4 Stochastische Integration

Wir erweitern in diesem Kapitel die Definition des Itô-Integrals auf allgemeine stetige Semimartingale. Im gesamten Kapitel sei dazu eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ auf einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben, die den üblichen Bedingungen genügt, dh die rechtsstetig ist und für die $\mathcal{F}_0$ alle P-Nullmengen in $\mathcal{F}$ enthält. Wir wollen für stetige Semimartingale X und geeignete stochastische Prozesse H als Integranden das stochastische Integral $\int_0^t H_s(\omega)\,dX_s(\omega)$ definieren. Unter Ausnutzung der Semimartingalzerlegung $X = M + A$ für $M \in \mathcal{M}^0_{loc}$ und $A \in \mathcal{A}^0$ setzen wir zunächst

$$\int_0^t H_s(\omega)\,dX_s(\omega) := \int_0^t H_s(\omega)\,dM_s(\omega) + \int_0^t H_s(\omega)\,dA_s(\omega)\,.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite wird als klassisches Lebesgue-Stieltjes Integral definiert, da der Prozess A von beschränkter Variation ist. In der Tat: da $A(\omega) = A_+(\omega) - A_-(\omega)$ für monoton wachsende Funktionen $A_\pm(\omega)$, sind beide Prozesse ω-weise Verteilungsfunktionen nichtnegativer Maße $\mu_\pm(\omega, ds)$ auf $[0,\infty)$, so dass wir unter geeigneten Integrabilitätsbedingungen an $H_\cdot(\omega)$ definieren können:

$$\int_0^t H_s(\omega)\,dA_s(\omega) := \int_0^t H_s(\omega)\,d\mu_+(\omega, s) - \int_0^t H_s(\omega)\,d\mu_-(\omega, s)\,.$$

Beachte: Die Zerlegung $A = A_+ - A_-$ ist nicht eindeutig, allerdings hängt der Wert des Integrals, dh die Differenz auf der rechten Seite, nicht von der konkreten Wahl der Zerlegung von A ab.

Das so definierte Integral ist stetig in der Integrationsgrenze t, da A stetig ist, und damit das signierte Maß $\mu = \mu_+ - \mu_-$ keine Atome besitzt. Unter der Annahme, dass der Prozess H progressiv-messbar ist, ist das so erhaltene Integral $\int_0^t H_s\,dA_s$, aufgefasst als stochastischer Prozess in $t \geq 0$, wieder adaptiert. In der Tat ist für alle $t > 0$ $\mu_\pm$, eingeschränkt auf $[0,t]$, bis auf Normierung zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß, ein stochastischer Kern von $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ nach $([0,t], \mathcal{B}([0,t]))$. Aus dem Satz von Fubini (siehe VL Wahrscheinlichkeitstheorie II) folgt für progressiv-messbare Prozesse $(H_t)_{t\geq 0}$ dass die Abbildung $\omega \mapsto \int_0^t H_s(\omega)\,d\mu_\pm(\omega, s)$ wieder $\mathcal{F}_t$ messbar ist.

Wir wenden uns nun dem stochastischen Integral $\int_0^t H_s\,dM_s$ bezüglich des stetigen lokalen Martingals $M \in \mathcal{M}^0_{loc}$ zu. Dazu definieren wir zunächst den Vektorraum $\mathcal{E}$ aller **elementaren previsiblen Prozesse**, dh aller Prozesse H der Form

$$H_t(\omega) = \sum_{i=0}^n h_{t_i}(\omega) 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

mit $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ und h_{t_i} $\mathcal{F}_{t_i}$-messbar und beschränkt.

Schritt 1: Definition des stochastischen Integrals für $H \in \mathcal{E}$ und $M \in \mathcal{H}^0$

Definition 4.1. Für $H \in \mathcal{E}$ und $M \in \mathcal{H}^0$ definieren wir das **stochastische Integral** $H.M$ **von** H **bzgl.** M durch

$$(H.M)_t(\omega) := \int_0^t H_s dM_s(\omega) := \sum_{i=0}^n h_{t_i}(\omega)\left(M_{t_{i+1}\wedge t}(\omega) - M_{t_i \wedge t}(\omega)\right)\,, \quad t \geq 0\,.$$

Lemma 4.2. Eigenschaften von $H.M$

(i) $H.M \in \mathcal{H}^0$

(ii) $\langle H.M\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s$, insbesondere

$$E\left((H.M)_t^2\right) = E\left(\int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right)$$

also gilt die **Wiener-Itô Isometrie**

$$\|H.M\|_{\mathcal{H}}^2 = E\left(\int_0^\infty H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right) \tag{4.1}$$

(iii) $H.M$ ist das eindeutig bestimmte Martingal in $\mathcal{H}^0$ mit

$$\langle H.M, N\rangle = \int_0^t H_s \, d\langle M, N\rangle_s \qquad \forall N \in \mathcal{H}^0\,. \tag{4.2}$$

Beweis. (i) Klar ist: $H.M$ adaptiert, stetig, $\mathcal{L}^2$. Also bleibt zu zeigen:

$$E\left((H.M)_T\right) = E\left((H.M)_0\right) = 0 \qquad \forall t$$

für beschränkte Stoppzeiten T, um die Martingaleigenschaft folgern zu können.

Die folgt nun jedoch aus

$$(H.M)_T = \sum_{i=0}^n h_{t_i}(M_{t_{i+1}\wedge T} - M_{t_i\wedge T}) = \sum_{i=0}^n \underbrace{h_{t_i} 1_{\{t_i<T\}}}_{\in\mathcal{F}_{t_i}}(M_{t_{i+1}\wedge T} - M_{t_i})\,.$$

Folglich ist

$$E\left((H.M)_T\right) = \sum_{i=0}^n E\left(h_{t_i} 1_{\{t_i<T\}} \underbrace{E\left(M_{t_{i+1}\wedge T} - M_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right)}_{=0}\right) = 0\,.$$

Zum Beweis von (ii) reicht es zu zeigen, dass $(H.M)_t^2 - \int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s$, $t \geq 0$, ein Martingal ist. Dann folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit der Doob-Meyer Zerlegung Theorem 1.54, da der Prozess $\int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s$, $t \geq 0$, offensichtlich stetig, monoton wachsend und adaptiert ist.

Sei also T eine beschränkte Stopzeit. Dann folgt

$$\begin{aligned}
E\left((H.M)_T^2\right) &= \sum_{i,j} E\left(h_{t_i} 1_{\{t_i<T\}} h_{t_j} 1_{\{t_j<T\}} \left(M_{t_{i+1}\wedge T} - M_{t_i}\right)\left(M_{t_{j+1}\wedge T} - M_{t_j}\right)\right) \\
&= \sum_i E\left(h_{t_i}^2 1_{\{t_i<T\}} \left(M_{t_{i+1}\wedge T} - M_{t_i}\right)^2\right) = \sum_i E\left(h_{t_i}^2 1_{\{t_i<T\}} \left(M_{t_{i+1}\wedge T}^2 - M_{t_i}^2\right)\right) \\
&= \sum_i E\left(h_{t_i}^2 1_{\{t_i<T\}} \left(\langle M\rangle_{t_{i+1}\wedge T} - \langle M\rangle_{t_i}\right)\right) \\
&= E\left(\sum_i \int_0^T h_{t_i}^2 1_{(t_i,t_{i+1}]}(s) \, d\langle M\rangle_s\right) = E\left(\int_0^T H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right)\,.
\end{aligned}$$

In der zweiten Gleichheit haben wir dabei verwendet, dass die Mischterme

$$E\left(h_{t_i}1_{\{t_i<T\}}h_{t_j}1_{\{t_j<T\}}\left(M_{t_{i+1}\wedge T}-M_{t_i}\right)\left(M_{t_{j+1}\wedge T}-M_{t_j}\right)\right)$$

für $i \neq j$ Erwartungswert 0 haben.

(iii) Zum Beweis von (4.2) reicht es aufgrund der Eindeutigkeit der Semimartingalzerlegung zu zeigen, dass $H.M_t N_t - \int_0^t H_s\, d\langle M,N\rangle_s$ ein Martingal ist. Analog zm Beweis von Teil (ii) sei dazu wieder T eine beschränkte Stoppzeit. Da $M_tN_t - \langle M,N\rangle_t$, $t \geq 0$, wieder ein Martingal ist, folgt

$$\begin{aligned}
E\left((H.M)_T N_T\right) &= \sum_{i=1}^n E\left(h_{t_i}1_{t_i<T}\underbrace{E\left((M_{t_{i+1}\wedge T}-M_{t_i})N_T \mid \mathcal{F}_{t_i}\right)}_{=E\left((M_{t_{i+1}\wedge T}N_{t_{i+1}\wedge T}-M_{t_i}N_{t_i})|\mathcal{F}_{t_i}\right)}\right)\\
&= \sum_{i=1}^n E\left(h_{t_i}1_{t_i<T}E\left(\langle M,N\rangle_{t_{i+1}\wedge T}-\langle M,N\rangle_{t_i}\mid \mathcal{F}_{t_i}\right)\right)\\
&= \ldots = \int_0^t H_s\, d\langle M,N\rangle_s\,.
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $\Phi \in \mathcal{H}^0$ umgekehrt gegeben mit der Eigenschaft, dass $\langle \Phi, N\rangle_t = \int_0^t H_s\, d\langle M,N\rangle_s$ für alle $N \in \mathcal{H}^0$. Dann ist $H.M - \Phi \in \mathcal{H}^0$ ein stetiges Martingal mit quadratischer Variation 0, denn

$$\begin{aligned}
\langle H.M-\Phi\rangle_t &= \langle H.M, H.M-\Phi\rangle_t - \langle \Phi, H.M-\Phi\rangle_t\\
&= \int_0^t H_s d\langle M, H.M-\Phi\rangle_s - \int_0^t H_s d\langle M, H.M-\Phi\rangle_s = 0\,.
\end{aligned}$$

Damit ist $H.M - \Phi \equiv 0$, woraus die Eindeutigkeit folgt. □

Definition 4.3. Es sei $M \in \mathcal{H}^0$. Dann heißt das nichtnegative Maß

$$P_M(A) := E\left(\int_0^\infty 1_A(s,\omega)\, d\langle M\rangle_s(\omega)\right), \quad A \in \overline{\mathcal{F}} := \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}$$

auf dem Produktraum $\overline{\Omega} := [0,\infty) \times \Omega$ **Doleansmaß** zu M.

Schritt 2: Fortsetzung des stochastischen Integrals auf den Abschluss $\overline{\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ in $\mathcal{L}^2(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, P_M)$

P_M ist ein endliches Maß mit Gesamtmasse $P_M(\bar{\Omega}) = E\left(\langle M\rangle_\infty\right)$ und für jede Zufallsvariable Z auf dem Produktraum mit $Z \geq 0$ gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int Z\, dP_M = E\left(\int_0^\infty Z(s,\omega)\, d\langle M\rangle_s(\omega)\right).$$

Aufgrund von (4.1) ist das so konstruierte stochastische Integral $H \mapsto H.M$ eine Isometrie

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{L}^2(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, P_M) \to \mathcal{H}^0\,.$$

Aus diesem Grunde lässt sich $H.M$ auf den Abschluss $\overline{\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ in $\mathcal{L}^2(P_M)$ eindeutig fortsetzen.

In der Tat, zu $H \in \overline{\mathcal{E}}$ gibt es eine Folge $(H^n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ von Elementarprozessen, die gegen H in $\mathcal{L}^2(P_M)$ konvergiert. Insbesondere ist diese Folge dann eine Cauchy-Folge und aus der Isometrie (4.1) folgt wegen

$$\|H^n - H^m\|^2_{\mathcal{H}^0} = E\left(\int_0^\infty (H^n_s - H^m_s)^2 \, d\langle M\rangle_s\right) \to 0\,, \quad n,m\to\infty\,,$$

dass die Folge der stochastischen Integrale $(H^n.M)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$ ist, und damit konvergent aufgrund von Theorem 1.65.

Wir definieren nun das stochastische Integral $H.M$ durch

$$H.M = \lim_{n\to\infty} H^n.M$$

Nach Konstruktion ist $H.M$ wieder ein stetiges, $\mathcal{L}^2$-beschränktes Martingal und es gilt

$$\langle H.M\rangle_t = \int_0^t H^2_s \, d\langle M\rangle_s\,,\ t\geq 0\,.$$

Man beachte, dass die so getroffene Definition von $H.M$ **unabhängig** von der Folge der approximierenden Integranden $(H^n)_{n\geq 1}$ ist!

Diese abstrakte Fortsetzung der Definition/Konstruktion des stochastischen Integrals wäre ohne großen Nutzen, wenn man nicht in der Lage wäre, den Abschluss $\overline{\mathcal{E}}$ der Elementarprozesse, und damit die Klasse der zulässigen Integranden H, explizit zu charakterisieren. Dies ist in der Tat aber möglich mithilfe der folgenden Sätze.

Definition 4.4. Die σ-Algebra

$$\mathcal{P} := \sigma\left(\Big\{\underbrace{(t,\infty)\times F_t}_{\text{previsible Rechtecke}} \mid F_t \in \mathcal{F}_t,\ t>0\Big\} \cup \{\{0\}\times F_0 \mid F_0 \in \mathcal{F}_0\}\right)$$

heißt **previsible σ-Algebra**.

Lemma 4.5. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \sigma\left(\{H = (H_t)_{t\geq 0} \mid H \text{ linksseitig stetig, adaptiert }\}\right)\\ &= \sigma\left(\{H = (H_t)_{t\geq 0} \mid H \text{ stetig, adaptiert }\}\right)\,.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathcal{P}$ in der progressiven σ-Algebra enthalten (aber im Allgemeinen echt kleiner!).

Proof. Die Inklusionen "$\supseteq$" sind jeweils klar. Daher reicht es zu zeigen: zu $A_t =]t,\infty[\times F_t$ gibt es stetige adaptierte Prozesse H^n, die punktweise gegen 1_{A_t} konvergieren. Dazu betrachte man zum Beispiel

$$H^n_s(\omega) = \varphi_n(s) 1_{F_t}(\omega)$$

mit

$$\varphi_n(s) := \begin{cases} 0 & \text{für } s\leq t\\ n(s-t) & \text{für } t\leq s\leq t+\frac{1}{n}\\ 1 & \text{für } s\geq t+\frac{1}{n}\,.\end{cases}$$

□

Beispiel Das folgende Beispiel zeigt, dass die Klasse der progressiv messbaren Prozesse im Allgemeinen echt größer als die Klasse der previsiblen Prozesse ist. Dazu betrachte auf der Menge $\Omega = \{0,1\}$ die rechtsstetige Filtration

$$\mathcal{F}_t := \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\} & \text{für } t \in [0,1[\\ \mathcal{P}(\Omega) & \text{für } t \geq 1\,. \end{cases}$$

Für jeden previsiblen Prozess Y folgt in diesem Falle, dass Y_1 notwendigerweise $\mathcal{F}_0$-messbar ist (mit maßtheoretischer Induktion). Für den Prozess

$$X_t(\omega) = 1_{[1,\infty)\times\{1\}}(t,\omega)$$

gilt dann: X ist rechtsstetig und adaptiert, also progressiv messbar nach Satz 1.26, aber eben nicht previsibel, da X_1 nicht $\mathcal{F}_0$-messbar ist.

Satz 4.6. Es gilt

$$\mathcal{L}^2(\overline{\Omega}, \mathcal{P}, P_M) \subseteq \overline{\mathcal{E}}\,.$$

Genauer gesagt ist $\mathcal{L}^2(\overline{\Omega}, \mathcal{P}_M, P_M) = \overline{\mathcal{E}}$, wobei $\mathcal{P}_M$ die Vervollständigung von $\mathcal{P}$ bzgl. P_M bezeichnet.

Insbesondere ist jeder linksseitig stetige adaptierte Prozess in $\mathcal{L}^2$ stochastisch integrierbar.

Beweis. Die Inklusion "$\supseteq$" ist offensichtlich, da jeder previsible Elementarprozess $\mathcal{P}$-messbar ist und quadratisch integrierbar bzgl. des Doleansmaß P_M (da beschränkt in (t,ω)).

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $H \in \mathcal{L}^2(\overline{\Omega}, \mathcal{P}_M, P_M)$, ≥ 0. Dann gilt

$$H = \lim_{m\to\infty} (H \wedge m) 1_{(0,m]\times\Omega} \to H \text{ in } \mathcal{L}^2$$

und somit können wir im folgenden oBdA annehmen, dass H beschränkt in (t,ω) ist.

Es sei nun $(\tau_n)_{n\geq 1}$ eine aufsteigende Folge von endlichen Zerlegungen von $(0,\infty)$ mit $|\tau_n| \to 0$ und

$$\mathcal{P}_n := \sigma\left(\{]t,\infty) \mid F_t \in \mathcal{F}_t\,, t \in \tau_n\}\right) \cup \left(\{\{0\} \times F_0 \mid F_0 \in \mathcal{F}_0\}\right)\,.$$

Dann gilt

(a) $\mathcal{P} = \bigvee_n \mathcal{P}_n$.

(b) Ist H $\mathcal{P}_n$-messbar und beschränkt, so besitzt H die Darstellung

$$H_t(\omega) = h_0 1_{\{0\}} + \sum_{t_i \in \tau_n} h_{t_i}(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

mit h_{t_i} $\mathcal{F}_{t_i}$-messbar und beschränkt. MaW, H ist ein previsibler Elementarprozess.

Zum Beweis der Aussage (a) beachte man, dass es aufgrund von Lemma 4.5 reicht zu zeigen, dass jeder linksseitig stetige adaptierte Prozess H $\bigvee_n \mathcal{P}_n$-messbar ist. Aus der Linksstetigkeit von H folgt aber für $t > 0$

$$H_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{t_i \in \tau_n} H_{t_i}(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t)}_{\mathcal{P}_n\text{-messbar}}$$

und damit die Behauptung. Der Beweis von (b) ist eine leichte Übung.

Mit diesen beiden Aussagen folgt, dass die bedingte Erwartung

$$H^n = E_{P_M}(H \mid \mathcal{P}_n)$$

$\mathcal{P}_n$-messbar ist, also in $\mathcal{E}$ (!). Eine Anwendung des Martingalkonvergenzsatz ergibt

$$\lim_{n\to\infty} H^n = \lim_{n\to\infty} E_{P_M}(H \mid \mathcal{P}_n) = E_{P_M}(H \mid \mathcal{P}) = H$$

und damit die Behauptung. (Beachte hierbei: P_M ist zwar kein Wahrscheinlichkeitsmaß, aber endlich und wir wenden die bedingte Erwartung auf das zu 1 normierte Doleansmaß an.) □

Bemerkung 4.7. Bis zu diesem Schritt ist die stochastische Integrationstheorie für Martingale mit stetigen Pfaden identisch mit der stochastischen Integrationstheorie bzgl. allgemeiner cadlag-Martingale, wenn man die quadratische Variation $\langle M\rangle$ jeweils durch die (orthogonale) Projektion $[M]$ von M^2 auf den Unterraum der adaptierten Prozesse endlicher Variation ersetzt (beispielsweise gilt aufgrund von Lemma 1.35, Teil (ii), $[N-\lambda t] = \lambda t$ für den kompensierten Poissonprozess $M_t = N_t - \lambda t$).

Der folgende Satz schlägt eine Brücke zwischen zulässigen Integranden und progressiv messbaren Prozessen, die wir in Kapitel 1 bereits genauer untersucht hatten.

Satz 4.8. Ist $\langle M\rangle$ stetig, so folgt: jeder progressiv messbare Prozess (zB rechts- oder linksstetig) $H \in \mathcal{L}^2(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, P_M)$ ist in $\mathcal{L}^2(\overline{\Omega}, \mathcal{P}_M, P_M)$ (und damit insbesondere ein zulässiger Integrand).

Der Beweis folgt aus Lemma 3.2.7 in [KS91].

Die folgende Ungleichung wird im weiteren Verlauf entscheidend sein:

Satz 4.9. Es seien $M, N \in \mathcal{H}^0$ und G, H zulässige Integranden. Dann gilt:

$$\left|\int_0^t H_s(\omega)G_s(\omega)\, d\langle M,N\rangle_s(\omega)\right| \le \left(\int_0^t H_s^2(\omega)\, d\langle M\rangle_s(\omega)\right)^{\frac12} \left(\int_0^t G_s^2(\omega)\, d\langle N\rangle_s(\omega)\right)^{\frac12} .$$

Insbesondere gilt die **Kunita-Watanabe Ungleichung**

$$E\left(\left|\int_0^t H_sG_s\, d\langle M,N\rangle_s\right|\right) \le E\left(\int_0^t H_s^2\, d\langle M\rangle_s\right)^{\frac12} E\left(\int_0^t G_s^2\, d\langle N\rangle_s\right)^{\frac12} .$$

Beweis. Wir halten zunächst ω fest und lassen ω in der Notation zu ihrer Vereinfachung im ersten Teil des Beweises weg.

Definiere das nichtnegative Maß $\nu = \frac12 (d\langle M\rangle + d\langle N\rangle)$. Da $d\langle M\rangle \ll d\nu$, $d\langle N\rangle \ll d\nu$ und $d\langle M,N\rangle \ll d\nu$, existieren die Radon-Nikodym-Dichten ϱ_i, $i = 1,2,3$. Dabei folgt die Absolutstetigkeit des signierten Maßes $d\langle M,N\rangle$ bzgl. ν aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned} |\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s| &\le (\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s)^{\frac12} (\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s)^{\frac12} \\ &\le \frac12 (\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s + \langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s) \quad ,0 \le s \le t\,. \end{aligned}$$

Für alle α, $\beta \in \mathbb{R}$ und $0 \le s \le t$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle \alpha M + \beta N \rangle_t - \langle \alpha M + \beta N \rangle_s \\ &= \int_s^t \alpha^2 \varrho_1(s) + 2\alpha\beta\varrho_3(s) + \beta^2 \varrho_2(s)\, d\nu(s) \end{aligned}$$

Da s, t beliebig folgt hieraus

$$0 \le \alpha^2 \varrho_1(t) + 2\alpha\beta\varrho_3(t) + \beta^2 \varrho_2(t) \tag{4.3}$$

für ν fast alle t. Insbesondere gibt es eine ν-Nullmenge $N \in \mathcal{B}([0, \infty))$ mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in [0, \infty) \setminus N$ (4.3) für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ gilt, und damit schließlich für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Für $t \notin N$ folgt insbesondere

$$0 \le \alpha^2 G_t^2 \varrho_1(t) + 2\alpha G_t H_t \varrho_3(t) + H_t^2 \varrho_2(t)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und damit

$$|H_t G_t \varrho_3(t)| \le \left(G_t^2 \varrho_1(t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(H_t^2 \varrho_2(t)\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Integration über ν ergibt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t G_s H_s d\langle M, N \rangle_s \right| = \left| \int_0^t G_s H_s \varrho_3(s) d\nu(s) \right| &\le \int_0^t |G_s H_s \varrho_3(s)|\, d\nu(s) \\ &\le \int_0^t \left(G_s^2 \varrho_1(s)\right)^{\frac{1}{2}} \left(H_s^2 \varrho_2(s)\right)^{\frac{1}{2}}\, d\nu(s) \\ &\le \left(\int_0^t H_s^2 \varrho_1(s) d\nu(s) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t G_s^2 \varrho_2(s) d\nu(s) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^t H_s^2\, d\langle M \rangle_s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t G_s^2\, d\langle N \rangle_s \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil des Satzes gezeigt.

Der zweite Teil folgt hieraus durch erneute Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung wegen

$$\begin{aligned} E\left(\left| \int_0^t H_s G_s\, d\langle M, N \rangle_s \right| \right) &\le E\left(\left(\int_0^t H_s^2\, d\langle M \rangle_s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t G_s^2\, d\langle N \rangle_s \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\le E\left(\int_0^t H_s^2\, d\langle M \rangle_s \right)^{\frac{1}{2}} E\left(\int_0^t G_s^2\, d\langle N \rangle_s \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

□

Als wesentliche Anwendung der Kunita-Watanabe Ungleichung zeigen wir die folgende Lokalitätseigenschaft des stochastischen Integrals:

Satz 4.10. Es sei $M \in \mathcal{H}^0$, G zulässiger Integrand, T eine Stoppzeit. Dann gilt

$$(H.M)_{T \wedge t} = \left(H^T . M^T\right)_t , \qquad t \ge 0 ,$$

wobei $H_t^T := H_t 1_{\{t\leq T\}}$ und $M_t^T = M_{T\wedge t}$.

Insbesondere: Sind $M,N \in \mathcal{H}^0$, G,H zulässige Integranden, und T eine Stoppzeit mit

$$G_{t\wedge T} = H_{t\wedge T} \quad \text{und} \quad M_{t\wedge T} = N_{t\wedge T}$$

so folgt

$$(G.M)_{t\wedge T} = (H.N)_{t\wedge T} \quad \mathsf{P}-f.s.$$

Der Beweis findet sich in [KS91] und ist eine Übung.

Schritt 3: Erweiterung durch Lokalisierung

Im folgenden erweitern wir die Definition/Konstruktion des stochastischen Integrals auf stetige lokale Martingale $M \in \mathcal{M}_{loc}^0$.

Als Klasse der zulässigen Integranden betrachten wir

$$\mathcal{L}_{loc}^2(\overline{\Omega}, \mathcal{P}, P_M) := \left\{ H \ \mathcal{P}\text{-messbar} \ \mid \int_0^t H_s^2(\omega)\, d\langle M\rangle_s(\omega) < \infty \ \mathsf{P} \ -f.s. \ \forall t \geq 0 \right\}$$

Zu gegebenem $H \in \mathcal{L}_{loc}^2$ geht man dann folgendermaßen vor: Es sei $(T_n)_{n\geq 1}$ eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten für M,

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 \mid \int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s > n\}$$

und $S_n := T_n \wedge \tau_n$. Dann ist $H_t^{S_n} := H 1_{S_n \geq t}$, $t \geq 0$, $\mathcal{P}$-messbar und quadratisch integrierbar bzgl. des Doleansmaßes $P_M^{S_n}$ des Martingals $M_t^{S_n} := M_{S_n \wedge t}$, $t \geq 0$, also das stochastische Integral $H^{S_n}.M^{S_n}$ wohldefiniert für alle n.

Die Lokalitätseigenschaft des stochastischen Integrals (Satz 4.10) impliziert nun, dass

$$(H^{S_n}.M^{S_n})_t = (H^{S_m}.M^{S_m})_t \quad \text{auf } \{t \leq S_n \wedge S_m\}$$

und damit ist

$$(H.M)_t := (H^{S_n}.M^{S_n})_t \quad \text{auf } \{t \leq S_n\}$$

wohldefiniert. Aus der Konstruktion folgt, dass $H.M$ wieder ein stetiges lokales Martingal ist in $\mathcal{M}_{loc}^0$ mit (pfadweiser) quadratischer Variation

$$\langle H.M\rangle_t(\omega) = \int_0^t H_s^2(\omega)\, d\langle M\rangle_s(\omega)\,, t \geq 0\,.$$

Zum Abschluss des Kapitels geben wir noch folgende äußerst nützliche Aussage:

Theorem 4.11. Es sei τ_n, $n \geq 1$, eine Folge von Zerlegungen mit $|\tau_n| \to 0$, $M \in \mathcal{M}_{loc}^0$ und H ein stetiger adaptierter Prozess. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in \tau_n} H_{t_i} \left(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t} \right) = \int_0^t H_s \, dM_s \qquad ucp\,.$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $M \in \mathcal{H}^0$ und H beschränkt ist. Weiter sei $H_t^n = H_{t_i}$ für $t \in (t_i, t_{i+1}]$. Dann folgt offenbar $H^n \to H$ in $\mathcal{L}^2(P_M)$ also $(H^n.M)_t = \sum_{t_i\in\tau_n} H_{t_i} \left(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}\right) \to \int_0^t H_s \, dM_s$ in $\mathcal{L}^2(P)$ und damit ucp. Den allgemeinen Falls beweist man mithilfe geeigneter Stoppzeiten. □

5 Stochastische Differentialgleichungen

Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dN_t}{dt} = aN_t \quad , N_0 = n_0 \,. \tag{5.1}$$

(5.1) ist linear und besitzt bekanntlich die explizite Lösung $N_t = e^{at} n_0$. Wir können (5.1) als Modell für Wachstum interpretieren:

- N_t beschreibt die Populationsgröße oder den Preis eines Portfolios
- a beschreibt die Wachstumsrate bzw. den Zins im zweiten Kontext

Ist a nur unvollständig bekannt, da es etwa zufälligen Einflüssen unterliegt, bietet sich für die Wachtumsrate a der folgende Ansatz

$$a = r \ + \ \text{Rauschen}$$

an. Der einfachste Fall, den man hierbei als Rauschterm betrachten kann, ist $\sigma \frac{dW_t}{dt}$ für eine stetige Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$. Einsetzen in (5.1) liefert die stochastische Differentialgleichung

$$\frac{dN_t}{dt} = \left(r + \sigma \frac{dW_t}{dt} \right) N_t$$

bzw.

$$dN_t = rN_t \, dt \ + \ \sigma N_t \, dW_t \,. \tag{5.2}$$

Die explizite Lösung der stochastischen Differentialgleichung (5.2) zur Anfangsbedingung N_0 ist

$$N_t = \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \ + \ \sigma W_t \right) N_0 = \exp(rt) \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t \right) N_0$$

denn eine Anwendung der zeitabhängigen Itô-Formel ergibt

$$\begin{aligned} dN_t &= \sigma N_t \, dW_t \ + \ \left(\frac{1}{2}\,\sigma^2 + \left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2 \right) \right) N_t \, dt \\ &= rN_t \, dt + \sigma N_t \, dW_t \,. \end{aligned}$$

Die Lösung $(N_t)_{t\geq 0}$ heißt **geometrische Brownsche Bewegung** mit Startwert N_0 und Volatilität σ und ist ein Grundbaustein für die Modellierung eines Preisprozesses (z.B. Aktienpreis) (siehe VL zur Finanzmathematik).

Wir wollen im Folgenden die **Theorie zu stochastischen Differentialgleichungen** entwickeln.

5.1 Starke Lösungen

gegeben:

- $b_i, \sigma_{ij} : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$, Borel-messbar
- (W_t) r-dim. (stetige) $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung auf einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- ξ $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, unabhängig von $(W_t)_{t\geq 0}$, als Anfangsbedingung

gesucht:
starke Lösung $(X_t)_{t\in[0,T]}$ der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t\,, \quad X_0 = \xi \tag{5.3}$$

In Komponentenschreibweise:

$$dX_t^i = b_i(t, X_t)\, dt \;+\; \sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}(t, X_t) dW_t^j\,, \quad X_0^i = \xi_0^i \quad \text{für } 1 \leq i \leq d\,.$$

Definition 5.1. Eine **starke Lösung** der stochastischen Differentialgleichung (5.3) ist ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ mit stetigen Pfaden und folgenden weiteren Eigenschaften:

(a) (X_t) ist adaptiert an die Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma\left(\{\xi, W_s,\ s \in [0,t]\}\right) \vee \mathcal{N}$, wobei $\mathcal{N}$ = alle Teilmengen von P-Nullmengen in $\sigma\left(\{\xi, W_s,\ s \in [0,\infty)\}\right)$ bezeichnet.

(b) $X_0 = \xi_0$ P-f.s.

(c) $\int_0^t \left(|b_i(s, X_s)| + \sigma_{ij}^2(s, X_s)\right)\, ds < \infty$ P-f.s. $\forall\, t \in [0,T]$, $\forall\, i, j$.

(d) $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$ P-f.s. $\forall\, t \in [0,T]$.

$$B(t,x) = \begin{bmatrix} b_1(t,x) \\ \vdots \\ b_d(t,x) \end{bmatrix}$$

heißt **Drift** der stochastischen Differentialgleichung,

$$\sigma(t,x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t,x) & \dots & \sigma_{1r}(t,x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{d1}(t,x) & \dots & \sigma_{dr}(t,x) \end{bmatrix}$$

heißt **Dispersionsmatrix** und $\sigma\sigma^T(t,x)$ schließlich **Diffusionsmatrix**.

Definition 5.2. Für die stochastische Differentialgleichung (5.3) gilt **starke Eindeutigkeit**, falls zu gegebener Brownscher Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$ und hierzu unabhängiger Anfangsbedingung ξ auf einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zwei **starke Lösungen** X und $\tilde{X}$ **ununterscheidbar** sind, dh

$$P\left(X_t = \tilde{X}_t \quad \forall\, t \in [0,T]\right) = 1\,.$$

Wir geben nun zunächst ein Eindeutigkeitsresultat für starke Lösungen unter folgender Annahem an die Koeffizienten:

Annahme (A)

(a) b_i, σ_{ij} sind stetig

(b) Für alle $R > 0$ existiert eine Konstante L_R mit

$$2\langle b(t,x)-b(t,y), x-y\rangle + \|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\|^2 \le L_R\|x-y\|^2 \quad \forall \|x\|, \|y\| \le R,\, t \in [0,T]\,.$$

Teil (b) der Annahme **(A)** reduziert sich im Falle $\sigma_{ij} \equiv 0$ zu

$$2\langle b(t,x) - b(t,y), x - y\rangle \le L_R\|x-y\|^2 \quad \forall\ \|x\|, \|y\| \le R,\, t \in [0,T]\,. \tag{5.4}$$

(5.4) heißt **(lokale) Monotonie-Bedingung** oder auch **(lokale) einseitige Lipschitz-Bedingung** für das Vektorfeld b. Diese Namensgebung wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt:

Satz 5.3. Das Vektorfeld b sei lokal Lipschitz-stetig bzgl. x mit Lipschitz-Konstante unabhängig von t, dh, für alle $R > 0$ gibt es eine Konstante L_R mit

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| \le L_R\|x-y\|\,, \quad \forall \|x\|, \|y\| \le R,\, t \in [0,T]\,.$$

Dann erfüllt b die lokale Monotonie-Bedingung

$$\langle b(t,x) - b(t,y), x - y\rangle \le L_R\|x-y\|^2 \quad \forall \|x\|, \|y\| \le R,\, t \in [0,T]\,.$$

Beweis. Elementare Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung ergibt für $\|x\|, \|y\| \le R$ und $t \in [0,T]$

$$2\langle b(t,x) - b(t,y), x-y\rangle \le 2\|b(t,x) - b(t,y)\|\|x-y\| \le 2L_R\|x-y\|$$

und damit die Behauptung. □

Theorem 5.4. Es gelte Annahme **(A)**. Dann ist für jede Anfangsbedingung ξ die starke Lösung der SDE eindeutig.

Für den Beweis von Theorem 5.4 benötigen wir als Hilfsmittel:

Lemma 5.5. (Gronwall Ungleichung) Es sei $\alpha, \beta, g : [0,T] \to \mathbb{R}$, α, β integrierbar, $\beta \ge 0$, g stetig, und

$$g(t) \le \alpha(t) + \int_0^t \beta(s) g(s)\, ds \quad \forall\, t \in [0,T]\,. \tag{5.5}$$

Dann folgt

$$g(t) \le \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s) e^{\int_s^t \beta(r)dr}\, ds \quad \forall\, t \in [0,T]\,. \tag{5.6}$$

Spezialfall $\beta(s) \equiv \beta \ge 0$: In diesem Falle reduziert sich (5.6) zu

$$g(t) \le \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)} ds\,.$$

Beweis. Definiere die folgende Hilfsfunktion

$$H(t) := \exp\left(-\int_0^t \beta(r)\,dr\right)\int_0^t \beta(s)g(s)\,ds\,.$$

Dann gilt für ihre Ableitung

$$\begin{aligned}\dot H(t) &= -\beta(t)H(t) + \beta(t)g(t)\exp\left(-\int_0^t \beta(r)\,dr\right)\\ &= \beta(t)\exp\left(-\int_0^t \beta(r)\,dr\right)\underbrace{\left(g(t) - \int_0^t \beta(s)g(s)\,ds\right)}_{\leq \alpha(t)}\\ &\leq \alpha(t)\beta(t)\exp\left(-\int_0^t \beta(s)\,ds\right)\,.\end{aligned}$$

Es folgt damit

$$H(t) = \int_0^t \dot H(s)\,ds \leq \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(-\int_0^s \beta(r)\,dr\right)\,ds$$

und hieraus

$$\int_0^t \beta(s)g(s)\,ds \leq \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\,dr\right)\,ds\,.$$

Einsetzen in (5.5) liefert die Behauptung. □

Beweis. (von Theorem 5.4)
Es seien X und $\tilde X$ zwei starke Lösungen mit Anfangsbedingung ξ und (gemeinsamer) Brownscher Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$. Wir definieren für $R > 0$ die Stoppzeit

$$\tau(R) := \inf\{t \in [0,T] \mid \|X_t\| \vee \|\tilde X_t\| \geq R\} \wedge T\,.$$

Da X und $\tilde X$ beide stetig sind, folgt $\tau(R) \uparrow T$ P-f.s. für $R \uparrow \infty$. Eine Anwendung der Itô-Formel ergibt für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\|X_t - \tilde X_t\|^2 &= 2\int_0^t \langle b(s,X_s) - b(s,\tilde X_s), X_s - \tilde X_s\rangle\,ds\\ &\quad + 2\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^r \int_0^t \left(X_s^i - \tilde X_s^i\right)\left(\sigma_{ij}(s,X_s) - \sigma_{ij}(s,\tilde X_s)\right)\,dW_s^j\\ &\quad + \int_0^t \|\sigma(s,X_s) - \sigma(s,\tilde X_s)\|^2\,ds\,.\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir im folgenden

$$M_t := 2\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^r \int_0^t \left(X_s^i - \tilde X_s^i\right)\left(\sigma_{ij}(s,X_s) - \sigma_{ij}(s,\tilde X_s)\right)\,dW_s^j\,.$$

Aufgrund von Annahme **(A)** folgt dann für $t < \tau(R)$

$$\|X_t - \tilde X_t\|^2 \leq L_R\int_0^{t\wedge\tau(R)} \|X_s - \tilde X_s\|^2\,ds + M_{t\wedge\tau(R)}\,.$$

Das stochastische Integral M_t ist ein lokales Martingal. Es sei (T_n) eine zugehörige lokalisierende Folge. Dann gilt $E\left(M_{t\wedge\tau(R)\wedge T_n}\right) = 0$ für alle n und damit

$$E\left(\|X_{t\wedge\tau(R)\wedge T_n} - \tilde{X}_{t\wedge\tau(R)\wedge T_n}\|^2\right) \le L_R E\left(\int_0^{t\wedge\tau(R)\wedge T_n} \|X_s - \tilde{X}_s\|^2\right) ds\,.$$

Anwendung des Lemmas von Fatou ergibt

$$\begin{aligned} E\left(\|X_{t\wedge\tau(R)} - \tilde{X}_{t\wedge\tau(R)}\|^2\right) &\le \liminf_{n\to\infty} E\left(\|X_{t\wedge\tau(R)\wedge T_n} - \tilde{X}_{t\wedge\tau(R)\wedge T_n}\|^2\right) \\ &\le \liminf_{n\to\infty} L_R E\left(\int_0^{t\wedge\tau(R)\wedge T_n} \|X_s - \tilde{X}_s\|^2\right) ds \\ &\le L_R E\left(\int_0^{t\wedge\tau(R)} \|X_s - \tilde{X}_s\|^2\right) ds \\ &\le L_R \int_0^t E\left(\|X_{s\wedge\tau(R)} - \tilde{X}_{s\wedge\tau(R)}\|^2\right) ds\,. \end{aligned}$$

Eine Anwendung der Gronwall Ungleichung auf

$$g(t) = E\left(\|X_{t\wedge\tau(R)} - \tilde{X}_{t\wedge\tau(R)}\|^2\right)$$

sowie $\beta(t) \equiv L_R$ und $\alpha(t) \equiv 0$ ergibt

$$E\left(\|X_{t\wedge\tau(R)} - \tilde{X}_{t\wedge\tau(R)}\|^2\right) = 0\,.$$

Erneute Anwendung des Lemmas von Fatou ergibt für $R \uparrow \infty$

$$E\left(\|X_t - \tilde{X}_t\|^2\right) = 0$$

also $X_t = \tilde{X}_t$ P-f.s. für alle $t \in [0,T]$ und damit schließlich $P\left(X_t = \tilde{X}_t \ \forall\, t \in [0,T]\right) = 1$, da X und $\tilde{X}$ beide stetig sind. $\square$

Als nächstes geben wir ein Existenzresult für starke Lösungen der stochastischen Differentialgleichung (5.3) unter folgender Annahme:

(B) Es existiert eine Konstante K so dass

$$2\langle b(t,x), x\rangle + \|\sigma(t,x)\|^2 \le K\left(1 + \|x\|^2\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, t \in [0,T]\,.$$

Theorem 5.6. Unter den Annahmen **(A)** und **(B)** an die Koeffizienten der stochastischen Differentialgleichung (5.3) existiert für jede Anfangsbedingung ξ eine starke Lösung.

Beweis. Zunächst setzen wir b und σ fort auf ganz $[0,\infty)$ durch $b(t,x) := b(t\wedge T, x)$ und $\sigma(t,x) := \sigma(t\wedge T, x)$. Klar ist, dass auch diese Fortsetzungen wieder die Annahmen **(A)** und **(B)** erfüllen. OBdA können wir weiterhin annehmen, dass $\sup_{\|x\|\le R} \|b(t,x)\| \le L_R$ und $\sup_{\|x\|\le R} \|\sigma(t,x)\| \le L_R$ gilt für alle $R > 0$.

Wir nehmen zunächst an, dass die Anfangsbedingung ξ beschränkt ist.

Wir approximieren im folgenden die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (5.3) mithilfe des Euler Schemas. Zu diesem Zweck definieren wir zu $n \in \mathbb{N}$ den Prozess $(X_t^n)_{t\geq 0}$ durch $X_0^n := \xi$ und für $t \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ durch

$$X_t^n := X_{\frac{k}{n}}^n + \int_{\frac{k}{n}}^t b\left(s, X_{\frac{k}{n}}^n\right) ds + \sum_{j=1}^r \int_{\frac{k}{n}}^t \sigma_{\cdot j}\left(s, X_{\frac{k}{n}}^n\right) dW_s^j ,$$

oder äquivalent hierzu, durch

$$X_t^n := \xi + \int_0^t b\left(s, \bar{X}_s^n\right) ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{\cdot j}\left(s, \bar{X}_s^n\right) dW_s^j ,$$

mit $\bar{X}_s^n := X_{\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}}^n$. Mit $r_t^n := \bar{X}_t^n - X_t^n$ können wir dann schreiben

$$X_t^n = \xi + \int_0^t b\left(s, X_s^n + r_s^n\right) ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{\cdot j}\left(s, X_s^n + r_s^n\right) dW_s^j .$$

Offensichtlich ist X_t^n stetig und adaptiert. Eine Anwendung der Itô-Formel ergibt für n und $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|X_t^m - X_t^n\|^2 = {} & 2\int_0^t \langle b\left(s, \bar{X}_s^m\right) - b\left(s, \bar{X}_s^n\right), X_s^m - X_s^n\rangle\, ds \\ & + 2\sum_{j=1}^r \int_0^t \langle X_s^m - X_s^n, \sigma_{\cdot j}\left(s, \bar{X}_s^m\right) - \sigma_{\cdot j}\left(s, \bar{X}_s^n\right) dW_s^j\rangle \\ & + \int_0^t \|\sigma\left(s, \bar{X}_s^n\right) - \sigma\left(s, \bar{X}_s^m\right)\|^2\, ds \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir

$$M_t^{m,n} := 2\sum_{j=1}^r \int_0^t \langle X_s^m - X_s^n, \sigma_{\cdot j}\left(s, \bar{X}_s^m\right) - \sigma_{\cdot j}\left(s, \bar{X}_s^n\right) dW_s^j\rangle .$$

Es sei nun $R \in \mathbb{N}$ so groß, dass $R > 3\sup|\xi|$. Weiterhin definieren wir die Stoppzeiten

$$\tau_n(R) := \inf\left\{t \in [0,T] \mid \|X_t^n\| \geq \frac{R}{3}\right\} \wedge T .$$

Dann folgt

$$\left\|\bar{X}_t^n\right\| \leq \frac{R}{3} \quad \text{und} \quad \|r_t^n\| \leq \frac{2R}{3} \text{ auf } [0, \tau_n(R)) .$$

Für $0 \leq s \leq \gamma_{m,n}(R) := \tau_m(R) \wedge \tau_n(R)$ folgt dann wegen $\|b(t,x)\| \leq L_R$ für $\|x\| \leq R$

$$\langle r_s^m - r_s^n, b\left(s, \bar{X}_s^m\right) - b\left(s, \bar{X}_s^n\right)\rangle \leq 2L_R\|r_s^m - r_s^n\| \leq 2L_R\left(\|r_s^m\| + \|r_s^n\|\right) .$$

Es folgt für $t \leq \gamma_{m,n}(R)$

$$\begin{aligned} \|X_t^m - X_t^n\|^2 & \leq \int_0^t \left(L_R\|\bar{X}_s^m - \bar{X}_s^n\|^2 + 2\langle r_s^m - r_s^n, b\left(s, \bar{X}_s^m\right) - b\left(s, \bar{X}_s^n\right)\rangle\right) ds + M_t^{m,n} \\ & \leq \int_0^t 2L_R\left(\|X_s^m - X_s^n\|^2 + \|r_s^m - r_s^n\|^2\right) ds + 4\int_0^t L_R\left(\|r_s^m\| + \|r_s^n\|\right) ds + M_t^{m,n} \\ & \leq 2L_R\int_0^t \|X_s^m - X_s^n\|^2\, ds + 4L_R\int_0^t \left(\|r_s^m\| + \|r_s^n\| + \|r_s^m\|^2 + \|r_s^n\|^2\right) ds + M_t^{m,n} . \end{aligned}$$

Definiere nun die folgenden Prozesse:

$$
\begin{aligned}
Z_t &:= e^{-2L_R t\wedge\gamma_{m,n}(R)} \|X^m_{t\wedge\gamma_{m,n}(R)} - X^n_{t\wedge\gamma_{m,n}(R)}\|^2 \\
N_t &:= 4L_R \int_0^{t\wedge\gamma_{m,n}(R)} e^{-2L_r s}\left(\|r^m_s\| + \|r^n_s\| + \|r^m_s\|^2 + \|r^n_s\|^2\right) ds \\
M_t &:= \int_0^{t\wedge\gamma_{m,n}(R)} e^{-2L_R s} dM^{m,n}_s \,.
\end{aligned}
$$

Eine Anwendung der Ito-Produktregel ergibt dann die folgende Ungleichung

$$Z_t \le N_t + M_t$$

für $t \ge 0$. Da $Z_t \ge 0$ ergibt sich daraus insbesondere, dass $-M_t \le N_t$ und somit

$$\sup_{t\ge0} M_t^- \le \sup_{t\ge0} N_t \,.$$

Wir benutzen nun die folgende von Burkholder in Theorem 1.4, [B75], Journal of Functional Analysis, Band 18, 429–454, 1975, erstmals bewiesene Ungleichung für Martingale $M \in \mathcal{M}^0_{loc}$: Für alle $p \in (0,1)$ gibt es eine universelle Konstante c_p mit

$$E\left(\sup_{t\ge0} |M_t|^p\right) \le c_p E\left(\left(\sup_{t\ge0} M_t^-\right)^p\right) \,. \tag{5.7}$$

Unter Ausnutzung dieser Ungleichung für $p = \frac{1}{2}$ und $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für alle $a, b \ge 0$ folgt dann

$$
\begin{aligned}
E\left(\sup_{t\ge0} Z_t^{\frac{1}{2}}\right) &\le E\left(\sup_{t\ge0} N_t^{\frac{1}{2}}\right) + E\left(\sup_{t\ge0} M_t^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\le (1 + c_{\frac{1}{2}}) E\left(\sup_{t\ge0} N_t^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
E\left(\sup_{0\le t\le\gamma_{m,n}(R)} \|X^m_t - X^n_t\|\right) &\le 2\sqrt{L_R} e^{L_R T}(1 + c_{\frac{1}{2}}) \\
& \qquad E\left(\left(\int_0^{\gamma_{m,n}(R)} \left(\|r^m_s\| + \|r^n_s\| + \|r^m_s\|^2 + \|r^n_s\|^2\right) ds\right)^{\frac{1}{2}}\right) \,.
\end{aligned}
$$

Wir zeigen im folgenden:

(1) Für jedes feste R konvergiert $\sup_{s\ge0} E\left(\|r^n_{s\wedge\tau_n(R)}\| + \|r^n_{s\wedge\tau_n(R)}\|^2\right)$ gegen 0 und damit

$$\lim_{m,n\to\infty} E\left(\sup_{t\in[0,T\wedge\gamma_{m,n}(R)]} \|X^m_t - X^n_t\|\right) = 0 \,.$$

(2) $\lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(\tau_n(R) \le T\right) = 0$.

(3) Der Prozess $(X_t^n)_{t\geq 0}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit lokal gleichmäßig (ucp) gegen einen Prozess X.

(4) X ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung (5.3) .

ad (1) Für $\frac{k}{n} \leq s \leq \frac{k+1}{n}$ gilt

$$-r_s^n = -\bar{X}_s^n + X_s^n = \int_{\frac{k}{n}}^s b\left(r, X_{\frac{k}{n}}^n\right) + \sum_{j=1}^r \int_{\frac{k}{n}}^s \sigma_{\cdot j}\left(s, X_{\frac{k}{n}}^n\right) dW_r^j \, .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} E\left(\|r_s^n\|^2\right) &\leq 2E\left(\left\|\int_{\frac{k}{n}}^s b\left(r, X_{\frac{k}{n}}^n\right) dr\right\|^2\right) + 2E\left(\int_{\frac{k}{n}}^s \left\|\sigma_{\cdot j}\left(r, X_{\frac{k}{n}}^n\right)\right\|^2 dr\right) \\ &\leq 2\left(\frac{L_R}{n}\right)^2 + 2r\frac{L_R^2}{n} \to 0 \, , n \to \infty \end{aligned}$$

und das gleichmäßig in s.

ad (2) Es sei

$$M_t^n := 2\sum_{j=1}^r \int_0^t \langle X_s^n, \sigma_{\cdot j}\left(s, \bar{X}_s^n\right)\rangle \, dW_s^j \, .$$

Eine Anwendung der Itô-Formel ergibt für $t \leq \tau_n(R)$

$$\begin{aligned} \|X_t^n\|^2 &= \|\xi\|^2 + 2\int_0^t \langle X_s^n, b\left(s, \bar{X}_s^n\right)\rangle \, ds + \int_0^t \sum_{j=1}^r \|\sigma_{\cdot j}\left(s, \bar{X}_s^n\right)\|^2 ds + M_t^n \\ &= \|\xi\|^2 + 2\int_0^t \langle \bar{X}_s^n, b\left(s, \bar{X}_s^n\right)\rangle \, ds + \int_0^t \sum_{j=1}^r \|\sigma_{\cdot j}\left(s, \bar{X}_s^n\right)\|^2 ds + M_t^n - 2\int_0^t \langle r_s^n, b\left(s, \bar{X}_s^n\right)\rangle \, ds \\ &\leq \|\xi\|^2 + \bar{K}\int_0^t (1 + \|\bar{X}_s^n\|^2) \, ds + M_t^n + 2L_R \int_0^t \|r_s^n\| \, ds \\ &\leq \|\xi\|^2 + 2\bar{K}\int_0^t (1 + \|X_s^n\|^2) \, ds + M_t^n + 2L_R\int_0^t \|r_s^n\| \, ds + 2\bar{K}\int_0^t \|r_s^n\|^2 \, ds + \bar{K}t \, . \end{aligned}$$

Bilden des Erwartungswertes liefert

$$E\left(\|X_{t\wedge\tau_n(R)}^n\|^2\right) \leq \alpha(t) + 2\bar{K}\int_0^t E\left(\|X_{s\wedge\tau_n(R)}^n\|^2\right) \, ds$$

mit

$$\alpha(t) = E\left(\|\xi\|^2\right) + 3\bar{K}T + 2(L_R + \bar{K})\int_0^t E\left(\|r_{s\wedge\tau_n(R)}^n\| + \|r_{s\wedge\tau_n(R)}^n\|^2\right) \, ds \, .$$

Eine Anwendung der Gronwall-Ungleichung 5.5 liefert

$$\begin{aligned} E\left(\|X_{t\wedge\tau_n(R)}^n\|^2\right) \leq \exp\left(2\bar{K}T\right)\Big(E\left(\|\xi\|^2\right) &+ 3\bar{K}T \\ &+ 2(L_R + \bar{K})\int_0^T E\left(\|r_{s\wedge\tau_n(R)}^n\| + \|r_{s\wedge\tau_n(R)}^n\|^2\right) \, ds\Big) \, . \end{aligned} \tag{5.8}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\left(\tau_n(R) \le T\right) &\le \frac{1}{R^2} \lim_{n\to\infty} E\left(\|X_{T\wedge\tau_n(R)}\|^2\right) \\ &\le \frac{1}{R^2} \exp\left(2\bar{K}T\right)\left(E\left(\|\xi\|^2\right) + 3\bar{K}T\right) ,\end{aligned}$$

da $\lim_{n\to\infty} E\left(\|r^n_{s\wedge\tau_n(R)}\|^2\right) = 0$ nach Schritt 1. Die rechte Seite in der letzten Ungleichung konvergiert nun offensichtlich gegen 0 für $R \to \infty$.

ad (3) Schritt (1) und (2) implizieren, dass X^n_t eine Cauchy-Folge ist bezüglich lokal gleichmäßiger Konvergenz in Wahrscheinlichkeit (ucp) und damit gibt es einen adaptierten stetigen Prozess X_t mit

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le t\le T} \|X^n_t - X_t\| \ge \varepsilon\right) = 0 .$$

für alle $\varepsilon > 0$.

ad (4) X^n_t erfüllt die Integralgleichung

$$X^n_t = \xi + \int_0^t b\left(s, \bar{X}^n_s\right) ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{\cdot j}\left(s, \bar{X}^n_s\right) dW^j_s .$$

Die linke Seite dieser Gleichung konvergiert lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit gegen X^n_t, ebenso konvergiert das Integral über den Drift-Term $b\left(\bar{X}^n_t\right)$ (lokal gleichmäßig) in Wahrscheinlichkeit gegen das Integral über $b\left(X^n_t\right)$, da b stetig und $X^n_t \to X_t$ lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit. Es bleibt schließlich noch zu zeigen, dass die stochastischen Integrale konvergieren. Dies folgt jedoch aus der Tatsache, dass aufgrund der Stetigkeit des Dispersionskoeffizienten $\sigma_{\cdot j}\left(t, \bar{X}^n_t\right) \to \sigma_{\cdot j}\left(t, X_t\right)$ lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit und damit auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \sigma_{\cdot j}\left(s, \bar{X}^n_s\right) dW^j_s = \int_0^t \sigma_{\cdot j}\left(s, X_s\right) dW^j_s \qquad ucp$$

dh, lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit. Damit ist die Existenz einer starken Lösung für beschränkte Anfangsbedingungen gezeigt.

Schließlich betrachten wir noch den Fall beliebiger Anfangsbedingungen: Für $n \ge 1$ sei $\xi^n := \xi 1_{\{\|\xi\|\le n\}}$. Dann gibt es für alle n eine starke Lösung $(X^n_t)_{t\in[0,T]}$ der stochastischen Differentialgleichung (5.3) mit Anfangsbedingung ξ^n. Offenbar gilt $X^n_t = X^m_t$ auf $\|\xi\| \le n \wedge m$ aufgrund der Eindeutigkeit der starken Lösung. Dann definiert $X_t := X^n_t$ auf $\|\xi\| \le n$ eine starke Lösung zur Anfangsbedingung ξ. □

Beispiel 5.7. **Lineare stochastische Differentialgleichungen**

$$dX_t = \left(B(t)X_t \;+\; b(t)\right) dt \;+\; \sigma(t)\, dW_t\, ,\; X_0 = \xi\, , \tag{5.9}$$

ist eine (inhomogene) lineare stochastische Differentialgleichung. $B(t)$, $b(t)$, und $\sigma(t)$ sind stetig. Nach Theorem 5.4 und Theorem 5.6 existiert genau eine starke Lösung.

Ist $\sigma \equiv 0$ so erhält man die deterministische Differentialgleichung

$$\frac{d\xi_t}{dt} = B(x)\xi_t \;+\; b(t)\, ,\; \xi_0 = \xi\, , \tag{5.10}$$

die man bekanntlich wie folgt lösen kann: Φ_t bezeichne die Lösung der homogenen Matrix-wertigen linearen Differentialgleichung

$$\frac{d\Phi_t}{dt} = B(t)\Phi_t\,,\ \Phi_0 = I\,, \tag{5.11}$$

dann ist

$$\xi_t = \Phi_t \left(\xi_0 \ + \ \int_0^t \Phi_s^{-1}\ b(s)\ ds \right)$$

Lösung von (5.10).

Halten wir einen Brownschen Pfad fest, so ist auch (5.9) formal vom Typ (5.10)

$$\frac{dX_t}{dt} = B(t)X_t \ + \ \left(b(t) \ + \ \sigma(t)\frac{dW_t}{dt} \right)$$

mit zunächst formaler Lösung

$$\begin{aligned} X_t &= \Phi_t \left(\xi + \int_0^t \Phi_s^{-1} \left(b(s) + \sigma(s)\frac{dW_s}{ds} \right) ds \right) \\ &= \Phi_t\xi + \int_0^t \Phi_t\Phi_s^{-1}\ b(s)\, ds \ + \int_0^t \Phi_t\Phi_s^{-1}\ \sigma(s)\, dW_s\,. \end{aligned} \tag{5.12}$$

"Zunächst formal" deswegen weil die Ableitung des Brownschen Pfades nicht existiert. Man beachte aber, dass das stochastische Integral in der Lösungsformel (5.12) schließlich wohldefiniert ist!

Wichtige Eigenschaft: Ist die Anfangsbedingung ξ normalverteilt, so ist auch die Lösung X_t normalverteilt mit Mittel

$$\Phi_t \left(E\,(\xi) + \int_0^t \Phi_s^{-1} b(s)\, ds \right)$$

und Kovarianzmatrix

$$\Phi_t \left(\operatorname{cov}(\xi) + \int_0^t \Phi_s^{-1}\sigma(s)\sigma(s)^T\Phi_s^{-T}\, ds \right) \Phi_t^T\,.$$

Spezialfall: $d = r = 1$. Dann ist $\Phi_t = \exp\left(\int_0^t B(s)\, ds\right)$, also

$$\begin{aligned} X_t = \exp\left(\int_0^t B(s)\, ds \right) \xi + \int_0^t \exp\left(\int_s^t B(r)\, dr \right) b(s)\, ds \\ + \int_0^t \exp\left(\int_s^t B(r)\, dr \right) \sigma(s)\, dW_s \end{aligned}$$

Insbesondere für $B(t) \equiv -\beta$, $b(t) \equiv 0$ und $\sigma(t) \equiv \sigma$ ergibt sich

$$X_t = e^{-\beta t}\xi \ + \ \int_0^t e^{-\beta(t-s)}\ \sigma\, dW_s$$

als explizite Lösung von

$$dX_t = -\beta X_t\, dt \ + \ \sigma\, dW_t\,.$$

Die so erhaltene Familie von Lösungen der linearen stochastischen Differentialgleichungen heißt **Ornstein Uhlenbeck Prozess** und modelliert die Bewegung eines Brownschen Teilchens mit Reibung.

Beispiel 5.8. **Brownsche Brücke**
Zu $T > 0$ fest, $a,b \in \mathbb{R}$ fest betrachte die lineare stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T - t}\, dt + dW_t\,, \qquad X_0 = a\,,\ 0 \le t < T\,.$$

Einsetzen in (5.12) liefert für die Lösung die Darstellung

$$X_t = \underbrace{a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T}}_{\substack{\text{Verbindungsstrecke}\\ \text{zwischen } a \text{ und } b}} + \underbrace{(T - t)\int_0^t \frac{1}{T - s}\, dW_s}_{=:Y_t \text{ "Rauschen"}}\,.$$

Dann ist Y_t normalverteilt mit Mittel 0 und Varianz

$$(T - t)^2 \int_0^t \frac{1}{(T - s)^2}\, ds = (T - t)^2\left(\frac{1}{T - t} - \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{T}t(T - t)\,.$$

Insbesondere ist die Varianz in $t = 0$ und $t = T$ gleich 0, was bedeutet, dass die Lösung X_t zum Anfangszeitpunkt in a und zum Endzeitpunkt T in b konzentriert ist. Aus diesem Grunde bezeichnet man die Lösung auch als Brownsche Brücke von a nach b.

5.2 Schwache Lösungen

Wir beleuchten in diesem Abschnitt kurz einen anderen Lösungsbegriff für stochastische Differentialgleichungen. Dazu betrachten wir wieder für $t \in [0, T]$

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt \ + \ \sigma(t, X_t)\, dW_t\,, \quad X_0 = \xi \tag{5.13}$$

mit b und σ Borel-messbar.

Definition 5.9. Eine **schwache Lösung** von (5.13) ist ein Tripel (X, W), $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$, wobei

(a) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$ eine rechtsstetige Filtration, bei der $\mathcal{F}_0$ alle P-Nullmengen in $\mathcal{F}$ enthält

(b) (X_t) ein stetiger $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter Prozess auf $\mathbb{R}^d$

(c) (W_t) eine r-dimensionale (stetige) $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung

(d) $\int_0^t |b_i(s, X_s)| \ + \ \sigma_{ij}^2(s, X_s)\, ds < \infty$ P-f.s. $\forall\ t$, $1 \le i \le d$, $1 \le j \le r$, und

$$X_t = \xi \ + \ \int_0^t b(s, X_s)\, ds \ + \ \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s \qquad P-\text{f.s.} \quad \forall t \in [0, T]\,.$$

Im Unterschied zur starken Lösung ist bei der schwachen Lösung die Brownsche Bewegung **nicht vorgegeben** und die Lösung im Allgemeinen keine Funktion der Brownschen Bewegung, dh, X lässt sich nicht in der Form

$$X = F(\xi, W) \text{ für } F : \mathbb{R}^d \times C\left([0, T]; \mathbb{R}^d\right) \to C\left([0, T]; \mathbb{R}^d\right)$$

schreiben.

Beispiel 5.10. **Tanakas Beispiel**

$$dX_t = \text{sgn}(X_t)\, dW_t\,,\ X_0 = 0 \tag{5.14}$$

Für diese stochastische Differentialgleichung gibt es eine eindeutige schwache Lösung, aber keine starke Lösung.

1) Existenz einer schwachen Lösung

Es sei (X_t) eine (beliebige) stetige Brownsche Bewegung. Dann ist

$$W_t := \int_0^t \text{sgn}(X_s)\, dX_s$$

nach Levy's Charakterisierung wieder eine stetige Brownsche Bewegung. Damit folgt nun umgekehrt, dass

$$X_t = \int_0^t \underbrace{\text{sgn}(X_s)\ \text{sgn}\ (X_s)}_{=1!}\, dX_s = \int_0^t \text{sgn}(X_s)\, dW_s$$

und somit ist (X, W) schwache Lösung.

2) Eindeutigkeit der schwachen Lösung

Sind (X, W), $(\tilde{X}, \tilde{W})$ schwache Lösungen, so folgt $Vert(X.) = Vert(\tilde{X}.)$, denn jede Lösung von (5.14) ist nach der Levyschen Charakterisierung wieder Brownsche Bewegung.

3) Es existiert keine starke Lösung von (5.14), denn: Aus X lässt sich W rekonstruieren, da

$$\begin{aligned} W_t &= \int_0^t \text{sgn}(X_s)\, dX_s \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\tau_n\,,t_{i+1}\le t} \text{sgn}\,(X_{t_i})\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right) \\ &= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i\in\tau_n\,,t_{i+1}\le t} |X_{t_{i+1}}| - |X_{t_i}| - 2 \sum_{\substack{-''- \\ X_{t_{i+1}}X_{t_i}\le 0}} |X_{t_{i+1}}|}_{=:F_n(X)\ \text{mit}\ F_n(-X)=F_n(X)}\,. \end{aligned}$$

Folglich gilt auch $W = F(X)$ mit $F(X) = F(-X)$, dh, W_t ist also $\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}_t^{|X|}$-messbar. Insbesondere folgt $\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}_t^{W} \subseteq \overset{\circ}{\mathcal{F}}{}_t^{|X|}$. Wäre umgekehrt X starke Lösung, so folgt die umgekehrte Inklusion $\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}_t^{X} \subseteq \overset{\circ}{\mathcal{F}}{}_t^{W}$ und damit $\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}_t^{X} \subseteq \overset{\circ}{\mathcal{F}}{}_t^{|X|}$, ein Widerspruch!

5.3 Starke Lösungen als Markovprozess

Wir betrachten im ganzen Abschnitt die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\ dW_t\,, \qquad X_0 = \xi \tag{5.15}$$

auf ganz $[0, \infty)$ und nehmen an, dass die beiden Annahmen **(A)** und **(B)** für alle T erfüllt sind.

Für $0 \leq s \leq t$ sei

$$\mathcal{F}_s^t = \sigma\left(\{W_u - W_s \mid u \in [s,t]\}\right) \vee \mathcal{N}$$

wobei $\mathcal{N}$ die Familie aller P-Nullmengen in $\sigma\left(\{W_t\,, t \geq 0\}\right)$ bezeichnet. Da $W_u^s := W_u - W_s$, $u \geq s$, wieder eine stetige Brownsche Bewegung mit Start in 0 ist, folgt aus Theorem 5.4 und 5.6 für alle $x \in \mathbb{R}^d$ Existenz und Eindeutigkeit der starken Lösung $X_t(s,x)$, $t \geq s$, der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = b\ (t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t^s\ ,\ t \geq s \tag{5.16}$$

mit Anfangsbedingung $X_s = x$. Aufgrund der Eindeutigkeit gilt insbesondere für $0 \leq s \leq t \leq u$

$$X_u(s,x) = X_u\left(t, X_t(s,x)\right)$$

analog zur Flusseigenschaft deterministischer dynamischer Systeme.

Im folgenden sei

$$p(s,x,t,A) := P\left(X_t(s,x) \in A\right)\ ,\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

die Verteilung der Lösung $X_t(s,x)$, $0 \leq s \leq t$. $p(s,x,t,\cdot)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^d$, für das wir im weiteren $p(s,x,t,dy)$ schreiben und das wir als **Übergangswahrscheinlichkeiten** bezeichnen. Unmittelbar aus der Euler-Approximation der Lösung (siehe Existenzbeweis - Theorem 5.6) folgt, dass $(x,\omega) \mapsto X_t(s,x)(\omega)$, $\mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}^d$, messbar ist, und damit ist für alle Borelmengen A insbesondere auch $x \mapsto p(s,x,t,A)$ Borel-messbar.

MaW: Für $0 \leq s \leq t$ ist $p(s,\cdot,t,\cdot)$ ein stochastischer Kern auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right)$.

Satz 5.11. Es gelten Annahmen **(A)** und **(B)** für alle T und es sei

$$\mathcal{F}_s = \sigma\left(\{\xi, W_t\,,\ t \in [0,s]\}\right) \vee \mathcal{N}\,.$$

Dann besitzt die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (5.15) zur Anfangsbedingung $X_0 = \xi$ die (einfache) Markoveigenschaft

$$P\left(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s\right) = P\left(X_t \in A \mid X_s\right) = p(s, X_s, t, A) \qquad \mathsf{P} - f.s.$$

Beweis. Zunächst beachte man, dass

$$\begin{aligned} X_t &= \xi + \int_0^t b(u, X_u)\, du + \int_0^t \sigma(u, X_u)\, dW_u \\ &= X_s + \int_s^t b(u, \tilde{X}_u)\, du + \int_s^t \sigma(u, \tilde{X}_u)\, dW_u^s\,, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{X}_u$, $u \geq s$, Lösung der stochastischen Differentialgleichung (5.15) zur Anfangsbedingung $\tilde{X}_s = X_s$ ist. Aufgrund der Eindeutigkeit gilt $\tilde{X}_u = X_u(s, X_s)$, also $X_t = X_t(s, X_s)$. Da $X_t(s,x)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$, folgt für F $\mathcal{F}_s$-messbar

$$E\left(F 1_A(X_t)\right) = E\left(F 1_A\left(X_t(s,\cdot)\right)(X_s)\right) = E\left(F\ p(s, X_s, t, A)\right)\,. \tag{5.17}$$

Da $x \mapsto p(s,x,t,A)$ Borel-messbar, ist $p(s, X_s, t, A)$ $\sigma\left(X_s\right)$-messbar und somit impliziert (5.17) die Behauptung. □

Im Folgenden sei

$$P_{s,x} := \text{ Verteilung von } X_\cdot(s,x) \text{ unter } P \text{ auf } C([0,\infty),\mathbb{R}^d)$$

wobei wir $X_t(s,x) = x$ für $t \le s$ setzen. Weiterhin sei $\mathcal{F}_s^t = \sigma\left(\pi_u \mid u \in [s,t]\right)$, wobei $\pi_t : C([0,\infty),\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ wie üblich die natürliche Projektion bezeichnet. Dann folgt aus dem letzten Satz 5.11, dass $((\pi_t), (P_{t,x}))$ ein (inhomogener) Markovprozess ist bzgl. $(\mathcal{F}_s^t)$. Ohne Beweis bemerken wir noch, dass dieser Prozess auch die starke Markoveigenschaft bzgl. der rechtsstetigen Filtration $\overline{\mathcal{F}}_s^t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_s^u$ besitzt.

Da $p(s,x,t,dy)$ ein stochastischer Kern auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ist (für $0 \le s \le t$ fest), definiert

$$P(s,t)f(x) := \int f(y)\, p(s,x,t,dy)\,,\ x \in \mathbb{R}^d$$

einen Integraloperator auf Borel-messbaren Funktionen. Die Messbarkeit von $P(s,t)f$ folgt dabei aus dem Satz von Fubini (siehe VL Wahrscheinlichkeitstheorie II).

Satz 5.12. Die Familie $(P(s,t))_{0\le s\le t}$ erfüllt die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen

$$\begin{aligned} P(s,u) &= P(s,t) \circ P(t,u) \qquad ; 0 \le s \le t \le u \\ \text{bzw. } p(s,x,u,A) &= \int p(t,y,u,A)\, p(s,x,t,dy)\,. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Sind b und σ unabhängig von t, dh, $b(t,x) = b(x)$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)$, so gilt $p(s,x,t,A) = p(0,x,t-s,A)$. In diesem Falle definiert

$$P_t := P(0,t)\,, t \ge 0$$

eine Halbgruppe von Integraloperatoren, dh es gilt

(a) $P_0 =$ Identität,

(b) $P_t \circ P_s = P_{t+s}$ für alle $s,t \ge 0$.

Beweis. Satz 5.11 impliziert

$$\begin{aligned} p(s,x,u,A) &= P(X_u(s,x) \in A) = E\left(P\left(X_u(s,x) \in A \mid \mathcal{F}_t\right)\right) \\ &= E\left(p\left(t, X_t(s,x), u, A\right)\right) = \int p(t,y,u,A)\ p(s,x,t,dy)\,, \end{aligned}$$

also $P(s,u)1_A = P(s,t) \circ P(t,u)1_A$. Nun folgt $P(s,u) = P(s,t) \circ P(t,u)$ mit maßtheoretischer Induktion.

Ist $b(t,x) = b(x)$ und $\sigma(t,x) = \sigma(x)$, so gilt

$$\begin{aligned} X_t(s,x) &= x + \int_s^t b\left(X_r(s,x)\right)\, dr + \int_s^t \sigma\left(X_r(s,x)\right)\, dW_r^s \\ &= x + \int_0^{t-s} b\left(X_r(s,x)\right)\, dr + \int_0^{t-s} \sigma\left(X_r(s,x)\right)\, dW_{r+s}^s\,, \end{aligned}$$

also

$$P\left(X_t(s,x) \in A\right) = P\left(X_{t-s}(0,x) \in A\right)$$

und somit $p(s,x,t,A) = p(0,x,t-s,A)$. Die Halbgruppeneigenschaft für $(P_t)_{t\ge 0}$ folgt nun aus den Chapman-Kolmogorov Gleichungen (5.18)

$$P_t \circ P_s = P(0,t) \circ \underbrace{P(0,s)}_{=P(t,t+s)} = P(0,t+s) = P_{t+s}\,.$$

$\square$

5.4 Starke Lösungen als Diffusionsprozesse

Wir betrachten wieder die stochastische Differentialgleichung (5.15)

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t$$

mit b, σ wie in den Annahmen **(A)** und **(B)**. Es bezeichne $P(s,t)$, $0 \le s \le t$, die durch die Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmten Integraloperatoren.

Satz 5.13. Es sei $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, dh, f, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ stetig und beschränkt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left(P(t, t+h) f - f \right) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \\ &=: L_t f(x) \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$a_{ij}(t,x) = (\sigma \cdot \sigma^T)_{ij}\ (t,x) \qquad \text{"Diffusionsmatrix"}$$

Beweis. Zunächst einmal gilt

$$P(t,t+h)f(x) = \int f(y)\, p(t,x,t+h,dy) = E\left(f\left(X_{t+h}(t,x) \right) \right) .$$

Die Lösung $X_\cdot(t,x)$ von (5.15) ist stetig und besitzt eine stetige quadratische Kovariation

$$\begin{aligned} \langle X_\cdot^i(t,x), X_\cdot^j(t,x) \rangle_{t+h} &= \langle \int_t^{t+\cdot} \sum_{k=1}^{r} \sigma_{ik}\left(u, X_u(t,x)\right)\, dW_u^{(k)} , \int_t^{t+\cdot} \sum_{k=1}^{r} \sigma_{jk}\left(u, X_u(t,x)\right)\, dW_u^{(k)} \rangle_{t+h} \\ &= \int_t^{t+h} \underbrace{\left(\sum_k \sigma_{ik} \sigma_{jk} \right)}_{=a_{ij}} \left(u, X_u(t,x)\right)\, du\,. \end{aligned}$$

Anwendung der Itô-Formel ergibt

$$\begin{aligned} f\left(X_{t+h}(t,x)\right) &= f(x) + \int_t^{t+h} \langle \nabla f\left(X_u(t,x)\right), dX_u(t,x) \rangle \qquad + \cdots \\ &= f(x) + \int_t^{t+h} \langle \nabla f\left(X_u(t,x)\right), dM_u \rangle + \sum_{i=1}^{d} \int_t^{t+h} b_i\left(u, X_u(t,x)\right) \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(X_u(t,x)\right)\, du \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_t^{t+h} a_{ij}\left(u, X_u(t,x)\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(X_u(t,x)\right)\, du \\ &= f(x) + I + II + III\,. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im zweiten Gleichheitszeichen die stochastische Differentialgleichung

$$dX_u(t,x) = b\left(u, X_u(t,x)\right)\, du + \underbrace{\sigma\left(u, X_u(t,x)\right)\, dW_u}_{=:dM_u}$$

für $X_u(t,x)$ eingesetzt und die Notation $M_u := \int_t^u \sigma\left(r, X_r(t,x)\right) dW_r$ für das stochastische Integral verwendet.

Zu den drei Termen I, II und III im Einzelnen: I ist Martingal, da quadratische Variation $\mathcal{L}^2$-integrierbar. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} E\left(f\left(X_{t+h}(t,x)\right) - f(x)\right) &= \frac{1}{h} E\left(\int_t^{t+h} L_u f\left(X_u(t,x)\right) du\right) \\
&= L_t f(x) + E\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left(\underbrace{L_u f\left(X_u(t,x)\right) - L_t f(x)}_{\to 0 \text{ pktweise}}\right) du\right) \\
&\longrightarrow_{h\to 0} L_t f(x)
\end{aligned}$$

da aufgrund der linearen Wachstumsbeschränkung an b und σ gilt

$$\left|L_u f\left(X_u(t,x)\right)\right| \leq C\left(1 + \|X_u(t,x)\|^2\right)$$

und damit ist

$$\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left(L_u f\left(X_u(t,x)\right) - L_t f(x)\right) du\right| \leq C\left(1 + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|X_u(t,x)\|^2\, du\right) + |L_t f(x)|$$

eine integrierbare Majorante (siehe Lemma 5.15 unten). □

Die Operatoren L_t, $t \geq 0$, heißen **infinitesimale Generatoren** des Markovprozesses zu (5.15). Sie bilden eine Brücke zwischen Diffusionsprozessen, der Funktionalanalysis (insbesondere der Halbgruppentheorie) und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

5.5 Stochastische Differentialgleichungen und Randwertprobleme

Gegeben sei wieder die stochastische Differentialgleichung (5.15)

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t$$

mit:

(a) b, σ stetig in (t,x) und höchstens von linearem Wachstum: $\|b(t,x)\|^2 + \|\sigma(t,x)\|^2 \leq K(1 + \|x\|^2)$

(b) (5.15) hat für alle (s,x) eine schwache Lösung $(X_t(s,x), W)$ und diese Lösung ist eindeutig (in Verteilung).

Es sei $T > 0$ und $f \in C(\mathbb{R}^d)$, $g, k \in C([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ stetig, f, g polynomiell beschränkt, dh

$$|f(x)| \leq K\left(1 + \|x\|^{2m}\right), \qquad |g(t,x)| \leq K\left(1 + \|x\|^{2m}\right)$$

für $m \geq 1$ und $K \geq 0$. Dann gilt:

Satz 5.14. (Feynmann-Kac Darstellung der Lösung des Cauchy-Problems)
Es sei $v \in C\left([0,T] \times \mathbb{R}^d\right) \cap C^{1,2}\left([0,T) \times \mathbb{R}^d\right)$ eine Lösung des Cauchy-Problems

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial t} + L_t v - kv = g \text{ auf } [0,T) \times \mathbb{R}^d \\ v(T,\cdot) = f \text{ auf } \mathbb{R}^d\,. \end{gathered} \tag{5.19}$$

Ist v polynomiell beschränkt, dh

$$|v(t,x)| \le K\left(1 + \|x\|^{2m}\right) \text{ für ein } m \ge 1\,,$$

so besitzt v die stochastische Darstellung

$$\begin{aligned} v(t,x) = E\Big(& f\left(X_T(t,x)\right) \exp\left(-\int_t^T k\left(s, X_s(t,x)\right)\, ds\right) \\ &+ \int_t^T g\left(s, X_s(t,x)\right) \exp\left(-\int_t^s k\left(r, X_r(t,x)\right)\, dr\right)\, ds\Big) \end{aligned}$$

Insbesondere ist eine solche Lösung des parabolischen Randwertproblems (5.19) eindeutig.

Beweis. Es sei

$$M_s := v\left(s, X_s(t,x)\right) \exp\left(-\int_t^s k\left(r, X_r(t,x)\right)\, dr\right)\,, \qquad s \in [t,T]\,.$$

Anwendung der Itô-Formel ergibt

$$\begin{aligned} dM_s &= \exp\left(-\int_t^s k\left(r, X_r(t,x)\right)\, dr\right) dv\left(s, X_s(t,x)\right) - k\left(s, X_s(t,x)\right) M_s\, ds \\ &= \exp\left(-\int_t^s k\left(r, X_r(t,x)\right)\, dr\right) \Big(\left\langle \nabla v\left(s, X_s(t,x)\right), dX_s(t,x)\right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}\left(s, X_s(t,x)\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\left(s, X_s(t,x)\right) + \frac{\partial v}{\partial s}\left(s, X_s(t,x)\right)\, ds\Big) - k\left(s, X_s(t,x)\right)\ M_s\, ds \\ &= \exp\left(-\int_t^s k\left(r, X_r(t,x)\right)\, dr\right) \Big(\left\langle \nabla v\left(s, X_s(t,x)\right), dX_s(t,x)\right\rangle \\ &\quad + \left(L_s v + \frac{\partial v}{\partial s}\right)\left(s, X_s(t,x)\right)\, ds\Big) - k\left(s, X_s(t,x)\right) M_s\, ds \\ &= \exp\left(-\int_t^s k\left(r, X_r(t,x)\right)\, dr\right) \left\langle \nabla v\left(s, X_s(t,x)\right), dX_s(t,x)\right\rangle \\ &\quad - g\left(s, X_s(t,x)\right) \exp\left(-\int_t^s k\left(r, X_r(t,x)\right)\, dr\right)\, ds \\ &= I + II\,. \end{aligned}$$

I ist lokales Martingal mit lokalisierender Folge

$$T_n = \inf\left\{s \ge t \mid \|X_s\| \ge n\right\} \wedge T\,,$$

also gilt

$$v(t,x) = E(M_t) = E\left(M_{T_n} + \int_t^{T_n} g\left(s, X_s(t,x)\right) \exp\left(-\int_t^s k\left(r, X_r(t,x)\right)\, dr\right)\, ds\right)\,.$$

Wir zeigen im folgenden Lemma die Abschätzung

$$E\left(\sup_{t\le r\le s}\|X_r(t,x)\|^{2M}\right)\le C\left(1+\|x\|^{2M}\right)e^{C(s-t)}\,,\qquad t\le s\le T\,, \tag{5.20}$$

für eine Konstante $C=C(M,K,d,s)$.
Der Integrand konvergiert P-f.s. gegen

$$M_T+\int_t^T g\left(s,X_s(t,x)\right)\exp\left(-\int_t^s k\left(r,X_r(t,x)\right)\,dr\right)\,ds\,.$$

Der zweite Summand besitzt wegen (5.20) die integrierbare Majorante
$\int_t^T K\left(1+\|X_s(t,x)\|^{2M}\right)\,ds$, also konvergiert das Integral hierüber gegen

$$E\left(\int_t^T g\left(s,X_s(t,x)\right)\exp\left(-\int_t^s k\left(r,X_r(t,x)\right)\,dr\right)\,ds\right)\,.$$

Für den ersten Summanden haben wir

$$|M_{T_n}|\le K\left(1+\sup_{t\le s\le T}\|X_s(t,x)\|^{2m}\right)$$

und damit konvergiert auch das Integral hierüber gegen

$$E\left(\underbrace{v\left(T,X_T(t,x)\right)}_{=f(X_T(t,x))}\exp\left(-\int_t^T k\left(s,X_s(t,x)\right)\,ds\right)\right)\,.$$

□

Lemma 5.15. Für die schwache Lösung $X_s(t,x)$, $s\in[t,T]$ von (5.15) und für $M\ge1$ gilt:

$$E\left(\sup_{t\le r\le s}\|X_r(t,x)\|^{2M}\right)\le C\left(1+\|x\|^{2M}\right)e^{C(s-t)}\,.$$

Beweis. Zunächst gilt für $n\ge1$ und $p>0$

$$|a_1|^p+\ldots+|a_n|^p\le n(|a_1|\;+...+\;|a_n|)^p\le n^{p+1}(|a_1|^p+\ldots+|a_n|^p)\,.$$

Also

$$\|X_s(t,x)\|^{2M}\le C(M,d)\left(\|x\|^{2M}+\left\|\int_t^s b\left(r,X_r(t,x)\right)\,dr\right\|^{2M}+\left\|\int_t^s\sigma\left(r,X_r(t,x)\right)\,dW_r\right\|^{2M}\right)\,.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\left\|\int_t^s b\left(r,X_r(t,x)\right)\,dr\right\|^{2M}&=\left(\sum_{i=1}^d\left(\int_t^s b_i\left(r,X_r(t,X)\right)\,dr\right)^2\right)^M\\&\le(s-t)^M\left(\int_t^s\|b\left(r,X_r(t,x)\right)\|^2\,dr\right)^M\\&\le(s-t)^{2M-1}\int_t^s\|b\left(r,X_r(t,x)\right)\|^{2M}\,dr\ \text{(Hölder)}\end{aligned}$$

und nach der Maximalungleichung für Martingale

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{t\le r\le s}\left\|\int_t^r \sigma\left(u, X_u(t,x)\right)\, dW_u\right\|^{2M}\right) &\le C(M,d)E\left(\left\|\int_t^s \sigma\left(r, X_r(t,x)\right)\, dW_r\right\|^{2M}\right)\\
&\le C(M,d)E\left(\left(\int_t^s \|\sigma(r, X_r(t,x)\|^2\, dr\right)^M\right)\\
&\le C(M,d)(s-t)^{M-1}E\left(\int_t^s \|\sigma\left(r, X_r(t,x)\right)\|^{2M}\, dr\right) .
\end{aligned}$$

In der zweiten Ungleichung haben wir dabei die Momentenungleichung für Itô-Integrale angewendet (siehe Übung bzw. Exercise 3.25 in [KS91], Beweis mithilfe der Itô-Formel, angewandt auf das Submartingal $\| \int_t^s \sigma\left(u, X_u(t,x)\right)\, dW_u\|^{2M}$).

Da b und σ höchstens von linearem Wachstum, folgt

$$E\left(\sup_{t\le r\le s}|X_r(t,x)|^{2M}\right) \le C(M,d)\left(1+\|x\|^{2M}+C(s-t,M)E\left(\int_t^s \sup_{t\le u\le r}\|X_u(t,x)\|^{2M}\, du\right)\right)$$

und eine Anwendung der Gronwall Ungleichung 5.5 ergibt

$$E\left(\sup_{t\le r\le s}\|X_r(t,x)\|^{2M}\right) \le Ce^{C(s-t)}\left(1+\|x\|^{2M}\right) .$$

□

Beispiel 5.16. (Black & Scholes Formel zur Optionspreisbewertung) Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$dX_t = rX_t dt\,, \quad X_0 = p_0$$

beschreibt den Preis einer festverzinslichen Anleihe ($r \stackrel{\wedge}{=}$ Zinssatz),

$$dY_t \;=\; rY_t\, dt \;+\; \sigma\, Y_t\, dW_t \tag{5.21}$$

den Preisprozess einer Aktie. Für die Option zum Kauf einer Aktie zur Zeit T zum Preis q ist der faire Preis gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_t &= E\left(e^{-r(T-t)}\, (Y_T-q)^+ \;\mid\; \mathcal{F}_t\right) , \qquad 0\le t\le T\,,\\
&= E\left(e^{-r(T-t)}\, (Y_T-q)^+ \;\mid\; Y_t\right)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

wobei wir Markoveigenschaft der Lösung von (5.21) benutzt haben.

Eine Rechtfertigung dieser stochastischen Darstellung des fairen Preises geschieht über den Darstellungssatz für Martingale (bzgl. einer Brownschen Filtration). Eine Anwendung dieses Satzes erlaubt die Darstellung der Auszahlungsfunktion $(Y_T-q)^+$ als stochastisches Integral bzgl. des Preisprozesses

$$e^{-r(T-t)}(Y_T-q)^+ = E\left(e^{-r(T-t)}(Y_T-q)^+ \mid \mathcal{F}_t\right) + \int_t^T H_s\, dY_s$$

für einen geeigneten Integranden $(H_t)_{t\in[0,T]}$. Diese Identität beschreibt explizit, wie man mit Transaktionen (Ankauf/Verkauf) von Aktien (beschrieben durch H_t), die

Auszahlungsfunktion der Option replizieren kann. Da der Erwartungswert des stochastischen Integrals verschwindet, ergibt sich als fairer Preis der Option gerade (5.22), andernfalls böte sich mit positiver Wahrscheinlichkeit die Gelegenheit zu risikolosem Gewinn (für Käufer bzw. Verkäufer der Option).

Eine explizite Lösung $v(t,x)$ des Cauchy-Problems

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rx\frac{\partial v}{\partial x} - rv = 0 & \text{auf } [0,T) \times [0,\infty) \\ r(T,x) = (x-q)^+ & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

wird gegeben durch

$$v(t,x) = \begin{cases} x\Phi\left(\rho_+(T-t,x)\right) - qe^{-r(T-t)}\Phi\left(\rho_-(T-t,x)\right) & ;\ (t,x) \in [0,T) \times [0,\infty) \\ (x-q)^+;\ t = T\,, x \geq 0 \end{cases} \tag{5.23}$$

mit

$$\begin{aligned} \rho_\pm(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{t\sigma^2}}\left[\log\left(\frac{x}{q}\right) + t\left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] \\ \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,. \end{aligned}$$

Folglich ist nach Satz 5.14

$$v(t,x) = E\left(\left(Y_T(0,x) - q\right)^+ e^{-r(T-t)}\right)\,,$$

also

$$v(t,Y_t) = E\left(e^{-r(T-t)}(Y_T - q)^+ \mid Y_t\right) = P_t$$

eine explizite Formel für den fairen Preis.