^{(s)} \in A) \\ &= P_{B_s}(B_t \in A)\,. \end{aligned}$$

□

Gilt die Markoveigenschaft auch für Stoppzeiten, so spricht man von der **starken Markov-Eigenschaft**.

*Definition* 2.23. Es sei $\mathbb{M} = ((X_t)_{t\geq 0},(P_x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ auf $(\Omega,\mathcal{F})$ Markovprozess (bzgl. rechtsstetiger Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann sagen wir, dass $\mathbb{M}$ **die starke Markov Eigenschaft erfüllt**, falls für jede endliche $(\mathcal{F}_t)$-Stopzeit $S$ gilt:

$$P_x\left(X_{t+S} \in A \mid \mathcal{F}_S\right) = P_{X_S}\left(X_t \in A\right) \quad P_x\text{-f.s.} \tag{2.2}$$

**Satz 2.24.** Es sei $\mathbb{M} = ((B_t)_{t\geq 0},(P_x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ d-dimensionale $\mathbb{F}$-Brownsche Familie auf $(\Omega,\mathcal{F})$, $\mathbb{F}$ rechtsstetig. Dann erfüllt $\mathbb{M}$ die starke Markov Eigenschaft.

Der Beweis des Satzes ist mit Hilfe des folgenden Lemmas ganz analog zum Beweis der (einfachen) Markoveigenschaft einer $\mathbb{F}$-Brownschen Familie in Satz 2.22.

**Lemma 2.25.** Es sei $S$ eine endliche $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit. Dann gilt $B_{S+t} - B_S$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_S$ für alle $t > 0$.

*Beweis.* Approximiere $S$ durch

$$S_n := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} 1_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq S < \frac{k}{2^n}\}} \downarrow S$$

Dann ist $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_{S_n}$ und für $\Gamma \in \mathcal{F}_S$, $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$, folgt

$$\begin{aligned} E(f(B_{S+t} - B_S)1_\Gamma) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E(f(B_{\frac{k}{2^n}+t} - B_{\frac{k}{2^n}})1_{\underbrace{\{\frac{k-1}{2^n} \leq S < \frac{k}{2^n}\}\cap\Gamma}_{\in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}}}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E(f(B_{\frac{k}{2^n}+t} - B_{\frac{k}{2^n}}))E(1_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq S < \frac{k}{2^n}\}} \cap \Gamma) \\ &= E(f(B_t))E(1_\Gamma) \end{aligned}$$

$\square$

**Satz 2.26.** ($0-1$-Gesetz von Blumenthal) Es sei $((X_t)_{t\geq 0}, (P_x)_{x\in\mathbb{R}^d})$ starker Markovprozess bzgl. rechtsstetiger Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Es sei $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(\{X_s \mid s \in [0,t]\})$. Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}^d$ $P_x = 0-1$ auf $\mathcal{F}_{0+}^0 := \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t^0$ ($\subseteq \mathcal{F}_0$ !).

*Beweis.* Für alle endlichen Stoppzeiten $S$ gilt

$$P_x(X_{S+t} \in A|\mathcal{F}_S) = P_{X_S}(X_t \in A) \quad P_x\text{-f.s.}$$

Durch Iteration folgt hieraus für

$$0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \text{ und } A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

$$P_x(X_{S+t_1} \in A_1, \ldots, X_{S+t_n} A|\mathcal{F}_S) = P_{X_S}(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n) \quad P_x\text{-f.s.}$$

Anwendung auf die det. Stoppzeit $S = 0$ ergibt insbesondere, dass $P_x(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n|\mathcal{F}_{0+})$ eine $\mathcal{F}_0^0$-messbare Version besitzt.

Wir betrachten nun das Mengensystem

$$\mathcal{A} := \{\Gamma \in \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t^0 \mid E_x(\Gamma \mid \mathcal{F}_{0+}) \text{ hat } \mathcal{F}_0^0\text{-messbare Version}\}$$

$\mathcal{A}$ ist eine $\sigma$-Algebra, die alle Zylindermengen $\Gamma$ der Form $\Gamma = \{X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n}\}$ enthält. Folglich ist $\mathcal{A} = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t^0$.

Es sei nun $\Gamma \in \mathcal{F}_{0+}$. Dann folgt $E_x(1_\Gamma \mid \mathcal{F}_{0+}) = F(X_0)$ für eine $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-messbare Funktion $F$. Da $P_x(X_0 = x) = 1$ folgt

$$P_x(\Gamma) = E_x(E_x(1_\Gamma|\mathcal{F}_{0+})) = E_x(F(X_0)) = F(x)$$

und damit

$$\begin{aligned} F(x) = P_x(\Gamma) &= E_x(1_\Gamma) = E_x(1_\Gamma E_x(1_\Gamma|\mathcal{F}_{0+})) \\ &= E_x(1_\Gamma F(X_0)) = E_x(1_\Gamma)F(x) = F(x)^2 \,, \end{aligned}$$

also $F(x) = 0 - 1$. $\square$

*Beispiel* 2.27. Es sei $(B_t)$ d-dimensionale Brownsche Bewegung. Betrachte für $D \subseteq \mathbb{R}^d$ die erste Trefferzeit von $D^c$

$$S_{D^c} = \inf\{t > 0 \mid B_t \in D^c\}\,.$$

Dann gilt $\{S_{D^c} = 0\} \in \mathcal{F}^0_{0+}$, also $P_x(S_{D^c} = 0) = 0 - 1$.

Ein Randpunkt $x \in \partial D$ heißt **regulär**, falls $P_x(S_{D^c} = 0) = 1$, andernfalls **irregulär**.

# 3 Itô-Kalkül

## 3.1 Lebesgue-Stieltjes Integration

Zur Erinnerung: Für eine reellwertige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir ihre Variation

$$\mathrm{Var}_{[a,b]} f := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b \right\} .$$

**Beachte** Ist $f$ monoton wachsend auf $[a, b]$, so ist $\mathrm{Var}_{[a,b]} f = f(b) - f(a)$

**Satz 3.1.** (Hahn-Jordanscher Zerlegungssatz) Äquivalent sind:

(i) $f$ von beschränkter Variation (dh $\mathrm{Var}_{[a,b]} f < \infty \; \forall a < b$)

(ii) $f = f_+ - f_-$ mit $f_\pm$ monoton wachsend.

Es folgt: Ist $f$ monoton wachsend und rechtsseitig stetig, so gibt es ein Maß $\mu_f$ auf $\mathbb{R}$ mit

$$\mu_f(]u, v]) = f(v) - f(u) . \tag{3.1}$$

Zusammen mit dem Hahn-Jordanschen Zerlegungssatz 3.1 ergibt sich: Ist $f$ von beschränkter Variation, so existiert ein signiertes Maß $\mu_f := \mu_{f_+} - \mu_{f_-}$ mit (3.1).

**Satz 3.2. Rieszscher Darstellungssatz** Die Abbildung

$$f \mapsto \mu_f$$

$$\{f \mid f \text{ von beschränkter Variation, rechtsstetig } f(0) = 0\}$$
$$\to \{\mu \mid \mu \text{ signiertes, lokal-endliches Maß auf } \mathbb{R}\}$$

ist bijektiv.

Für $f = f_+ - f_-$ wie in Satz 3.2 ist das Lebesgue-Stieltjes Integral definiert durch

$$\int_{\mathbb{R}} gdf := \int_{\mathbb{R}} gd\mu_f := \int_{\mathbb{R}} gd\mu_{f_+} - \int_{\mathbb{R}} gd\mu_{f_-}$$

*Beispiel* 3.3. $f(t) = t$, also $\mu_f(dt) = dt =$ Lebesguemaß
$f(t) = t^2$, also $\mu_f(dt) = 2tdt$, denn

$$\int_a^b \mu_f(dt) = b^2 - a^2 = 2 \int_a^b t \, dt .$$

Allgemein gilt: Ist $f$ (stetig) differenzierbar, so gilt $\mu_f(dt) = f'(t) \, dt$, oder in **infinitesimaler Schreibweise**

$$df = f' \, dt .$$

## 3.2 Itô-Formel

Im ganzen Abschnitt sei $X : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine **stetige, deterministische** Funktion. Weiterhin existiere eine Folge $(\tau_n)_{n\geq 1}$ von Zerlegungen von $[0,\infty)$ mit $|\tau_n| \to 0$, so dass die **quadratische Variation von $X$ entlang $\tau_n$**

$$\langle X\rangle_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i\in\tau_n\\ t_{i+1}\leq t}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \qquad \forall t\geq 0. \tag{3.2}$$

existiert und $t \mapsto \langle X\rangle_t$ stetig ist auf $[0,\infty)$.
**Beispiel:** $X$ typischer Pfad eines stetigen lokalen Martingals, zB Brownsche Bewegung.

*Bemerkung* 3.4. (i) Ist $X$ von beschränkter Variation, so folgt $\langle X\rangle = 0$, denn

$$\sum_{\substack{t_i\in\tau_n\\ t_{i+1}\leq t}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \leq \underbrace{\max_{\substack{t_i\in\tau_n\\ t_{i+1}\leq t}} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|}_{\to 0 \text{ da } X \text{ glm. stetig auf } [0,t]} \cdot \underbrace{\sum_{\substack{t_i\in\tau_n\\ t_{i+1}\leq t}} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|}_{\leq \mathrm{Var}_{[0,t]} X}$$

(ii) Da $\langle X\rangle_t$ monoton wachsend, stetig und $\langle X\rangle_0 = 0$, kann $\langle X\rangle_t$ als Verteilungsfunktion eines Maßes $\mu_{\langle X\rangle} = d\langle X\rangle$ auf $[0,\infty)$ aufgefasst werden. Weiterhin gilt nach Annahme für alle stetigen $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{\substack{t_i\in\tau_n\\ t_{i+1}\leq t}} f(t_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2}_{=\int_0^t f d\mu_n} = \int_0^t f d\langle X\rangle$$

wobei

$$\mu_n = \sum_{t_i\in\tau_n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2\,\delta_{t_i}\,,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu_{\langle X\rangle} \text{ schwach auf } [0,t]\,\forall t\,.$$

**Satz 3.5.** (Pfadweise Itô-Formel) Es sei $F \in C^2(\mathbb{R})$ und $t\geq 0$. Dann gilt die Itô-Formel

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t F'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,d\langle X\rangle_s\,, \tag{3.3}$$

wobei

$$\int_0^t F'(X_s)\,dX_s := \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{\substack{t_i\in\tau_n\\ t_{i+1}\leq t}} F'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})}_{(\tau_n)_{n\geq 1}\text{-abhängig !}}\,.$$

$\int_0^t F'(X_s)\,dX_s$ heißt **Itô-Integral**. Alternative Schreibweise der Itô-Formel (3.3) in infinitesimaler Form:

$$dF(X_t) = F'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}F''(X_t)\,d\langle X\rangle_t\,.$$

*Beweis.* Es sei $t_i \in \tau_n$ fest gewählt. Eine Taylor-Entwicklung von $F$ in $X_{t_i}$ ergibt

$$\begin{aligned} F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i}) = F'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \frac{1}{2}F''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \\ + \underbrace{\frac{1}{2}(F''(X_{t_i} + \Theta_i^n(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) - F''(X_{t_i}))(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2}_{<\varepsilon \text{ glm. in } t_i, \text{ da } F'' \text{ glm. stetig auf } X([0,t+|\tau_n|]) \text{ !}} \end{aligned}$$

Aufsummieren über $t_i \in \tau_n$ mit $t_{i+1} \leq t$ ergibt

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \leq t}} F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i})}_{\substack{\to F(X_t) - F(X_0) \\ \text{für } n \to \infty}} = \sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \leq t}} F'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \underbrace{\sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \leq t}} \frac{1}{2}F''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})}_{\substack{\to \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,d\langle X\rangle_s \\ \text{für } n \to \infty}} \\ + R_n \end{aligned}$$

mit dem Restglied

$$R_n = \sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \leq t}} \frac{1}{2}(F''(X_{t_i} + \Theta_i^n(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) - F''(X_{t_i}))(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

und der zugehörigen Restgliedabschätzung

$$|R_n| \leq \varepsilon \sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \leq t}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \varepsilon \langle X \rangle_t \,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig folgt zunächst

$$\exists \lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \leq t}} F'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) =: \int_0^t F'(X_s)\,dX_s$$

und schließlich die Itô-Formel (3.3). □

*Bemerkung* 3.6. Klassischer Fall: $\langle X \rangle \equiv 0$. Dann gilt

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t F'(X_s)\,dX_s \text{ (Hauptsatz der Diff.- und Integralrechng.)} \tag{3.4}$$

infinitesimale Schreibweise:

$$dF(X) = F'(X)\,dX$$

Im Falle $\langle X \rangle \not\equiv 0$ müssen wir (3.4) um den **Itô-Korrekturterm** $\frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,d\langle X \rangle_s$ ergänzen:
infinitesimale Schreibweise:

$$dF(X) = F'(X)\,dX + \frac{1}{2}F''(X)\,d\langle X \rangle$$

Klar ist nach Satz 3.5 insbesondere, dass für $f \in C^1(\mathbb{R})$ das Itô-Integral $\int_0^t f(X_s)\,dX_s$ wohldefiniert ist.

Alternativen zur Definition des Itô-Integrals: für jedes $\alpha \in [0,1]$ ist das $\alpha$-Integral $\alpha - \int_0^t f(X_s)\ dX_s$ definiert durch

$$\alpha - \int_0^t f(X_s) dX_s := \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \leq t}} f(X_{t_i} + \alpha(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) \cdot (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

Die Existenz ergibt sich wie im Falle des Itô-Integrals $\alpha = 0$. Es gilt:

$$\alpha - \int_0^t f(X_s)\,dX_s = \int_0^t f(X_s)\,dX_s + \alpha \int_0^t f'(X_s)\,d\langle X\rangle_s$$

**Spezialfälle:**

$\alpha = 0$ Itô-Integral (wesentliche Eigenschaft: Diese Wahl erhält die Martingaleigenschaft !)

$\alpha = 1$ Rückwärts Itô-Integral

$\alpha = \frac{1}{2}$ Stratonovich-Integral (wesentliche Eigenschaft: erhält die Kettenregel $dF(X) = F'(X)\,dX$)

**Lemma 3.7.** (i) Es sei $F \in C^1(\mathbb{R})$. Dann folgt $\langle F(X)\rangle_t = \int_0^t (F'(X_s))^2\,d\langle X\rangle_s$. Insbesondere ist die quadratische Variation $\langle F(X)\rangle$ entlang $(\tau_n)_{n\geq 1}$ wieder stetig.

(ii) Ist $M_t = X_t + A_t$, $t \geq 0$ mit $t \mapsto A_t$ stetig und $\langle A\rangle \equiv 0$, so folgt $\langle M\rangle = \langle X\rangle$.

(iii) Das Itô-Integral $M_t := \int_0^t f(X_s)\,dX_s$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, hat quadratische Variation

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t (f(X_s))^2\,d\langle X\rangle_s\,.$$

*Beweis.* (i) Eine Taylorentwicklung von $F$ in $X_{t_i}$ ergibt

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \leq t}} \left(F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i})\right)^2 &= \sum (F'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}))^2 \\ &\quad + \sum \left(F'(X_{t_i} + \Theta_i^n(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) - F'(X_{t_i})\right)^2 (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \\ &\quad + 2\sum \text{ gemischte Terme } =: I + II + III.\end{aligned}$$

Für Term $I$ folgt nach (3.2) $I \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^t (F'(X_s))^2\,d\langle X\rangle_s$. Für Term $II$ gilt die Abschätzung

$$II \leq \varepsilon^2 \cdot \sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \underset{n\to\infty}{\to} \varepsilon^2 \langle X\rangle_t \quad \forall \varepsilon > 0\,,$$

also $\lim_{n\to\infty} II = 0$. Schließlich ergibt sich durch Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung auf den Term $III$

$$|III| \leq 2 I^{\frac{1}{2}} II^{\frac{1}{2}} \to 0\,, n \to \infty\,,$$

woraus die Behauptung folgt.

(ii) Analog zum Beweis von Teil (i) haben wir

$$\begin{aligned}\sum(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2 &= \sum(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2+\\ &\quad+\sum(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})^2+2\sum(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})\\ &=: I+II+III.\end{aligned}$$

Wie in Teil (i) gilt: $II \to 0$, $|III| \le 2I^{\frac{1}{2}}II^{\frac{1}{2}} \to 0$ und $I \to \langle X\rangle_t$ für $n \to \infty$.

(iii) Es sei $F$ eine Stammfunktion von $f$. Dann gilt

$$M_t = \int_0^t f(X_s)dX_s = F(X_t) - F(X_0) - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t f'(X_s)\,d\langle X\rangle_s}_{=A_t}$$

und hieraus folgt schließlich mit Hilfe von Teil (ii) und Teil (i)

$$\langle M\rangle_t \overset{(ii)}{=} \langle F(X.) - F(X_0)\rangle_t \overset{(i)}{=} \int_0^t (f(X_s))^2\,d\langle X\rangle_s\,.$$

□

## 3.3 $d$-dimensionale Itô-Formel und Kovariation

Im gesamten Abschnitt sei $X, Y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig, mit stetiger quadratischer Variation $\langle X\rangle, \langle Y\rangle$ entlang einer **gemeinsamen** Folge von Zerlegungen $(\tau_n)_{n\ge1}$.

Analog zum Fall der quadratischen Variation, definieren wir die **Kovariation von $X$ und $Y$ (entlang $(\tau_n)_{n\ge1}$)** durch

$$\langle X, Y\rangle_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i\in\tau_n\\ t_{i+1}\le t}} (X_{t_{i+1}}-X_{t_i})(Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})$$

falls der Grenzwert existiert.

**Lemma 3.8.** Äquivalent sind:

(i) $\langle X, Y\rangle$ existiert und ist stetig.

(ii) $\langle X+Y\rangle$ existiert und ist stetig.

In diesem Falle gilt

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle X+Y\rangle - \langle X\rangle - \langle Y\rangle\right) \qquad \text{(Polarisationsidentität)}\,.$$

Insbesondere ist $\langle X, Y\rangle$ die Verteilungsfunktion eines signierten Maßes

$$d\langle X, Y\rangle_s = \frac{1}{2}\left(d\langle X+Y\rangle_s - d\langle X\rangle_s - d\langle Y\rangle_s\right)$$

und es gilt $|\langle X, Y\rangle| \le \langle X\rangle^{\frac{1}{2}}\langle Y\rangle^{\frac{1}{2}}$.

*Beispiel* 3.9. (i) $(X_t)$, $(Y_t)$ unabhängige (stetige) Brownsche Bewegungen. Dann existiert die Kovariation $\langle X, Y\rangle$ $P$-f.s. und es gilt

$$\langle X, Y\rangle \equiv 0 \text{ P-f.s.}$$

denn $Z_t := \frac{1}{\sqrt{2}}(X_t + Y_t)$ ist wieder eine (stetige) Brownsche Bewegung, also existiert die quadratische Variation $\langle Z\rangle$ und es gilt $\langle Z\rangle_t = t$. Insbesondere existiert auch die quadratische Variation $\langle X + Y\rangle$ und es gilt $\langle X + Y\rangle_t = 2\langle Z\rangle_t = 2t$. Folglich

$$\langle X, Y\rangle_t = \frac{1}{2}(\langle X + Y\rangle_t - \langle X\rangle_t - \langle Y\rangle_t) = 0\,.$$

(ii) Es seien $f,\, g \in C^1(\mathbb{R})$, $Y_t := \int_0^t f(X_s)\,dX_s$ und $Z_t := \int_0^t g(X_s)\,dX_s$. Dann existiert die Kovariation $\langle Y, Z\rangle$ und es gilt

$$\langle Y, Z\rangle_t = \int_0^t f(X_s) g(X_s)\, d\langle X\rangle_s\,.$$

Begründung: Da $(Y + Z)_t = \int_0^t (f + g)(X_s)\,dX_s$, existiert die quadratische Variation von $\langle Y + Z\rangle$ von $Y + Z$ und es gilt

$$\langle Y + Z\rangle_t = \langle \int_0^\cdot (f + g)(X_s)\,dX_s\rangle_t = \int_0^t (f + g)^2(X_s)\,d\langle X\rangle_s\,.$$

**Satz 3.10.** (Itô's Produktregel) Es seien $X$ und $Y$ wie oben. Die Kovariation $\langle X, Y\rangle$ existiere entlang der gemeinsamen Folge $(\tau_n)_{n\geq 1}$ von Zerlegungen und sei stetig. Falls

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i\in\tau_n\\ t_{i+1}\leq t}} X_{t_i}(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) =: \int_0^t X_s dY_s$$

oder

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i\in\tau_n\\ t_{i+1}\leq t}} Y_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) =: \int_0^t Y_s dX_s$$

so gilt: beide Limiten existieren und es gilt die Produktregel

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t.$$

*Beweis.* Nach Annahme existiert die quadratische Variation $\langle X + Y\rangle$ und ist stetig. Wegen $X_tY_t = \frac{1}{2}\{(X_t + Y_t)^2 - X_t^2 - Y_t^2\}$ folgt aus der Itô-Formel

$$\begin{aligned} X_tY_t = X_0Y_0 &+ \int_0^t (X + Y)_s d(X + Y)_s - \int_0^t X_s dX_s - \int_0^t Y_s dY_s \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t d\langle X + Y\rangle_s - \frac{1}{2}\int_0^t d\langle X\rangle_s - \frac{1}{2}\int_0^t d\langle Y\rangle_s}_{=\frac{1}{2}(\langle X+Y\rangle_s - \langle X\rangle_t - \langle Y\rangle_t) = \langle X,Y\rangle_t} \end{aligned} \tag{3.5}$$

wobei

$$\int_0^t (X+Y)_s \, d(X+Y)_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i\in\tau_n\\ t_{i+1}\le t}} (X_{t_i}+Y_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}+Y_{t_{i+1}}-Y_{t_i})$$

$$\overset{\text{nach Annahme (!)}}{=} \int_0^t X_s \, dX_s + \int_0^t Y_s \, dY_s + \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s \,.$$

Einsetzen in (3.5) ergibt die Behauptung. □

*Beispiel* 3.11. **Wiener-Paley Konstruktion des stochastischen Integrals**
$Y$ von beschränkter Variation, also $\langle Y\rangle \equiv 0$. Dann folgt $\langle X, Y\rangle \equiv 0$ und damit

$$\int_0^t Y_s \, dX_s = \underbrace{-\int_0^t X_s \, dY_s}_{\text{Lebesgue-Stieltjes Integral}} + X_t Y_t - X_0 Y_0$$

Wir können also in diesem Falle das Integral bzgl. $dX_s$ auf der linken Seite durch das Lebesgue-Stieltjes Integral auf der rechten Seite definieren. Dies ist der ursprüngliche Ansatz von Wiener-Paley zur stochastischen Integration:

$X = X(\omega)$ = typischer Brownscher Pfad

$Y = h$ Funktion von beschränkter Variation mit $h(1) = 0$

Definiere dann

$$\int_0^t h(s) \, dX_s(\omega) := -\int_0^t X_s(\omega) dh(s) \,.$$

Anschließend zeigt man die folgende **Wiener-Itô Isometrie**

$$E\left(\left(\int_0^1 h(s)\, dX_s\right)^2\right) = \int_0^1 h(s)^2 \, ds$$

zwischen den beiden Hilberträumen $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $L^2([0,1], ds)$ und erweitert die Definition des stochastischen Integrals $\int_0^t h(s)\, dX_s$ mithilfe dieser Isometrie auf den Abschluss des Unterraumes aller Funktionen $h$ wie oben in $L^2([0,1], ds)$ (siehe Übungen).

Für den Rest dieses Abschnittes sei

$$X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^d) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$$

stetig und es existiere sowohl die quadratischen Variationen $\langle X^i\rangle$ als auch alle Kovariationen $\langle X^i, X^j\rangle$ entlang einer **gemeinsamen** Folge von Zerlegungen $(\tau_n)_{n\ge 1}$ und diese seien stetig.

**Satz 3.12. ($d$-dim Itô-Formel)** Es sei $F \in C^2(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t \langle F'(X_s), dX_s\rangle + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\, d\langle X^i, X^j\rangle_s \,, \tag{3.6}$$

wobei

$$\int_0^t \langle F'(X_s), dX_s\rangle := \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i\in\tau_n\\ t_{i+1}\le t}} \langle F'(X_{t_i}), X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\rangle \,.$$

*Beweis.* Analog zum Fall $d = 1$ ergibt eine Taylorentwicklung von $F$ in $X_{t_i}$ für $t_i \in \tau_n$

$$\underbrace{\sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \le t}} F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i})}_{\underset{n\to\infty}{\to} F(X_t) - F(X_0)} = \sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \le t}} \langle F'(X_{t_i}), X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \rangle$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \le t}} \langle F''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}), (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \rangle + R_n$$

mit

$$F''(X_{t_i}) = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_{t_i}) \right)_{1 \le i,j \le d}$$

und dem Restglied

$$R_n = \frac{1}{2} \sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \le t}} \langle (F''(X_{t_i} + \Theta_i^n (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) - F''(X_{t_i}))(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}), (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \rangle \,.$$

Wie im Beweis der 1-dim Itô-Formel zeigt man auch in diesem Falle $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, woraus die Behauptung folgt. □

Analog zu Fall $d = 1$ (Lemma 3.7) gilt:

**Lemma 3.13.** (i) Es sei $F \in C^1(\mathbb{R}^d)$. Dann existiert die quadratische Variation $\langle F(X) \rangle$ und es gilt

$$\langle F(X) \rangle_t = \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) \frac{\partial F}{\partial x_j}(X_s) \, d\langle X^i, X^j \rangle_s \,.$$

(ii) Es sei $F \in C^1(\mathbb{R}^d)$. Dann existiert die quadratische Variation $\langle \int_0^\cdot \langle F'(X_s), dX_s \rangle \rangle$ und es gilt

$$\langle \int_0^\cdot \langle F'(X_s), dX_s \rangle \rangle_t = \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) \frac{\partial F}{\partial x_j}(X_s) \, d\langle X^i, X^j \rangle_s \,.$$

*Beweis.* (i)

$$\sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \le t}} (F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i}))^2 = \sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \le t}} \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_{t_i})(X^i_{t_{i+1}} - X^i_{t_i}) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j}(X_{t_i})(X^j_{t_{i+1}} - X^j_{t_i})$$
$$+ \sum_{\substack{t_i \in \tau_n \\ t_{i+1} \le t}} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_{t_i} + \Theta_i^n (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) - \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_{t_i}) \right) (X^i_{t_{i+1}} - X^i_{t_i}) \cdot$$
$$\underbrace{\cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x_j}(X_{t_i} + \Theta_i^n (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) - \frac{\partial F}{\partial x_j}(X_{t_i}) \right) (X^j_{t_{i+1}} - X^j_{t_i})}_{|\cdot| < \varepsilon \langle X^i \rangle_t^{\frac{1}{2}} \langle X^j \rangle_t^{\frac{1}{2}} \text{ für } n \text{ groß}} \,.$$

Der erste Summand schließlich konvergiert für $n \to \infty$ gegen

$$\int_0^t \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s)\frac{\partial F}{\partial x_j}(X_s)\, d\langle X^i, X^j\rangle_s\,.$$

(ii) Die $d$-dimensionale Itô-Formel und Lemma 3.7 (ii) implizieren

$$\langle \int_0^{\cdot} \langle F'(X_s), dX_s\rangle\rangle_t = \langle F(X_.) - F(X_0)\rangle_t\,.$$

□

**Spezialfall:**
$(X_t)_{t\geq 0}$ $d$-dimensionale stetige Brownsche Bewegung. Dann sind die Komponenten $(X_t^i)_{t\geq 0}$ unabhängige $1$-dimensionale Brownsche Bewegungen. Insbesondere existieren alle quadratischen Variationen und Kovariationen und es gilt

$$\langle X^i, X^j\rangle_t(\omega) = \delta_{ij}\cdot t \quad P\text{-f.s.}$$

In diesem Falle hat die Itô-Formel folgende Gestalt:

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t \langle F'(X_s), dX_s\rangle + \frac{1}{2}\int_0^t (\Delta F)(X_s)\, ds$$

wobei

$$\Delta F(x) := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) \quad \textbf{Laplace-Operator}\,.$$

**Satz 3.14.** **(zeitabhängige Itô-Formel)** Es sei $X : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit stetiger quadratischer Variation $\langle X\rangle$ entlang einer Folge $(\tau_n)_{n\geq 1}$ von Zerlegungen. Dann gilt für $F(t,x) \in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R})$

$$F(\langle X\rangle_t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(\langle X\rangle_s, X_s)\, dX_s + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(\langle X\rangle_s, X_s)\, d\langle X\rangle_s\,,$$

wobei

$$\int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(\langle X\rangle_s, X_s)\, dX_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i\in\tau_n\\ t_{i+1}\leq t}} \frac{\partial F}{\partial x}(\langle X\rangle_{t_i}, X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\,.$$

In infinitesimaler Schreibweise:

$$dF(\langle X\rangle_t, X_t) = \frac{\partial F}{\partial x}(\langle X\rangle_t, X_t)\, dX_t + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(\langle X\rangle_t, X_t)\, d\langle X\rangle_t\,.$$

*Beweis.* folgt aus Satz 3.12 angewandt auf $(\langle X\rangle_t, X_t)$. □

## 3.4 Itô-Integrale als lokale Martingale

Im ganzen Abschnitt sei $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, weiterhin sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine rechtsstetige Filtration und $(X_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}^0$ ein stetiges lokales Martingal (bis $T$ für eine Stoppzeit $T$). Insbesondere existiert nach Theorem 1.61 die quadratische Variation $\langle X\rangle$ und ist stetig $P$-f.s. entlang einer beliebigen Folge von Zerlegungen $(\tau_n)_{n\geq 1}$.

**Satz 3.15.** Es sei $f \in C^1([0,\infty)\times G)$, $G \subseteq \mathbb{R}^1$ offen, $X_0 \in K \subseteq G$ $P$-f.s. für eine kompakte Teilmenge $K \subseteq G$. Dann ist das Itô-Integral

$$M_t = \int_0^t f(\langle X\rangle_s, X_s)\, dX_s$$

ein stetiges lokales Martingal bis zur ersten Austrittszeit aus $G$

$$T_{G^c} := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin G\} \wedge T$$

*Beweis.* **1. Schritt** Wir nehmen zunächst an, dass $T \equiv \infty$, $X$ beschränkt, $G = \mathbb{R}^1$, und $f$ beschränkt sind. Dann ist das Itô-Integral $M_t$ für alle $t \geq 0$ definiert und die erste Austrittszeit $T_{G^c} \equiv \infty$. Wir haben zu zeigen, dass $(M_t)_{t\geq 0}$ ein (stetiges) Martingal ist. Betrachte dazu die Folge der Riemannsummen

$$M_t^n := \sum_{t_i \in \tau_n} f(\langle X\rangle_{t_i}, X_{t_i})(X_{t_{i+1}\wedge t} - X_{t_i\wedge t})\,.$$

Offensichtlich ist für alle $n$ $(M_t^n)_{t\geq 0}$ ein stetiges $(\mathcal{F}_t)$-Martingal (Martingaltransformation durch Previsible!). Für den Beweis von Schritt 1 reicht es nun aus zu zeigen, dass $M_t^n \to M_t$ in $\mathcal{L}^1(P)$. Wir wissen bereits aus dem Beweis der zeitabhängigen Itô-Formel, dass $M_t^n \to M_t$ $P$-f.s., also reicht gleichgradige Integrierbarkeit von $(M_t^n)_{n\geq 1}$ (zB Beschränktheit in $\mathcal{L}^2(P)$). Dies folgt jedoch aus

$$\begin{aligned} E((M_t^n)^2) &\overset{\substack{\text{gemischte Terme} = 0 \\ \text{wg. Martingaleigenschaft}}}{=} \sum_{t_i\in\tau_n} E(f(\langle X\rangle_{t_i}), X_{t_i})^2 (X_{t_{i+1}\wedge t} - X_{t_i\wedge t})^2) \\ &\leq (\sup f)^2 \sum_{\substack{t_i\in\tau_n \\ t_{i+1}\leq t}} \underbrace{E((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2)}_{=E(X_{t_{i+1}}^2 - X_{t_i}^2)\,!} \leq (\sup f)^2\, E(X_t^2)\,. \end{aligned}$$

**2. Schritt: Lokalisierung** Es sei

$(T_n)$ lokalisierende Folge für $X$

$\tilde{T}_n := \inf\{t > 0 \mid \langle X\rangle_t > n\}$

$S_n := T_n \wedge T_{G_n^c} \wedge \tilde{T}_n$ mit $K \subseteq G_n \subseteq G_{n+1} \subseteq G$ rel. kompakt und $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$.

Dann folgt $S_n \uparrow T \wedge T_{G^c}$ und $(X_{t\wedge S_n})$ ist für alle $n$ ein beschränktes Martingal, da $X_{t\wedge S_n} \in G_n$. Nach Schritt 1 ist

$$\begin{aligned} M_{t\wedge S_n} &= \int_0^t f(\langle X\rangle_{s\wedge S_n}, X_{s\wedge S_n})\, dX_{s\wedge S_n} \\ &= \int_0^{t\wedge S_n} f(\langle X\rangle_s, X_s)\, dX_s\,, \quad t \geq 0\,, \end{aligned}$$

für alle $n \geq 1$ ein Martingal, woraus die Behauptung folgt. □

Die Aussage des folgenden Korollars hatten wir im Spezialfall beschränkter Variation bereits in Kapitel 1 bewiesen (siehe Theorem 1.54 und Bemerkung 1.55). Hier nun ein alternativer Beweis mithilfe der Itô-Formel:

**Korollar 3.16.** Es sei $X$ stetiges lokales Martingal bis $T$ mit $\langle X\rangle \equiv 0$. Dann ist $t \mapsto X_t(\omega)$ konstant auf $[0, T(\omega))$ $P$-f.s.

*Beweis.* Aus der Itô-Formel folgt:

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \underbrace{\int_0^t X_s dX_s}_{\text{lokales Martingal}} \text{ auf } \{t < T\}.$$

Also ist $X_t^2$ selber wieder ein lokales Martingal bis $T$. Sei $(T_n)$ eine lokalisierende Folge. Dann gilt

$$E((X_{t\wedge T_n} - X_0)^2) = E(X_{t\wedge T_n}^2 - X_0^2) = 0 \quad \forall t, n$$

also $P(X_{t\wedge T_n} = X_0 \quad \forall t \in \mathbb{Q}_+, \forall n) = 1$, und damit schließlich

$$P(X_t = X_0 \quad \forall t \in [0, T)) = 1\,.$$

□

Schließlich formulieren wir noch die multivariate Version von Satz 3.15:

**Satz 3.17.** Es sei $X = (X^1, \ldots, X^d)$ mit $X^i$ stetige lokale Martingale bis $T$. Weiter sei $F \in C^2(G)$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $X_0 \in K \subseteq G$, $K$ kompakt. Dann ist

$$M_t = \int_0^t \langle F'(X_s), dX_s\rangle$$

ein stetiges lokales Martingal bis $T_{G^c} = \inf\{t > 0 \mid X_t \notin G\} \wedge T$.

Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 3.15.

## 3.5 Brownsche Bewegung und Randwertprobleme

Im gesamten Abschnit bezeichne $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

**Stochastische Lösung des Dirichlet-Problems**

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, relativ kompakt

gegeben: $f \in C(\partial D)$

gesucht: $h \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ mit

$$\begin{aligned} \Delta h &= 0 \quad \text{auf } D \qquad \text{"harmonisch"} \\ h &= f \quad \text{auf } \partial D\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

**Satz 3.18.** Es sei $h$ Lösung von (3.7). Dann gilt

$$h(x) = E_x(f(X_{T_{D^c}}))\,, x \in D$$

wobei

$$T_{D^c} = \inf\{t > 0 \mid X_t \notin D\} = \text{ erste Austrittszeit der BB aus } D.$$

*Beweis.* Eine Anwendung der Itô-Formel ergibt für $t < T_{D^c}(\omega)$

$$h(X_t(\omega)) = h(X_0(\omega)) + \underbrace{\int_0^t \langle h'(X_s(\omega)), dX_s(\omega)\rangle}_{=:M_t^h(\omega)} .$$

Also ist $(M_t^h)$ lokales Martingal bis $T_{D^c}$. Im folgenden sei $(D_n)$ eine Ausschöpfung von $D$ mit relativ kompakten Mengen und $T_{D_n^c}$ die erste Austrittszeit der Brownschen Bewegung aus $D_n$. Dann folgt

$$\begin{aligned} E_x\left(\langle M^h\rangle_{T_{D_n^c}}\right) &= E_x\left(\int_0^{T_{D_n^c}} \|h'(X_s)\|^2\, ds\right) \\ &\leq const \cdot \underbrace{E_x(T_{D_n^c})}_{<\infty}, \end{aligned}$$

da $D_n$ beschränkte Menge.

Es folgt dass $E_x(M^h_{T_{D_n^c}}) = E_x(M_0) = 0$ und damit

$$E_x(h(X_{T_{D_n^c}})) = E_x(h(X_0)) = h(x)\,.$$

Für $n \to \infty$ folgt $X_{T_{D_n^c}} \to X_{T_{D^c}}$ und damit $E_x\left(h(X_{T_{D_n^c}})\right) \to E_x\left(h(X_{T_{D^c}})\right)$. $\square$

Umgekehrt gilt:

**Satz 3.19.** Ist $f$ messbar und beschränkt auf $\partial D$, so ist

$$h(x) = E_x(f(X_{T_D^c}))\,, x \in D\,,$$

eine "verallgemeinerte Lösung" des Dirichlet-Problems, d.h. es gilt:

$\Delta h = 0$ auf $D$

$\lim_{t\uparrow T_D^c} h(X_t) = f(X_{T_D^c}) \quad P_x - f.s. \quad \forall x \in D$.

(ohne Beweis)

Wir wenden Satz 3.18 an, um im folgenden Rekurrenz und Transienz der Brownschen Bewegung zu diskutieren. Zunächst betrachten wir dazu für $0 < r < R$ den offenen Kreisring

$$K_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid r < \|x\| < R\}$$

mit zugehöriger Austrittszeit

$$T_{r,R} = T_{K^c_{r,R}} = \inf\{t \geq 0 \mid \|X_t\| = r \text{ oder } \|X_t\| = R\}$$

und geben uns hierauf folgende Randwerte vor:

$$f = \begin{cases} 1 & \text{auf } \|x\| = r \\ 0 & \text{auf } \|x\| = R\,. \end{cases}$$

Dann ist eine klassische Lösung des Dirichlet-Problems gegeben durch

$$h(x) = \frac{\varphi_d(\|x\|) - \varphi_d(R)}{\varphi_d(r) - \varphi_d(R)}$$

mit

$$\varphi_d(\rho) = \begin{cases} \rho & \text{in } d = 1 \\ -\log \rho & \text{in } d = 2 \\ \rho^{2-d} & \text{in } d \geq 3 \,. \end{cases}$$

(Übung!). Folglich gilt

$$P_x(\|X_{T_{r,R}}\| = r) = E_x(f(X_{T_{r,R}})) = h(x) = \frac{\varphi_d(\|x\|) - \varphi_d(R)}{\varphi_d(r) - \varphi_d(R)}$$

**Korollar 3.20.** Es sei $d \geq 2$. Dann ist jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ **polar**, d.h.

$$P_y(S_{\{x\}} < \infty) = 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^d \,,$$

wobei

$$S_x := \inf\{t > 0 \mid X_t \in \{x\}\}$$

die erste Rückkehrzeit nach $x$ bezeichnet.

*Beweis.* oBdA sei $x = 0$
**1. Fall** $y \neq 0$: In diesem Falle gilt

$$P_y(S_{\{0\}} < \infty) = P_y\left(\exists\, R > 0 \text{ mit } \|X_{T_{r,R}}\| = r \,\forall r > 0\right) \,.$$

Für $R > 0$ fest gilt jedoch

$$P_y\left(\|X_{T_{r,R}}\| = r \,\forall r > 0\right) \leq \limsup_{r \downarrow 0} P_y\left(\|X_{T_{r,R}}\| = r\right) = 0$$

(siehe explizite Formel).

**2. Fall** $y = 0$: In diesem Falle gilt

$$\begin{aligned} P_0(S_{\{0\}} < \infty) &= \lim_{t \to 0} P_0(t < S_{\{0\}} < \infty) \\ &= \lim_{t \to 0} P_0(P_0(t < S_{\{0\}} < \infty \mid \mathcal{F}_t)) \\ &= \lim_{t \to 0} P_0(\underbrace{P_{X_t}(T_{\{0\}} < \infty)}_{=0 \text{ da } X_t \neq 0 \; P_0\text{-f.s.}}) \end{aligned}$$

$\square$

**Satz 3.21.** Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$d = 2$: $P_x($ Pfad $X_\cdot(\omega)$ liegt überall dicht$) = 1$ (Rekurrenz)

$d \geq 3$: $P_x(\lim_{t \to \infty} \|X_t\| = \infty) = 1$ (Transienz).

*Beweis.* $d = 2$ In diesem Falle gilt

$$P_x(K_{\frac{1}{n}}(X_m) \text{ wird erreicht }) = 1 \quad \forall n, m\,,$$

denn

$$\begin{aligned} P_x(T_{K_r(0)} < \infty) &= \lim_{R\to\infty} P_x(\|X_{T_{r,R}}\| = r) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } d = 2 \\ \frac{\|x\|^{2-d}}{r^{2-d}} & \text{für } d \geq 3\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Also folgt

$$P_x\left(X_\cdot(\omega) \text{ überall dicht }\right) = P_x\left(K_{\frac{1}{n}}(X_m) \text{ wird erreicht } \forall n, m\right) = 1\,.$$

$d \geq 3$ ohne Beweis. □

## 3.6 Levys Charakterisierung der Brownschen Bewegung

**Theorem 3.22.** Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal (bis $\infty$) bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)$ mit quadratischer Variation $\langle X\rangle_t = t$. Dann ist $(X_t)$ eine (stetige) $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Brownsche Bewegung.

*Beweis.* Eine Anwendung der Itô-Formel ergibt für $u \in \mathbb{R}$

$$e^{iuX_t} = e^{iuX_0} + \underbrace{\int_0^t iue^{iuX_r}\, dX_r}_{=:M_t} + \frac{1}{2}\int_0^t (iu)^2 e^{iuXr}\, ds\,.$$

$(M_t)$ ist ein stetiges lokales Martingal. Sei $(T_n)$ eine hierzu gehörende lokalisierende Folge. Dann gilt

$$E(e^{iuX_{t\wedge T_n}} - e^{iuX_{s\wedge T_n}}|\mathcal{F}_s) = -\frac{1}{2}E(\int\limits_{s\wedge T_n}^{t\wedge T_n} u^2 e^{iuX_r} dr \mid \mathcal{F}_s)\,.$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ folgt hieraus

$$E(e^{iu(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s) = 1 - \frac{1}{2}E(\int_s^t u^2 e^{iu(X_r - X_s)} dr|\mathcal{F}_s)\,.$$

Für $A \in \mathcal{F}_s$ folgt somit

$$\underbrace{E(e^{iu(X_t - X_s)}; A)}_{=:\varphi(t)} = P(A) - \frac{1}{2}u^2 \int_s^t E(e^{iu(X_r - X_s)}; A) dr$$

und damit $\dot\varphi(t) = -\frac{1}{2}u^2\varphi(t)$, also $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}u^2(t-s)}P(A)$, da $\varphi(s) = P(A)$. Folglich gilt

$$E(e^{iu(X_t - X_s)}, A) = e^{-\frac{1}{2}u^2(t-s)}P(A)\,.$$

Folglich sind $X_t - X_s$ und $1_A$ unabhängig (!) und wegen $A \in \mathcal{F}_s$ beliebig ist somit $X_t - X_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$. Weiterhin ist $X_t - X_s$ $N(0, t-s)$-verteilt, da $e^{-\frac{1}{2}u^2(t-s)}$ die charakteristische Funktion von $N(0, t-s)$ ist. □